MECHANIKA
CZASOPISMO TECHNICZNE
TECHNICAL TRANSACTIONS
MECHANICS
WYDAWNICTWO POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ
4-M/2011
ZESZYT 7
ROK 108
ISSUE 7
YEAR 108

RENATA FILIPOWSKA, RAFAŁ PALEJ*

METODA ITERACYJNA ROZWIĄZYWANIA ZAGADNIENIA BRZEGOWEGO Z DODATKOWYM WARUNKIEM BRZEGOWYM

AN ITERATIVE METHOD FOR THE SOLUTION OF BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH ADDITIONAL BOUNDARY CONDITION

Streszczenie

W artykule przestawiono iteracyjną metodę rozwiązywania nieliniowego zagadnienia brzegowego składającego się z równania różniczkowego drugiego rzędu oraz trzech warunków brzegowych. Metoda ta wykorzystuje wzór iteracyjny Newtona oraz funkcje wrażliwości. Rozwiązanie tego typu zagadnienia brzegowego wymaga rozwiązania (w każdej iteracji) zagadnienia początkowego w postaci układu dwóch równań różniczkowych drugiego rzędu z czterema warunkami początkowymi. Rozważania ogólne zilustrowano przykładem obliczeniowym.

Słowa kluczowe: *zagadnienie brzegowe, metoda strzałów, funkcje wrażliwości*

Abstract

The paper deals with an iterative method for nonlinear boundary value problem in the form of second order differentia equation and three boundary conditions. This method utilizes Newton's iterative formula and sensitivity functions. The solution of such boundary value problem needs the solution (in each iteration) of initial value problem in the form of two second order differential equations and four initial conditions. General deliberation has been illustrated by numerical example.

Keywords: *boundary value problem, shooting method, sensitivity functions*

* Dr inż. Renata Filipowska, dr hab. inż. Rafał Palej, prof. PK, Instytut Informatyki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska.

1. Wstęp

Wiele problemów inżynierskich wymaga rozwiązania zagadnienia brzegowego obejmującego równanie różniczkowe zwyczajne wraz z warunkami brzegowymi. Jedną z efektywnych metod rozwiązywania zagadnienia brzegowego jest metoda strzałów, polegająca na zamianie zagadnienia brzegowego na odpowiednie zagadnienie początkowe. Zazwyczaj stosuje się ją do zagadnienia brzegowego, w którym liczba warunków brzegowych jest taka sama, jak rząd równania różniczkowego. Są jednak problemy, w których liczba warunków brzegowych przewyższa rząd równania różniczkowego. Zagadnienia tego typu można rozwiązać, pod warunkiem że równanie różniczkowe zawierać będzie nieznany parametr, którego odpowiedni dobór umożliwi wyznaczenie rozwiązania spełniającego wszystkie warunki brzegowe. Niektóre problemy tego typu można rozwiązać z użyciem programów matematycznych, np. Maple™. Są jednak zagadnienia, z którymi gotowe procedury sobie nie radzą. W artykule omówiono podejście iteracyjne metody strzałów, wykorzystujące funkcje wrażliwości [4, 5]. Przedstawiono ideę tej metody w zastosowaniu do klasycznego zagadnienia brzegowego oraz jej modyfikację, pozwalającą rozwiązywać zagadnienie brzegowe z dodatkowym warunkiem brzegowym.

2. Klasyczne zagadnienie brzegowe

Typowe zagadnie brzegowe składa się z równania różniczkowego drugiego rzędu:

$$y'' = f(x, y(x), y'(x)) \tag{1}$$

oraz warunków brzegowych:

$$\begin{cases} y(a) = y_a \\ y(b) = y_b \end{cases} \tag{2}$$

Wprowadzając nieznany parametr p, kompletujący zestaw warunków początkowych, otrzymujemy zagadnienie początkowe składające się z tego samego równania:

$$y'' = f(x, y(x, p), y'(x, p)) \tag{3}$$

oraz warunków początkowych:

$$\begin{cases} y(a) = y_a \\ y(a) = p \end{cases} \tag{4}$$

W równaniu (3) wyraźnie zaznaczono formalną zależność rozwiązania zarówno od zmiennej x, jak i parametru p. Metoda strzałów polega na sukcesywnym rozwiązywaniu zagadnienia początkowego z odpowiednio zmienianym parametrem p, aby rozwiązanie na prawym końcu spełniało z zadaną dokładnością warunek:

$$y(b, p) = y_b \tag{5}$$

Związek (5) można uważać za nieliniowe równanie ze względu na parametr p z zastrzeżeniem, że na ogół nie jest znana analityczna postać funkcji $y(b, p)$. Równanie to rozwiązuje się zazwyczaj metodą Newtona, dla której wzór iteracyjny ma postać [1, 2]:

$$p_{k+1} = p_k - \frac{y(b, p) - y_b}{z(b, p_k)} \tag{6}$$

zaś funkcja wrażliwości $z(x, p)$ zdefiniowana jest związkiem:

$$z(x, p) = \frac{\partial}{\partial p} y(x, p) \tag{7}$$

Funkcja ta ma spełniać równanie otrzymane w wyniku różniczkowania równania (3) względem parametru p:

$$z'' = f_y(x, y(x, p), y'(x, p))z(x, p) + f_{y'}(x, y(x, p), y'(x, p))z'(x, p), \tag{8}$$

gdzie:

f_y i $f_{y'}$ – oznaczają pochodne cząstkowe prawej strony równania (3) odpowiednio względem y i y'.

Różniczkując ponadto względem parametru p warunki początkowe (4) otrzymamy:

$$\begin{cases} z(a) = 0 \\ z'(a) = 1 \end{cases} \tag{9}$$

Wyznaczenie kolejnego przybliżenia parametru p ze wzoru (6) wymaga każdorazowo rozwiązania zagadnienia początkowego składającego się z układu równań różniczkowych (3) i (8) oraz warunków początkowych (4) i (9).

3. Zagadnienie brzegowe z dodatkowym warunkiem brzegowym

Czasami można spotkać się z zagadnieniem brzegowym składającym się z równania różniczkowego drugiego rzędu oraz trzech warunków brzegowych. Wyróżnić tu można dwa przypadki: gdy zadane są dwa warunki na lewym końcu i jeden na prawym lub gdy zadany jest jeden warunek na lewym końcu i dwa na prawym. W obu przypadkach równanie różniczkowe powinno zawierać nieznany parametr, podlegający wyznaczeniu w trakcie jego rozwiązywania.

3.1. Przypadek dwóch warunków na lewym końcu i jednego na prawym

Weźmy pod uwagę zagadnienie brzegowe składające się z równania różniczkowego zawierającego nieznany parametr p w postaci:

$$y'' = f(x, y(x, p), y'(x, p), p) \tag{10}$$

oraz następujących warunków brzegowych:

$$\begin{cases} y(a) = y_a \\ y'(a) = y'_a \\ y(b) = y_b \end{cases} \tag{11}$$

Podobnie jak w przypadku klasycznego zagadnienia brzegowego można zastosować wzór iteracyjny Newtona (6), z tą różnicą, że funkcja wrażliwości $z(x, p)$, zdefiniowana wzorem (7), ma spełniać równanie, otrzymane w wyniku różniczkowania równania (10) względem parametru p, w postaci:

$$
\begin{aligned}
z'' = {} & f_y(x, y(x,p), y'(x,p), p) z(x,p) + \\
& + f_{y'}(x, y(x,p), y'(x,p), p) z'(x,p) + f_p(x, y(x,p), y'(x,p), p),
\end{aligned}
\tag{12}
$$

gdzie:

$f_y, f_{y'}, f_p$ – oznaczają pochodne cząstkowe prawej strony równania (10) odpowiednio względem y, y' i p.

Różniczkowanie dwóch pierwszych warunków brzegowych (11) względem parametru p dostarcza warunki początkowe dla równania (12) w postaci:

$$
\begin{cases} z(a) = 0 \\ z'(a) = 0 \end{cases}
\tag{13}
$$

Tym razem wyznaczenie kolejnego przybliżenia parametru p ze wzoru (6) wymaga każdorazowo rozwiązania zagadnienia początkowego składającego się z układu równań różniczkowych (10) i (12) oraz dwóch pierwszych warunków (11) i warunków (13).

3.2. Przypadek jednego warunku na lewym końcu i dwóch na prawym

Warunki brzegowe dla tego przypadku można zapisać w postaci

$$
\begin{cases} y(a) = y_a \\ y(b) = y_b \\ y'(b) = y'_b \end{cases}
\tag{14}
$$

W wyniku różniczkowania dwóch ostatnich warunków brzegowych (14) względem parametru p otrzymamy:

$$
\begin{cases} z(b) = 0 \\ z'(b) = 0 \end{cases}
\tag{15}
$$

Tym razem układ równań (10) i (12) należy całkować wstecz, wobec czego warunkami początkowymi będą dwa ostatnie warunki (14) i warunki (15). Ponadto wzór iteracyjny Newtona będzie mieć postać:

$$
p_{k+1} = p_k - \frac{y(a,p) - y_a}{z(a,p_k)}
\tag{16}
$$

Jak widać, sposób rozwiązywania zagadnienia brzegowego w obu przypadkach jest bardzo podobny, gdyż różni się formalnie wzorem iteracyjnym i warunkami początkowymi podczas, gdy układ równań różniczkowych jest taki sam.

4. Przykład obliczeniowy

Przedstawiona w artykule metoda zostanie zilustrowana zagadnieniem brzegowym składającym się z równania różniczkowego, opisującego związek pomiędzy reakcją normalną krzywej, wzdłuż której zsuwa się punkt materialny, a jej zarysem [3]:

$$y'' = \frac{p\left\{1+[y'(x,p)]^2\right\}^{\frac{2}{3}} - [y'(x,p)]^2 - 1}{v_0^2 + 2[h - y(x,p)]}$$

oraz trzech warunków brzegowych:

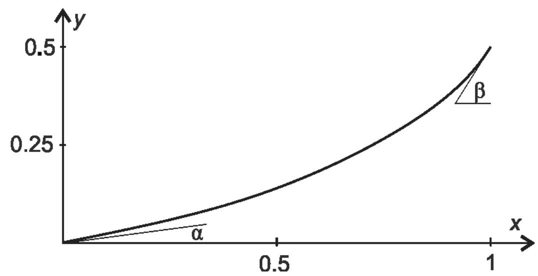
$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = \mathrm{tg}\alpha \\ y(1) = h \end{cases}$$

gdzie:

p – bezwymiarowa wartość reakcji,
v_0 – bezwymiarowa prędkość początkowa,
h – bezwymiarową wysokość punktu startowego.

Z warunków brzegowych wynika, że poszukiwana krzywa ma przechodzić przez punkty o współrzędnych [0, 0] i [1, h], a styczna do niej w punkcie [0, 0] ma być nachylona do osi x pod kątem α. Przyjmując następujące dane liczbowe: α = 10°, h = 0,5 i v_0 = 0,5, i startując z wartością parametru p_1 = 1,4, otrzymamy po 4 iteracjach p_5 = 1,4109999816.

Całkując zagadnienie początkowe utworzone z równania różniczkowego i dwóch pierwszych warunków brzegowych, łatwo sprawdzić, że rozwiązanie spełnia trzeci warunek dla wyznaczonej wartości parametru p. Wykres rozwiązania analizowanego zagadnienia brzegowego przedstawiony jest na rysunku 1.



Rys. 1. Wykres rozwiązania zagadnienia brzegowego
Fig. 1. The plot of the solution of boundary value problem

Z otrzymanego rozwiązania wynika, że styczna do krzywej w punkcie [1, h] jest nachylona do osi x pod kątem β = 62,74°. Rozwiązując zagadnienie brzegowe składające się z tego samego równania oraz zestawu warunków brzegowych, zawierającego pierwszy i trzeci dotychczasowy warunek oraz warunek na prawym końcu w postaci $y'(1) = \mathrm{tg}\beta$, otrzymamy, korzystając z podejścia omówionego w punkcie 3.2, identyczne rozwiązanie.

5. Wnioski

Przedstawiona w artykule metoda pozwala wyznaczać przybliżone rozwiązanie nieliniowego zagadnienia brzegowego z nadmiarowym warunkiem brzegowym, pod warunkiem że równanie różniczkowe zawiera nieznany parametr. Istnienie rozwiązania uzależnione jest, podobnie jak w przypadku klasycznego zagadnienia brzegowego, od wartości liczbowych określających warunki brzegowe. Startując z próbną wartością parametru *p* zbliżoną do wartości dokładnej, ciąg przybliżeń cechować się będzie zbieżnością kwadratową.

L i t e r a t u r a

[1] F a i r e s J.D., B u r d e n R., *Numerical Methods*, Wyd. 3, Brooks/Cole, Belmont 2003.

[2] K i n c a i d D., C h e n e y W., *Analiza numeryczna*, WNT, Warszawa 2006.

[3] P a l e j R., F i l i p o w s k a R., *Zagadnienie krzywej płaskiej o stałej reakcji normalnej*, Czasopismo Techniczne, z. 14-M/2005, Wydawnictwo PK, Kraków 2005.

[4] P a l e j R., K r o w i a k A., *Metody obliczeniowe wspomagane programem Maple*, Wydawnictwo PK, Kraków 2009.

[5] R a o S.S., *Applied Numerical Methods for Engineers and Scientists*, Prentice Hall, Upper Saddle River 2002.