ŚRODOWISKO
CZASOPISMO TECHNICZNE
TECHNICAL TRANSACTIONS
ENVIRONMENTAL ENGINEERING
WYDAWNICTWO
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ
4-Ś/2012
ZESZYT 28
ROK 109
ISSUE 27
YEAR 109

JAROSŁAW MÜLLER*

OKREŚLENIE NIEPWENOŚCI POMIARU W BADANIACH INSTALACJI KLIMATYZACYJNYCH

DETERMINING THE UNCERTAINTY IN TESTING THE AIR CONDITIONING SYSTEMS

S t r e s z c z e n i e

Określenie niepewności pomiaru w badaniach instalacji klimatyzacyjnej jest bardzo istotnym zagadnieniem z punktu widzenia oszczędności energetycznych. Pomiary dokonywane w różnych punktach instalacji dają sygnał dla automatycznej regulacji, która jest odpowiedzialna za optymalne utrzymywanie parametrów powietrza. Właściwe obliczenie i przedstawienie niepewności pomiaru daje informację o jakości instalacji i pomiarach zarówno w eksploatacji istniejących systemów, jak i w badaniach laboratoryjnych.

Słowa kluczowe: *niepewność pomiaru*

A b s t r a c t

Estimating the uncertainty of the measurements when testing the air-conditioning installation is a very important issue because it has a strong effect on energy efficiency of the whole system. The measurements taken in various points of the system give the signal used by automatic regulation, which is responsible for controlling the air parameters. Proper calculation and presentation of uncertainty of measurements give the information of a quality of the system in running the existing installation as well as in laboratory tests.

Keywords: *uncertainty*

* Dr inż. Jarosław Müller, Instytut Inżynierii Cieplnej i Ochrony Powietrza, Wydział Inżynierii Środowiska, Politechnika Krakowska.

1. Wstęp

Pomiary w obrębie klimatyzowanego pomieszczenia oraz w instalacji wentylacyjno-klimatyzacyjnej służą sprawdzeniu poprawności spełniania założeń projektowych w zakresie utrzymania zadanych parametrów oraz realizacji procesów uzdatniania powietrza w obrębie samej instalacji. Wymagania użytkownika, założenia projektowe obejmują zakres parametrów dopuszczalnych dla założonej klasy pomieszczenia. Pomiar poszczególnych wielkości, dokonany zgodnie z obowiązującymi normami, powinien udzielić odpowiedzi na pytanie o spełnienie wymagań i założeń. Zakres wykonywanych pomiarów został omówiony w rozdziale poświęconym kontroli instalacji. W poniższym opracowaniu szczególny nacisk zostanie położony na jakość informacji uzyskanej z pomiarów, czyli niepewność.

Szczegółowe omówienie tematyki niepewności pomiarów zamieszczono m.in. w literaturze [1].

Każdy pomiar jest zawsze operacją obciążoną niedokładnością, to znaczy, że estymata wartości rzeczywistej tego, co ma być zmierzone, otrzymana jako wynik pomiaru, różni się na ogół od wartości prawdziwej. Równość estymaty i estymowanej wartości jest zdarzeniem wyjątkowym, a fakt jego zajścia pozostaje nieznany. Istotą pomiaru jest jednak to, że niedokładność wyniku pomiaru można zawsze oszacować, to znaczy można zawsze określić graniczną rozbieżność między znanym wynikiem pomiaru a nieznaną wartością rzeczywistą.

Szacowanie niedokładności pomiaru jest jedną z podstawowych czynności, która powinna być wykonywana w procesie mierzenia dowolnej wielkości.

Podając wynik pomiaru wielkości fizycznej, należy koniecznie podać także informację o jakości tego wyniku, tak aby korzystający z tego wyniku mógł oszacować jego wiarygodność. Bez takiej informacji wyniki pomiarów nie mogą być porównywane ani pomiędzy sobą, ani z wartościami odniesienia podawanymi w specyfikacji lub odpowiedniej normie. Potrzebna jest zatem wygodna w stosowaniu, zrozumiała i powszechnie akceptowana procedura charakteryzowania jakości wyniku pomiaru, to jest procedura obliczania i wyrażania jego niepewności.

Pojęcie niepewności jako określonej liczbowo wyrażanej cechy jest stosunkowo nowe w historii pomiarów, choć błąd i analiza błędów od dawna są częścią wiedzy o pomiarach, czyli metrologii. Gdy obliczy się wszystkie znane albo oczekiwane składowe błędu i wprowadzi je jako odpowiednie poprawki, pozostaje jeszcze niepewność co do poprawności tak otrzymanego wyniku i wątpliwości, w jakim stopniu wynik pomiaru dobrze reprezentuje wartość wielkości będącej przedmiotem pomiaru.

W wielu zastosowaniach przemysłowych i handlowych, jak również w dziedzinie ochrony zdrowia i zapewnienia bezpieczeństwa, trzeba często podawać przedział wokół wyniku pomiaru, obejmujący dużą część rozkładu wartości, które w uzasadniony sposób można przypisać wielkości stanowiącej przedmiot pomiaru. Metoda obliczania i wyrażania niepewności pomiaru umożliwia szybkie określanie tego przedziału, a zwłaszcza przedziału z prawdopodobieństwem objęcia, czyli poziomem ufności, realistycznie odpowiadający wymaganemu.

Niepewność wyniku pomiaru ogólnie składa się z wielu składników, które można zgrupować w dwie kategorie, zgodnie ze sposobem obliczania ich wartości liczbowych:

A. takie, które zostały obliczone metodami statystycznymi,

B. takie, które zostały obliczone innymi metodami.

2. Definicje

Niepewność (pomiaru) – parametr związany z wynikiem pomiaru, charakteryzujący rozrzut wartości, które można w uzasadniony sposób przypisać wartości mierzonej.

Niepewność standardowa – niepewność wyniku pomiaru wyrażona w formie odchylenia standardowego.

Obliczanie niepewności – metoda typu A – metoda obliczania niepewności pomiaru drogą analizy statystycznej serii pojedynczych obserwacji.

Obliczanie niepewności – metoda typu B – metoda obliczania niepewności pomiaru sposobami innymi niż analiza serii obserwacji.

Złożona niepewność standardowa – niepewność standardowa wyniku pomiaru określana, gdy wynik ten jest otrzymywany z wartości pewnej liczby innych wielkości, równa pierwiastkowi kwadratowemu z sumy wyrazów, będących wariancjami lub kowariancjami tych innych wielkości z wagami zależnymi od tego, jak wynik pomiaru zmienia się wraz ze zmianami tych wielkości.

Niepewność rozszerzona – wielkość określająca przedział wokół wyniku pomiaru, od którego to przedziału oczekuje się, że obejmie dużą część rozkładu wartości, które w uzasadniony sposób można przypisać wielkości mierzonej.

Współczynnik rozszerzenia – liczbowa zastosowana jako mnożnik złożonej niepewności standardowej w celu otrzymania niepewności rozszerzonej.

Nie zawsze zachodzi prosta zależność pomiędzy klasyfikacją na kategorie A i B a wcześniej stosowaną klasyfikacją na niepewności „przypadkowe” i niepewności „systematyczne”.

Szczegółowe przedstawienie niepewności powinno obejmować pełną listę składowych, z określoną metodą użytą do wyznaczenia wartości liczbowej każdej z nich.

Składniki kategorii A są charakteryzowane przez estymaty wariancji s_i^2 lub estymaty „odchyleń standardowych” s_i i liczby stopni swobody v_i. Jeśli jest to wskazane, powinny być podane kowariancje.

Składniki kategorii B powinny być charakteryzowane przez wielkości u_j^2, które można rozpatrywać jako przybliżone wartości odpowiednich wariancji, jeśli takie istnieją. Wielkości u_j^2 można traktować jako wariancję, a wielkości u_j jako odchylenie standardowe. Jeżeli jest to wskazane, w podobny sposób powinny być traktowane kowariancje.

Niepewność złożona powinna być charakteryzowana przez wartość liczbową otrzymaną przez zastosowanie zwykłej metody składania wariancji. Niepewność złożona i jej składowe powinny być wyrażane w formie „odchyleń standardowych”.

Jeżeli w pewnych zastosowaniach trzeba pomnożyć niepewność złożoną przez pewien współczynnik, aby otrzymać niepewność całkowitą, to należy zawsze podawać wartość tego współczynnika.

Pomiar

Celem pomiaru jest określenie wartości wielkości mierzonej, to jest wielkości poddanej pomiarowi. Pomiar więc zaczyna się określeniem wielkości mierzonej, metody pomiarowej i procedury pomiarowej.

Zwykle wynik pomiaru jest tylko przybliżeniem lub estymatą wartości wielkości mierzonej i dlatego wynik pomiaru jest pełny tylko wtedy, gdy jest podany wraz z niepewnością tej estymaty.

W praktyce wymagana specyfikacja lub definicja wielkości mierzonej zależą od wymaganej dokładności pomiaru. Wielkość mierzona powinna być zdefiniowana kompletnie w stosunku do wymaganej dokładności, tak aby dla wszystkich faktycznych celów związanych z pomiarem jej wartość była jedyną.

Przykład

Jeżeli długość pręta stalowego o nominalnej wartości jednego metra ma być wyznaczona z dokładnością do mikrometra, to w jego specyfikacji powinna być podana temperatura i ciśnienie, dla których ta długość jest określona. Wielkość mierzona powinna być zatem określona na przykład jako długość pręta w temperaturze 25,00°C i pod ciśnieniem 101 325 Pa (plus jakiekolwiek parametry, które wydają się być niezbędne, takie jak np. sposób umocowania pręta), Jednakże jeżeli długość ma być wyznaczona z dokładnością tylko do jednego milimetra, jej specyfikacja nie wymaga podawania temperatury czy ciśnienia, czy też wartości innych parametrów.

W wielu przypadkach wynik pomiaru jest określany na podstawie serii obserwacji otrzymywanych w warunkach powtarzalności pomiarów.

Przyjmuje się, że zmiany wyników powtarzanych obserwacji powstają, ponieważ wielkości, które mogą mieć wpływ na wynik pomiaru, nie mają niezmiennych wartości w czasie dokonywania obserwacji.

3. Błędy pomiaru

Zwykle pomiar zawiera wiele niedokładności, które przyczyniają się do powstania błędu wyniku pomiaru. Tradycyjnie przyjmuje się, że błąd ma dwie składowe: składową przypadkową i składową systematyczną.

Błąd przypadkowy przypuszczalnie wynika z nieprzewidywalnych (stochastycznych) czasowych i przestrzennych zmian parametrów wpływających na pomiar. Czynniki wywołujące takie zmiany, nazywane dalej oddziaływaniami przypadkowymi, powodują zmiany w wynikach powtarzanych obserwacji wielkości mierzonej. Błąd przypadkowy wyniku pomiaru nie może być skompensowany przez poprawkę, ale może być po prostu zmniejszony przez zwiększenie liczby obserwacji, przy czym wartość oczekiwana błędu przypadkowego wynosi zero.

Błąd systematyczny, podobnie jak błąd przypadkowy, nie może być całkowicie wyeliminowany, ale często może być zredukowany. Jeżeli błąd systematyczny powstaje wskutek rozpoznanego działania wielkości wpływającej na wynik pomiaru, dalej będzie ono nazywane *oddziaływaniem systematycznym*, to wynik tego oddziaływania może być określony ilościowo; jeśli jest on znaczny w porównaniu z wymaganą dokładnością pomiaru, to aby jego wpływ, to aby jego wpływ skompensować, wprowadza się addytywnie poprawkę lub multiplikatywnie współczynnik poprawkowy. Zakłada się, że po wprowadzeniu poprawki wartość oczekiwana błędu wynikającego z oddziaływania systematycznego wynosi zero.

Uwaga:

Niepewność poprawki kompensującej wpływ oddziaływania systematycznego na wynik pomiaru nie jest, jak niekiedy się to przedstawia, błędem systematycznym, nazywanym często *obciążeniem, wyniku pomiaru, wywołanym tym oddziaływaniem. Jest ona natomiast miarą niepewności wyniku z powodu niepełnej wiedzy o wartości, jaką powinna mieć poprawka. Błąd wynikający z niedoskonałej kompensacji oddziaływania systematycznego nie może być znany dokładnie. Terminy „błąd" i „niepewność" powinny być właściwie stosowane i należy uważać, aby odróżniać je od siebie.*

4. Niepewność pomiaru

Niepewność wyniku pomiaru obrazuje brak dokładnej znajomości wartości wielkości mierzonej. Wynik pomiaru po korekcji rozpoznanych oddziaływań systematycznych pozostaje wciąż tylko *estymatą* wartości wielkości mierzonej, a to z powodu niepewności wynikającej z oddziaływań przypadkowych i niedoskonałej korekcji oddziaływań systematycznych.

Uwaga

Wynik pomiaru (po korekcji) może być w nieznanym stopniu bardzo bliski wartości wielkości mierzonej (i stąd mieć zaniedbywalny błąd), nawet gdy ma dużą niepewność. Tak więc niepewność wyniku pomiaru nie powinna być mylona z pozostałym nieznanym błędem.

Istnieje wiele możliwych źródeł niepewności pomiaru, a wśród nich:

a) niepełna definicja wielkości mierzonej;
b) niedoskonała realizacja definicji wielkości mierzonej,
c) niereprezentatywne próbkowanie – próbka mierzona może nie reprezentować danej wielkości mierzonej,
d) niepełna znajomość oddziaływań otoczenia na pomiar albo niedoskonały pomiar warunków otoczenia,
e) subiektywne błędy w odczytywaniu wskazań przyrządów analogowych,
f) skończona rozdzielczość albo próg pobudliwości przyrządu,
g) niedokładne wartości przypisane wzorcom i materiałom odniesienia,
h) niedokładne wartości stałych i innych parametrów otrzymywanych ze źródeł zewnętrznych do pomiaru, a używanych w procedurach przetwarzania danych,
i) przybliżenia i założenia upraszczające, tkwiące w metodzie i procedurze pomiarowej,
j) zmiany w powtarzanych obserwacjach wielkości mierzonej w pozornie identycznych warunkach.

Estymata wariancji u^2, charakteryzująca składową niepewności, otrzymana metodą typu A, jest obliczana z serii powtórzonych obserwacji i jest równa statystycznej estymacji wariancji s^2. Estymata odchylenia standardowego u, czyli dodatni pierwiastek kwadratowy z u^2, spełnia $u = s$ i dla wygody bywa czasami nazywana *niepewnością standardową typu A*. Dla składowej niepewności, otrzymanej metodą typu B, estymata wariancji u^2 jest obliczana z wykorzystaniem dostępnej wiedzy. Estymata odchylenia standardowego u jest czasami nazywana *niepewnością standardową typu B*.

Z tego powodu niepewność standardowa typu A jest obliczana z funkcji gęstości prawdopodobieństwa, otrzymanej z obserwowanego rozkładu częstości, podczas gdy niepewność standardowa typu B jest obliczana na podstawie założonej funkcji gęstości prawdopodobieństwa, opartej na stopniu zaufania w to, że zajdzie dane zdarzenie (często nazwanego prawdopodobieństwem subiektywnym). Oba podejścia korzystają z uznanych zasad interpretacji prawdopodobieństwa.

Niepewność standardowa wyniku pomiaru, gdy wynik ten jest otrzymany z wartości innych wielkości, jest nazywana *niepewnością standardową złożoną* i oznaczana przez u_c. Jest ona estymatą odchylenia standardowego związanego z wynikiem i równa jest dodatniemu pierwiastkowi kwadratowemu z wariancji złożonej, otrzymanej ze wszystkich wariancji i kowariancji składowych, obliczonych dowolna metodą, złożonych zgodnie z prawem *propagacji niepewności.*

Aby sprostać potrzebom pewnych zastosowań przemysłowych i handlowych, jak również wymaganiom w dziedzinie ochrony zdrowia i zapewnienia bezpieczeństwa, tworzy się *niepewność rozszerzoną U* przez pomnożenie niepewności standardowej złożonej u_c przez współczynnik rozszerzenia k. Niepewność rozszerzoną U wprowadza się po to, aby określić wokół wyniku pomiaru przedział, od którego oczekuje się, że obejmie dużą część rozkładu wartości, które można w uzasadniony sposób przyporządkować wartości mierzonej. Wybór wartości współczynnika k, zwykle zawartego w przedziale od 2 do 3, jest zależny od prawdopodobieństwa objęcia lub wymaganego poziomu ufności przedziału.

5. Obliczenie niepewności standardowej

Wielkość mierzona Y zazwyczaj nie jest mierzona wprost, ale jest określana z n innych wielkości $X_1, X_2, ..., X_N$ za pomocą zależności funkcyjnej [1]

$$Y = f(X_1, X_2, ..., X_N) \tag{1}$$

Estymatę wielkości mierzonej Y, oznaczoną przez y, oblicza się z równania (1) dla estymat wejściowych $x_1, x_2, ..., x_N$ wartości N wielkości wejściowych $X_1, X_2, ..., X_N$. Stąd estymata wyjściowa y, będąca wynikiem pomiaru, jest dana jako

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_N) \tag{2}$$

Estymata odchylenia standardowego estymaty wielkości wyjściowej lub wyniku pomiaru y, nazywana złożoną niepewnością standardową i oznaczana przez $u_c(y)$, jest określana na podstawie estymat odchyleń standardowych estymat wielkości wejściowych x_i, które to estymaty są nazywane niepewnościami standardowymi i oznaczane przez $u(x_i)$.

Najlepszym osiągalnym oszacowaniem wartości oczekiwanej μ_w wielkości w, która zmienia się losowo i dla której dokonano n niezależnych obserwacji w_k w warunkach powtarzalności pomiaru, jest średnia arytmetyczna, czyli wartość przeciętna n obserwacji

$$\overline{w} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k \tag{3}$$

Dla wielkości wejściowej X_i, estymowanej na podstawie n niezależnych powtórzonych obserwacji $X_{i,k}$, średnia arytmetyczna $\overline{X}_i$ otrzymana z równania (3) jest stosowana jako estymata wielkości wejściowej x_i w równaniu (2), z którego wyznacza się wynik pomiaru y; innymi słowami $x_i = \overline{X}_i$.

Poszczególne obserwacje w_k różnią się co do wartości z powodu przypadkowych zmian wielkości wejściowych lub oddziaływań przypadkowych. Wariancja eksperymentalna obserwacji, estymująca wariancję σ^2 rozkładu prawdopodobieństwa wielkości w, jest dana wzorem

$$s^2(w_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(w_k - \overline{w})^2 \tag{4}$$

Estymata wariancji i jej dodatni pierwiastek kwadratowy $s(w_k)$, nazywany odchyleniem standardowym eksperymentalnym, charakteryzuje zmienność obserwowanych wartości w_k, lub ściślej – ich rozrzut wokół średniej $\overline{w}$.

Najlepszą estymatą wariancji średniej arytmetycznej $\sigma^2(\overline{w}) = \sigma^2/n$ jest

$$s^2(\overline{w}) = \frac{s^2(w_k)}{n} \tag{5}$$

Wariancja eksperymentalna średniej $s^2(\overline{w})$ i odchylenie standardowe eksperymentalne średniej $s(\overline{w})$, równe dodatniemu pierwiastkowi kwadratowemu z $s^2(\overline{w})$, określają liczbowo, z jaką dokładnością $\overline{w}$ estymuje wartość oczekiwaną μ_w zmiennej w i każde z nich może być użyte jako miara niepewności $\overline{w}$.

Tak więc dla wielkości wejściowej X_i, określonej z n niezależnych powtórzonych obserwacji $X_{i,k}$, niepewność standardowa $u(x_i)$ jej estymaty $x_i = \overline{X}_i$ wynosi $u(x_i) = s(\overline{X}_i)$, gdzie $s^2(\overline{X}_i)$ zostało obliczone zgodnie z równaniem (15). Dla wygody, $u^2(x_i) = s^2(\overline{X}_i)$ i $u(x_i) = s(\overline{X}_i)$ są czasami nazywane odpowiednio wariancją typu A i niepewnością standardową typu A.

Niepewność standardową y, gdzie y jest estymatą wielkości mierzonej Y, a więc wynikiem pomiaru, otrzymuje się jako odpowiednie złożenie niepewności standardowych estymat wielkości wejściowych $x_1, x_2, ..., x_n$. Złożona niepewność standardowa estymaty będzie oznaczana przez $u_c(y)$ i obliczana jako dodatni pierwiastek kwadratowy ze złożonej wariancji $u_c^2(y)$ danej jako

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) \tag{6}$$

gdzie:

f – funkcja podana w równaniu (1).

Każde $u(x_i)$ jest niepewnością standardową obliczaną tak, jak opisano powyżej. Złożona niepewność standardowa $u_c(y)$ jest estymatą odchylenia standardowego i charakteryzuje rozrzut wartości, które można w uzasadniony sposób przypisać wartości mierzonej Y.

Pochodne cząstkowe $\partial f / \partial x_i$ są równe $\partial f / \partial X_i$ policzonym dla estymat $X_i = x_i$. Pochodne te, często nazywane współczynnikami wrażliwości, opisują jak estymata wielkości wyjściowej y zmienia się wraz ze zmianami wrażliwości estymat wielkości wejściowych x_1, x_2, ..., x_N. Zwłaszcza zmiana y spowodowana przez małą zmianę Δx_i estymaty wielkości wejściowej x_i wynosi $(\Delta y)_i = (\partial f / \partial x_i)(\Delta x_i)$. Jeżeli zmiana ta jest spowodowana przez niepewność standardową estymaty x_i, to odpowiadająca jej wariancja y jest równa $(\partial f / \partial x_i)u(x_i)$. Złożoną wariancję $u_c^2(y)$ można traktować jako sumę wyrazów, z których każdy reprezentuje estymatę wariancji związanej z estymatą wielkości wyjściowej y, wynikającą z estymaty wariancji związanej z estymatą wielkości wejściowej x_i. Równanie (6) przyjmuje więc postać

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} [c_i u(x_i)]^2 \equiv \sum_{i=1}^{N} u_i^2(y) \tag{7}$$

gdzie:

$$c \equiv \partial f / \partial x_i, \qquad u_i(y) \equiv | c_i | u(x_i) \tag{8}$$

Zależność (5) i wynikające z niego równanie (6) pozostają słuszne tylko wtedy, gdy wielkości wejściowe X_i są niezależne lub nieskorelowane (chodzi tu o zmienne losowe, nie zaś o wielkości fizyczne, o które – jak się zakłada – są niezmienne). Jeżeli niektóre z X_i są skorelowane w znaczącym stopniu, ich korelacje należy wziąć pod uwagę przy obliczeniach niepewności.

Gdy wielkości wejściowe są skorelowane, to wyrażenie określające złożoną wariancję $u^2(y)$ ma postać wynikową

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) \tag{9}$$

gdzie:

x_i, x_j – estymaty X_i i X_j,
$u(x_i, x_j) = u(x_j, x_i)$ – estymata kowariancji związanej z x_i i x_j.

Stopień korelacji pomiędzy x_i i x_j charakteryzuje estymata współczynnika korelacji

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)} \tag{10}$$

gdzie:

$r(x_i, x_j) = r(x_j, x_i)$ oraz $-1 \le r(x_i, x_j) \le +1$.

Jeśli estymaty x_i, x_j są niezależne, to $r(x_i, x_j) = 0$ i zmiana jednej nie powoduje oczekiwanej zmiany drugiej.

Stosując współczynniki korelacji, które są łatwiejsze w interpretacji aniżeli kowariancje, człon z kowariancjami w równaniu (9) należy zapisać w postaci

$$2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i)u(x_j)r(x_i, x_j) \tag{11}$$

Równanie (9) po uwzględnieniu relacji (8) przyjmuje zatem postać

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} c_i, c_j u(x_i)u(x_j)r(x_i, x_j) \tag{12}$$

Rozważmy dwie średnie arytmetyczne $\overline{w}$ i $\overline{r}$, które są estymatami wartości oczekiwanych μ_w i μ_r dwóch zmiennych losowo wielkości w i r. Niech $\overline{w}$ i $\overline{r}$ będą obliczone z n niezależnych par równoczesnych obserwacji w i r, wykonanych w tych samych warunkach pomiaru. Wtedy estymatą kowariancji $\overline{w}$ i $\overline{r}$ jest

$$s(\overline{w}, \overline{r}) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(w_k - \overline{w})(r_k - \overline{r}) \tag{13}$$

gdzie w_k, r_k są poszczególnymi obserwacjami wielkości w i r, zaś $\overline{w}$ i $\overline{r}$ są obliczone z tych obserwacji według równania (3). Jeśli obserwacje są faktycznie nieskorelowane, to można oczekiwać, że obliczona kowariancja będzie bliska zeru.

Tak więc obliczona kowariancja dwóch skorelowanych wielkości wejściowych X_i i X_j, estymowanych przez średnie arytmetyczne $\overline{X}_i$ i $\overline{X}_j$, określone na podstawie par niezależnych powtórzonych, równoczesnych obserwacji, jest dana jako $u(x_i, x_j) = s(\overline{X}_i, \overline{X}_j)$, gdzie $s(\overline{X}_i, \overline{X}_j)$ oblicza się zgodnie z równaniem (46). Estymatę współczynnika korelacji $\overline{X}_i$ i $\overline{X}_j$ określa równanie (10)

$$r(x_i, x_j) = r(\overline{X}_i, \overline{X}_j) = s(\overline{X}_i, \overline{X}_j) / s(\overline{X}_i)s(\overline{X}_j) \tag{14}$$

6. Przykład

W poniższym przykładzie przedstawiono sposób wyznaczenia niepewności pomiaru oraz prezentacji wyniku dla dwóch przypadków:
- wyznaczenia sprawności odzysku ciepła rekuperatora płytowego [2],
- obliczenia strumienia wymienianego ciepła.

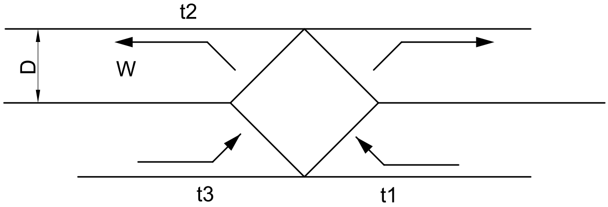
6.1. Wyznaczenie efektywności odzysku ciepła rekuperatora płytowego

Na rys. 1 oraz w tabeli 1 przedstawiono schemat rekuperatora oraz wielkości mierzone podczas wyznaczania efektywności odzysku ciepła.

Tabela 1

Wielkości mierzone

Lp.	Wielkość mierzona	Jednostka	Sposób pomiaru
1	temperatura t_1, t_2, t_3	°C	termopara
2	prędkość przepływu powietrza w	m/s	anemometr
3	średnica przewodu powietrza d	m	metr



Rys. 1. Lokalizacja punktów pomiarowych w obrębie rekuperatora
Fig. 1. Measurement points around heat exchanger

Na każdy punkt pomiarowy składa się 10 odczytów wartości wielkości mierzonej w stanie ustalonym. Analizę niepewności pomiaru przeprowadzono dla losowo wybranego punktu pomiarowego i z uwzględnieniem wszystkich odczytów (n = 10) – tab. 2 – (ograniczenie analizy do 9 stopni swobody wprowadza niepewność odchylenia standardowego średniej rzędu 24%).

Podczas obliczania odchylenia standardowego pomiarów uwzględniono tor pomiarowy każdej wielkości, przy czym:

– temperatura powietrza mierzona jest termoparami typu K (NiCr-NiAl); tolerancja klasowa przy pomiarach temperatur w granicach 0–50°C wynosi ±1,5 K; temperatura jest mierzona w trzech punktach,
– sygnał przekazywany jest do uniwersalnego miernika z dokładnością ±0,05 K,
– prędkość przepływu powietrza mierzona jest anemometrem skrzydełkowym; pomiar z dokładnością ±0,3 m/s,
– średnica przewodu jest mierzona metrem; dokładność odczytu ±0,0005 m.

W celu określenia odchylenia standardowego, wynikającego z niepewności toru pomiarowego każdej wielkości mierzonej, założono prostokątny rozkład prawdopodobieństwa i obliczano z zależności $u_i(x) = \frac{a}{\sqrt{3}}$, a złożenie kilku odchyleń jednego toru pomiarowego obliczano jako

$$u_{1,2}(x_i) = \sqrt{u_1^2(x_i) + u_2^2(x_i)} \tag{15}$$

Obliczanie odchylenia standardowego pomiaru poszczególnych wielkości:

temperatura t_1

termopara typu K $\quad u_1(t) = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{1,5}{\sqrt{3}} = 0,866$

miernik $\quad u_2(t) = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{0,05}{\sqrt{3}} = 0,029$

odchylenie średniej s (z tab. 2) $\quad u_3(t) = 0,063246$

$$u_{1,2,3}(t) = \sqrt{(0,866)^2 + (0,029)^2 + (0,063246)^2} = 0,868$$

temperatura t_2

termopara typu K $u_1(t) = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{1,5}{\sqrt{3}} = 0,866$

miernik $u_2(t) = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{0,05}{\sqrt{3}} = 0,029$

odchylenie średniej (z tab. 2) $u_3(t) = 0,091894$

$$u_{1,2,3}(t) = \sqrt{(0,866)^2 + (0,029)^2 + (0,091894)^2} = 0,871$$

temperatura t_3

termopara typu K $u_1(t) = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{1,5}{\sqrt{3}} = 0,866$

miernik $u_2(t) = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{0,05}{\sqrt{3}} = 0,029$

odchylenie średniej (z tab. 2) $u_3(t) = 0,082327$

$$u_{1,2,3}(t) = \sqrt{(0,866)^2 + (0,029)^2 + (0,082327)^2} = 0,870$$

prędkość przepływu powietrza

czujnik $u_1(t) = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{0,3}{\sqrt{3}} = 0,173$

miernik $u_2(t) = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{0,05}{\sqrt{3}} = 0,029$

odchylenie średniej (z tab. 2) $u_3(V_w) = 0,05087$

$$u_{1,2,3}(t) = \sqrt{(0,173)^2 + (0,029)^2 + (0,05087)^2} = 0,183$$

średnica przewodu powietrza

odczyt $u_1(t) = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{0,0005}{\sqrt{3}} = 0,000289$

odchylenie średniej (z tab. 2) $u_2(V_w) = 0,001687$

$$u_{1,2}(t) = \sqrt{(0,000289)^2 + (0,001687)^2} = 0,00171$$

T a b e l a 2

Wartości wielkości wejściowych otrzymane w *n* pomiarach

Numer pomiaru	Wielkości wejściowe				
k	t_1 [°C]	t_2 [°C]	t_3 [°C]	w [m/s]	d [m]
1	0,1	14,1	20,1	4,52	0,205
2	0,1	14,2	20,2	4,50	0,202
3	0,2	14,0	20,3	4,40	0,205
4	0,1	14,1	20,3	4,45	0,205
5	0,0	14,1	20,3	4,44	0,205
6	0,1	14,2	20,1	4,45	0,203
7	0,2	14,3	20,2	4,49	0,204
8	0,1	14,1	20,2	4,51	0,205
9	0,2	14,0	20,3	4,55	0,200
10	0,1	14,1	20,3	4,40	0,204
średnia arytmetyczna	$\bar{t}_1 = 0,12$	$\bar{t}_2 = 14,12$	$\bar{t}_3 = 20,23$	$\bar{w} = 4,471$	$\bar{d} = 0,2038$
eksperymentalne odchylenie standardowe średniej $\sqrt{(s)}$	$s(\bar{t}_1) = 0,063246$	$s(\bar{t}_2) = 0,091894$	$s(\bar{t}_3) = 0,082327$	$s(\bar{w}) = 0,05087$	$s(\bar{d}) = 0,001687$
odchylenie standardowe pomiaru	$s(t_1) = 0,868$	$s(t_2) = 0,866$	$s(t_3) = 0,870$	$s(w) = 0,183$	$s(d) = 0,00171$
Współczynniki korelacji (wg równania 10)					
$r(t_1,t_2) = –0,000059$ $r(t_1, t_3) = 0,000059$ $r(t_2, t_3) = –0,000531$ $r(t_3, w) = –0,003590$ $r(w, d) = –0,025396$ $r(t_1, w) = 0,001459$ $r(t_1, d) = –0,001381$ $r(t_2, w) = 0,000958$ $r(t_2, d) = 0,000154$ $r(t_3, d) = –0,000153$					

Zależność pomiędzy estymatą wielkości y_l i estymatami wejść x_i

$$\eta = f(t_1, t_2, t_3)$$

$$\eta = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1}$$

gdzie:

- t_1 – temperatura powietrza nawiewanego na wlocie do rekuperatora,
- t_2 – temperatura powietrza nawiewanego na wylocie z rekuperatora,
- t_3 – temperatura powietrza wywiewanego na wlocie do rekuperatora.

Obliczanie współczynników wrażliwości c_i

Oznaczając t_1 jako x_1, t_2 jako x_2, t_3 jako x_3, obliczono współczynniki wrażliwości c_i

$$c_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial \eta}{\partial t_1} = \frac{x_2 - 2x_1 - x_3}{(x_3 - x_1)^2} = \frac{14,2 - 2 \cdot 0,12 - 20,23}{(20,23 - 0,12)^2} = -0,0155$$

$$c_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial \eta}{\partial t_2} = \frac{1}{x_3 - x_1} = \frac{1}{20,23 - 0,12} = 0,0497$$

$$c_3 = \frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{\partial \eta}{\partial t_3} = \frac{x_1 - x_2}{(x_3 - x_1)^2} = \frac{0,12 - 14,2}{(20,23 - 0,12)^2} = -0,0348$$

Złożona niepewność standardowa $u_c^2(y_1)$ obliczona została według równania (12)

$$u_c^2(\eta) = c_1^2 \cdot u^2(x_1) + c_2^2 \cdot u^2(x_2) + c_3^2 \cdot u^2(x_3) + \\ + 2 \cdot [c_1 c_2 u(x_1) u(x_2) r(x_1, x_2) + c_2 c_3 u(x_2) u(x_3) r(x_2, x_3)]$$

$$u_c^2(\eta) = (-0,0155)^2 \cdot (0,868)^2 + (0,0497)^2 \cdot (0,866)^2 + (-0,0348)^2 \cdot (0,870)^2 + \\ + 2 \cdot [-0,0155 \cdot 0,0497 \cdot 0,868 \cdot 0,866 \cdot (-0,000059) + \\ + 0,0497 \cdot (-0,0348) \cdot 0,866 \cdot 0,870 \cdot (-0,000531)]$$

$$u_c^2(\eta) = 0,00295$$

Tabela 3

Wartość wielkości wyjściowej dla efektywności

Zależność między estymatą wielkości y i estymatami wejść x_i	Wartość estymaty y, która jest wynikiem pomiaru	Złożona niepewność standardowa $u_c(y)$ wyniku pomiaru
$y = \eta = \dfrac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1}$	$y = \eta = 0,696$	$u_c(\eta) = 0,0543$ $u_c(\eta)/\eta = 0,0781$

Ilość stopni swobody (dla analizowanego przykładu) $\nu = n - 1 = 9$.

Na podstawie estymaty y wielkości mierzonej Y i złożonej niepewności standardowej $u_c(y)$ tej estymaty wyznaczono niepewność rozszerzoną $U_p = k_p u_c(y)$, która wyznacza przedział $y - U_p \leq Y \leq y + U_p$ o określonym, wystarczająco dużym, przypisanym mu prawdopodobieństwie objęcia, czyli poziomie ufności p.

Dla rozkładu normalnego wyniku pomiaru dla poziomu ufności $p = 95\%$ przyjęto wartość $k_p = 1,96$

$$U_p = 0,0543 \cdot 1,96 = 0,1064$$

można więc napisać:

$$Y = \eta = 0,696 \pm 0,1064 \text{ (o poziomie ufności } p = 95\%)$$

6.2. Obliczenie strumienia wymienianego ciepła

$$F_r = f(t_1, t_2, w, d)$$

$$\Phi = \dot{m} \cdot c_p \cdot \Delta T = \dot{V} \cdot \rho \cdot c_p \cdot (t_2 - t_1) = \pi \cdot d^2 / 4 \cdot w \cdot \rho \cdot c_p \cdot (t_2 - t_1) = (\pi / 4 \cdot \rho \cdot c_p) \cdot w \cdot d^2 \cdot (t_2 - t_1)$$

$$\Phi = A \cdot w \cdot d^2 \cdot (t_2 - t_1)$$

gdzie:

- $\dot{m}$ – strumień masowy powietrza [kg/s]
- $\dot{V}$ – strumień objętościowy powietrza [m^3/s],
- r – gęstość powietrza [kg/m^3] (r = 1,2 kg/m^3),
- c_p – właściwa pojemność cieplna powietrza [kJ/kgK] (c_p = 1,005 kJ/kgK),
- t_1 – temperatura powietrza nawiewanego na wlocie do rekuperatora [°C],
- t_2 – temperatura powietrza nawiewanego na wylocie z rekuperatora [°C],
- A – stała, $A = \pi/4 \cdot$ r $\cdot c_p$

Obliczanie współczynników wrażliwości c_i

Oznaczając t_1 jako x_1, t_2 jako x_2, w jako x_4 oraz d jako x_5 i f jako η oraz grupując wartości stałe (lub traktowane jako stałe): A = 0,9472 obliczono współczynniki wrażliwości c_i

$$c_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi_r}{\partial t_1} = -Awd^2 = -0{,}176$$

$$c_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial \Phi_r}{\partial t_2} = Awd^2 = 0{,}176$$

$$c_4 = \frac{\partial f}{\partial x_4} = \frac{\partial \Phi_r}{\partial d} = 2Awd(t_2 - t_1) = 24{,}166$$

$$c_5 = \frac{\partial f}{\partial x_5} = \frac{\partial \Phi_r}{\partial w} = Ad^2(t_2 - t_1) = 0{,}551$$

Złożona niepewność standardowa $u_c^2(y_1)$ obliczona została według równania (12)

$$u_c^2(F_r) = c_1^2 \cdot u^2(x_1) + c_2^2 \cdot u^2(x_2) + c_4^2 \cdot u^2(x_4) + c_5^2 \cdot u^2(x_5) + 2 \cdot [c_1 c_2 u(x_1) u(x_2) r(x_1, x_2) + \\ + c_2 c_4 u(x_2) u(x_4) r(x_2, x_4) + c_4 c_5 u(x_4) u(x_5) r(x_4, x_5)]$$

$$u_c^2(F_r) = (-0{,}176)^2 \cdot 0{,}868^2 + (0{,}176)^2 \cdot 0{,}866^2 + (24{,}166)^2 \cdot 0{,}00171^2 + 0{,}551^2 \cdot 0{,}183^2 + \\ + 2 \cdot [(-0{,}176) \cdot 0{,}176 \cdot 0{,}868 \cdot 0{,}866 \cdot (-0{,}000059) + 0{,}176 \cdot 24{,}166 \cdot 0{,}866 \cdot 0{,}00171 \cdot \\ \cdot 0{,}000154 + 24{,}166 \cdot 0{,}551 \cdot 0{,}00171 \cdot 0{,}183 \cdot (-0{,}025396)]$$

$$u_c^2(F_r) = 0{,}0582$$

Tabela 4

Wartość wielkości wyjściowej dla strumienia ciepła

Zależność między estymatą wielkości y i estymatami wejść x_i	Wartość estymaty y, która jest wynikiem pomiaru	Złożona niepewność standardowa $u_c(y)$ wyniku pomiaru
$y = \Phi_r = Awd^2 \cdot (t_2 - t_1)$	$y = F_r = 2{,}462$	$u_c(F_r) = 0{,}241$ $u_c(F_r)/F_r = 0{,}098$

Ilość stopni swobody (dla analizowanego przykładu) $\nu = n - 1 = 9$

Na podstawie estymaty y wielkości mierzonej Y i złożonej niepewności standardowej $u_c(y)$ tej estymaty wyznaczono niepewność rozszerzoną $U_p = k_p u_c(y)$, która wyznacza przedział $y - U_p \leq Y \leq y + U_p$ o określonym, wystarczająco dużym, przypisanym mu prawdopodobieństwie objęcia, czyli poziomie ufności p.

Dla rozkładu normalnego wyniku pomiaru dla poziomu ufności $p = 95\%$ przyjęto wartość $k_p = 1{,}96$

$$U_p = 0{,}241 \cdot 1{,}96 = 0{,}472$$

można więc napisać

$$Y = F_r = 2{,}462 \pm 0{,}472 \text{ (o poziomie ufności } p = 95\%)$$

W powyższy sposób powinno się przeprowadzać analizę niepewności dla wszystkich pomiarów dokonywanych w wentylacji i klimatyzacji. Umożliwia to porównanie i powtarzalność poszczególnych serii pomiarowych.

Przedstawienie wyniku pomiaru w postaci pokazanej powyżej daje pogląd o jakości wyniku.

Literatura

[1] *Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik*, GUM, 1999.

[2] Schnotale J., Müller J., Skrzyniowska D., Sikorska-Bączek R., *Instalacje i urządzenia do uzdatniania powietrza dla celów wentylacji i klimatyzacji*, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2010.