

ŚRODOWISKO

CZASOPISMO TECHNICZNE
TECHNICAL TRANSACTIONS
ENVIRONMENTAL ENGINEERING

WYDAWNICTWO
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

2-Ś/2011
ZESZYT 6
ROK 108
ISSUE 6
YEAR 108

WOJCIECH Z. CHMIEŁOWSKI, RENATA URYGA*

STEROWANIE SYSTEMEM ZBIORNIKÓW
RETENCYJNYCH Z UWZGLĘDNIENIEM PRZERZUTÓW
MIĘDZYZBIORNIKOWYCH PRZY OKREŚLONYCH
WARUNKACH NA TRAJEKTORIACH STANÓW.
CZĘŚĆ I

CONTROL OF A SYSTEM OF STORAGE RESERVOIRS
UNDER THE DETERMINED CONDITIONS ON STATE
TRAJECTORY AND WATER TRANSFERS
AMONG RESERVOIRS.
PART I

Streszczenie

Artykuł zawiera sformułowanie i rozwiązanie problemu optymalizacyjnego dotyczącego sterowania odpływami z systemu zbiorników retencyjnych, które zaopatrują w wodę odbiorców. W systemie dopuszczono możliwość przerzutów wody między zbiornikami systemu. W ustalonym horyzoncie optymalizacji przyjęto sztywne warunki początkowe i związane równaniem warunki końcowe na trajektoriach stanów.

Słowa kluczowe: gospodarka wodna, system zbiorników retencyjnych, optymalizacja, sterowanie

Abstract

The paper presents formulation and optimal solution to the problem dealing with control of outflow from a system of storage reservoirs supplying users with water. Water transfers among reservoirs are allowed in the system. In a given time horizon there were assumed rigid initial conditions for reservoir capacity and final conditions for state trajectories which are then interrelated by the equation.

Keywords: water management, water reservoirs system, optimization, control

* Dr hab. inż. Wojciech Z. Chmielowski, prof. PK, mgr inż. Renata Uryga, doktorantka, Instytut Inżynierii i Gospodarki Wodnej, Wydział Inżynierii Środowiska, Politechnika Krakowska.

1. Wstęp

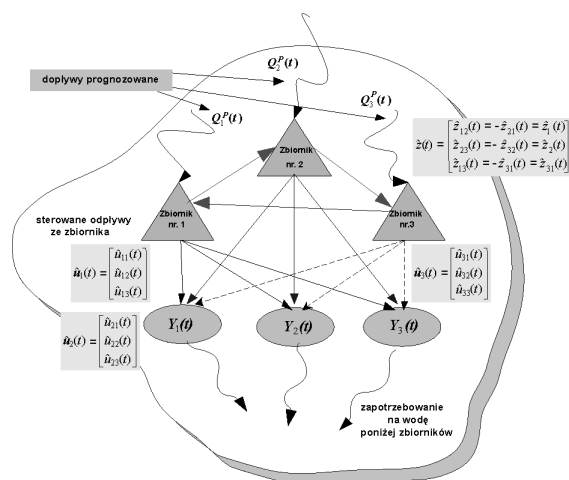
Krokiem w kierunku zapisu i analizy sterowania systemem wodnogospodarczym o uogólnionej strukturze połączeń między elementami systemu, będzie prześledzenie rozwiązania w systemie o powiązanej strukturze i określonej ilości elementów zarówno w odniesieniu do zbiorników, jak również do odbiorców wody z systemu, przy uwzględnieniu następujących warunków na trajektoriach stanów zbiorników

- LWU – lewe warunki na trajektoriach ustalone,
- PWZ – prawe warunki na trajektoriach związane równaniem,
- CU – czas optymalizacji ustalony.

Rysunek 1 przedstawia system trzech zbiorników, które wzajemnie dostarczają wodę do niezależnych odbiorców. Warunki końcowe na trajektoriach stanów zbiorników związane są przykładowym równaniem. Równanie to wymusza globalną końcową ilość wody w systemie po czasie optymalizacji.

Ponieważ zbiorniki dostarczają wodę jednocześnie do trzech odbiorców do dalszego opisu systemu, konieczne jest wprowadzenie funkcji zaangażowania zbiorników w realizację funkcji zapotrzebowania na wodę $Y_j(t)$, $j=1, \dots, 3$, $\forall t \in [t_0, T]$ dokonujących rozdziału (dla każdej chwili czasu) funkcji $Y_j(t)$ między zbiorniki systemu:

$$Y_j(t) - \sum_{i=1}^3 b_{i,j}(t) \cdot Y_i(t) = 0, \quad j=1, \dots, 3 \quad \forall t \in [t_0, T] \quad (1)$$



Rys. 1. System trzech zbiorników, trzech odbiorców wody (LWU, PWZ, CU)

Fig. 1. System of three reservoirs and three water users (LWU, PWZ, CU)

2. Czas optymalizacji ustalony (CU)

Trajektorie optymalne stanu zbiorników i odpływu ze zbiorników (sterownia) zostaną wyznaczone przez rozwiązanie następującego zadania optymalizacji dynamicznej, której koniecznymi elementami są:

to diagonalna macierz blokowa o wyrazach będących macierzami diagonalnymi, których elementami są funkcje zaangażowania zbiorników $i = 1, \dots, 3$ w realizację kolejnych funkcji zapotrzebowania $Y_j(t), j = 1, \dots, 3$ [m^3/s],

3.

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & Y_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & Y_3(t) \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} Y_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & Y_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & Y_3(t) \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} Y_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & Y_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & Y_3(t) \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

jest diagonalną macierzą blokową o wyrazach będącymi macierzami diagonalnymi, których elementami są obowiązujące w systemie funkcje zapotrzebowania $Y_j(t), j = 1, \dots, 3$ [m^3/s],

$$4. \quad \mathbf{u}(t)^T = [[u_{11}(t) \ u_{12}(t) \ u_{13}(t)], [u_{21}(t) \ u_{22}(t) \ u_{23}(t)], [u_{31}(t) \ u_{32}(t) \ u_{33}(t)]]$$

to wektor blokowy o wyrazach będących wektorami, których elementami są sterowane odpływy ze zbiornika $i = 1, \dots, 3$ do aglomeracji $j = 1, \dots, 3$ [m^3/s],

$$5. \quad \mathbf{z}(t)^T = [(z_{12}(t) = -z_{21}(t) = z_1(t)) \ (z_{23}(t) = -z_{32}(t) = z_2(t)) \ (z_{31}(t) = -z_{13}(t) = z_3(t))]$$

jest wektorem przerzutów międzyzbiornikowych, przy założeniu, że koszt przerzutu między zbiornikami jest jednakowy w obie strony przerzutu:

6.

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{13} \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} a_{31} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

to dodatnio określona diagonalna macierz blokowa o wyrazach będących macierzami diagonalnymi, których elementami są współczynniki wag powiązane z podcałkową

częścią wskaźnika jakości, która dotyczy zapotrzebowania stawianego przed systemem zbiorników,

$$7. \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \end{bmatrix}$$

jest dodatnio określoną diagonalną macierzą której elementami są współczynniki wag powiązane z podcałkową częścią wskaźnika jakości odpowiedzialną za koszt przerzutów międzyzbiornikowych.

$$8. \quad \mathbf{1}^T = [[1 \ 1 \ 1], [1 \ 1 \ 1], [1 \ 1 \ 1]]$$

to blokowy wektor jednostkowy.

$$9. \quad \mathbf{Q}^P(t - \boldsymbol{\tau}^P(t))^T = \left[Q_1^P(t - \tau_1^P(t)) \quad Q_2^P(t - \tau_2^P(t)) \quad Q_3^P(t - \tau_3^P(t)) \right]$$

jest wektorem [3*1] prognozowanych dopływów do zbiorników [m³/s],

$$10. \quad \mathbf{x}_0^T = [x_{1_0} \quad x_{2_0} \quad x_{3_0}]$$

to wektor [3*1] początkowych wypełnień zbiorników [m³],

$$11. \quad \dot{\mathbf{x}}(t)^T = [dx_1/dt \quad dx_2/dt \quad dx_3/dt]$$

jest wektorem [3*1] pochodnych stanu zbiorników (zmiana objętości wody w zbiornikach w jednostce czasu) [m³/s] oraz

$$12. \quad \tau_i^P(t), \quad i = 1, \dots, 3$$

to opóźnienie czasowe transformacji prognozowanego dopływu przez zbiornik.

13. Macierz \mathbf{S}_1 jest diagonalną blokową macierzą strukturalną [3*3] powiązaną z wektorem sterowań o wyrazach w postaci transponowanych wektorów zero jedynkowych. Wartość „1” na miejscu s_{ij} , oznacza połączenie zbiornika nr i z aglomeracją nr j . Brak takowego połączenia reprezentowane jest wartością 0:

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} [s_{11} \ s_{12} \ s_{13}] & 0 & 0 \\ 0 & [s_{21} \ s_{22} \ s_{23}] & 0 \\ 0 & 0 & [s_{31} \ s_{32} \ s_{33}] \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} [1 \ 1 \ 1] & 0 & 0 \\ 0 & [1 \ 1 \ 1] & 0 \\ 0 & 0 & [1 \ 1 \ 1] \end{bmatrix}$$

14. Macierz \mathbf{S}_2 jest macierzą strukturalną [3*3] powiązaną z wektorem sterowanych przerzutów międzyzbiornikowych. Elementy macierzy przyjmują wartości (1, -1, 0). Wartość 1 wskazuje przerzut ze zbiornika, np. 1 do zbiornika 2, wartość -1 związa-

na jest z przerzutem wody ze zbiornika 2 do 1, wartość 0 wskazuje, iż nie ma powiązania między zbiornikiem 1 i 2.

15. Dla przypadku z rys. 1 macierz \mathbf{S}_2 przyjmuje postać:

$$\mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

16. Macierz \mathbf{S} to diagonalna macierz blokowa o wyrazach będących macierzami diagonalnymi, których elementami są elementy s_{ij} . Macierzą \mathbf{S} jest wynik następującego przekształcenia: $\mathbf{S} = (\mathbf{S}_1^T \cdot \mathbf{S}_1) * \mathbf{I}$, (znak * to mnożenie tablicowe), a ponieważ elementy macierzy \mathbf{S}_1 przyjmują jedynie wartość 0 lub 1, również elementy na diagonalach macierzy \mathbf{S} mają te same wartości.

Ograniczenia sterowania (odpływów ze zbiorników) i stanu zbiorników

Ograniczenia sterowania przyjmują postać:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\min}(t)_{(3 \times 1_{(3 \times 1)})} &\leq \mathbf{u}(t)_{(3 \times 1_{(3 \times 1)})} \leq \mathbf{u}_{\max}(t)_{(3 \times 1_{(3 \times 1)})} \\ \mathbf{z}_{\min}(t)_{(3 \times 1)} &\leq \mathbf{z}(t)_{(3 \times 1)} \leq \mathbf{z}_{\max}(t)_{(3 \times 1)} \end{aligned} \quad (5)$$

która oznacza, że na każdy z elementów wektora sterowań $u_{i,j}$, $i = 1, \dots, 3$, $j = 1, \dots, 3$, i przerzutów $z_i(t)$, $i = 1, \dots, 3$, nałożone są dolne i górne ograniczenia przedziałowe uniemożliwiające przekroczenie granicznych niskich i granicznych wysokich wartości odpływów, obowiązujących w przypadku dostarczania wody ze zbiornika i do aglomeracji j , przerzutów wody między zbiornikami oraz przy respektowaniu ograniczeń stanu zbiorników. Nadmienić należy, iż w przypadku systemu wielozbiornikowego ewentualne zrzuć wody, wynikające z przekroczeń stanu zbiorników, możliwe są przy uwzględnieniu wszystkich sterowań (odpływów) danego zbiornika.

Ograniczenia stanu zbiorników przyjmują postać:

$$\mathbf{x}_d(t) \leq \mathbf{x}(t) \leq \mathbf{x}_g(t) \quad (6)$$

Należy liczyć się również z możliwością, w której jednoczesne zachowanie ograniczeń sterowania i stanu w całym horyzoncie optymalizacji jednego lub kilku zbiorników nie jest możliwe. Wówczas, traktując taką sytuację jako awaryjną, zaproponować można wyłączenie danych zbiorników z systemu, przechodząc w nich na sterowanie w warunkach awaryjnych (powódź, susza), a dla pozostałych w systemie zbiorników ponownie rozwiązać proponowane zadanie optymalizacji lub zrezygnować z realizacji sterowania według proponowanego modelu optymalizacyjnego w odniesieniu do całego systemu, przedstawiając algorytm sterowania systemem na algorytm sterowania w warunkach awaryjnych.

Końcowe wypełnienia zbiorników muszą spełniać prawy warunek na trajektoriach stanów w postaci np.:

$$h(T): \mathbf{S}_3 \cdot \mathbf{x}(T) - D = 0 \quad (7)$$

gdzie:

$\mathbf{S}_3 = [s_{3,11} \ s_{3,12} \ s_{3,13}]$ wektor współczynników odpowiadający stanom zbiorników w chwili T kończącej optymalizację,

$\mathbf{x}(T)^T = [x_1(T) \ x_2(T) \ x_3(T)]$ stany zbiorników w chwili T kończącej optymalizację,

D – sumaryczna objętość wody w zbiornikach systemu w chwili T .

W praktyce równanie to oznacza, że w chwili kończącej optymalizację sumaryczna objętość wody w zbiornikach systemu musi być równa ilości D , zaś osiągnięcie tej objętości nastąpi przy minimalnej wartości wskaźnika jakości.

Przedstawione poniżej rozwiązanie zadania optymalizacji pozwala określić

- wektor sterowań $\hat{\mathbf{u}}(t)_{(3*1)_{(+)}}$, $\forall t \in [t_0, T]$ (sterowanych odpływów ze zbiorników do aglomeracji),
- wektor przerzutów międzyzbiornikowych $\hat{\mathbf{z}}(t)_{(3*1)}$, $\forall t \in [t_0, T]$,
- które zminimalizują wskaźnik jakości (1) przy równaniu stanu systemu (2), (3) i ograniczeniach (4), (5), (6)

Dla wektora prognozowanych dopływów do systemu sens fizyczny wskaźnika jakości (1) łączy trzy zadania:

- uzyskanie (na koniec horyzontu optymalizacji T) wektora wypełnień zbiorników $\hat{\mathbf{x}}(T)$ spełniającego równanie (7),
- zapewnienie takiego wektora odpływów ze zbiorników $\hat{\mathbf{u}}(t)_{(+)}$, $\forall t \in [t_0, T]$, który w sposób minimalny odbiegać będzie od wektora, którego elementami są częściowe zapotrzebowania na wodę przypadające na zbiorniki systemu $\mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{1}$, $t \in [t_0, T]$,
- zrealizowanie powyższych celów przy ewentualnych przerzutach międzyzbiornikowych i w aspekcie minimalnej wartości ww. wskaźnika.

Rozwiązanie zadania optymalizacji

Funkcja Hamiltona dla układu równań (1), (2), (3) przyjmuje postać:

$$H = -f_0 + \boldsymbol{\eta}^T \cdot \mathbf{f}$$

$$H = -0,5 \cdot \left\{ [\mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{1} - \mathbf{u}(t)]_{(+)}^T \cdot \mathbf{A}_1 \cdot [\mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{1} - \mathbf{u}(t)]_{(+)} + \mathbf{z}^T(t) \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{z}(t) \right\} + \boldsymbol{\eta}(t)^T \cdot [\mathbf{Q}^P(t - \tau^P(t)) - \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{u}(t) + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{z}(t)] \quad (8)$$

gdzie:

- f_0 – funkcja podcałkowa wskaźnika (1),
- \mathbf{f} – równanie stanu zbiornika (2),
- $\boldsymbol{\eta}(t)_{(3*1)}$ – zmienna sprzężona, wektor $[3*1]$.

Układ równań dla funkcji Hamiltona (8) przedstawiono poniżej:

$$1. \left[(\nabla_{\mathbf{u}} H)_{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}} \right]^T = \mathbf{0}$$

$$\hat{\mathbf{u}}(t)_{(+)} = \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{1} - \mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{S}_1^T \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}}(t) \quad (9)$$

w rozwiniętej postaci:

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_{11}(t) \\ \hat{u}_{12}(t) \\ \hat{u}_{13}(t) \\ \hat{u}_{21}(t) \\ \hat{u}_{22}(t) \\ \hat{u}_{23}(t) \\ \hat{u}_{31}(t) \\ \hat{u}_{32}(t) \\ \hat{u}_{33}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & 0 & 0 \\ 0 & b_{12}(t) & 0 \\ 0 & 0 & b_{13}(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{21}(t) & 0 & 0 \\ 0 & b_{22}(t) & 0 \\ 0 & 0 & b_{23}(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{31}(t) & 0 & 0 \\ 0 & b_{32}(t) & 0 \\ 0 & 0 & b_{33}(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Y_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & Y_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & Y_3(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Y_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & Y_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & Y_3(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Y_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & Y_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & Y_3(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} s_{11} & 0 & 0 \\ 0 & s_{12} & 0 \\ 0 & 0 & s_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} s_{21} & 0 & 0 \\ 0 & s_{22} & 0 \\ 0 & 0 & s_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} s_{31} & 0 & 0 \\ 0 & s_{32} & 0 \\ 0 & 0 & s_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} s_{11} & 0 & 0 \\ s_{12} & 0 & 0 \\ s_{13} & 0 & 0 \\ 0 & s_{21} & 0 \\ 0 & s_{22} & 0 \\ 0 & s_{23} & 0 \\ 0 & 0 & s_{31} \\ 0 & 0 & s_{32} \\ 0 & 0 & s_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix}$$

$$2. \left[(\nabla_z H)_{\hat{u}, \hat{z}, \hat{x}, \hat{\eta}} \right]^T = \mathbf{0}$$

$$\hat{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}_2^{-1} \cdot \mathbf{S}_2^T \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}}(t) \quad (10)$$

w rozwiniętej postaci:

$$\begin{bmatrix} z_1(t) = (z_{12}(t) = -z_{21}(t)) \\ z_2(t) = (z_{23}(t) = -z_{32}(t)) \\ z_3(t) = (z_{31}(t) = -z_{13}(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \hat{\eta}_1(t) \\ \hat{\eta}_2(t) \\ \hat{\eta}_3(t) \end{bmatrix}$$

$$3. \left[(\nabla_{\boldsymbol{\eta}} H)_{\hat{u}, \hat{z}, \hat{x}, \hat{\eta}} \right]^T = \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Q}^P(t - \tau^P(t)) - \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{u}(t) + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{z}(t) \quad (11)$$

$$4. \left[-(\nabla_x H)_{\hat{u}, \hat{z}, \hat{x}, \hat{\eta}} \right]^T = \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}(t)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}(t) = \mathbf{0} \quad (12)$$

Dopuszczalne przesunięcia warunku (7) muszą spełniać zależność:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h(T)}{\partial x_1(T)} & \frac{\partial h(T)}{\partial x_2(T)} & \frac{\partial h(T)}{\partial x_3(T)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta x_1(T) \\ \delta x_2(T) \\ \delta x_3(T) \end{bmatrix} = 0, \quad [\nabla_{x(T)} h(T)] \cdot \delta x(T) = 0 \quad (13)$$

Warunek transversalności jest spełniony, jeżeli:

$$\begin{aligned} -(\eta_1(T) \cdot \delta x_1(T) + \eta_2(T) \cdot \delta x_2(T) + \eta_3(T) \cdot \delta x_3(T)) &= 0 \\ -\boldsymbol{\eta}(T)^T \cdot \delta \mathbf{x}(T) &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Postępując się równaniami od (9) do (14), wyznaczamy wektor trajektorii sterowań (odpływów ze zbiorników) $\hat{\mathbf{u}}(t)$, wektor przerzutów międzyzbiornikowych $\hat{\mathbf{z}}(t)$ oraz wektor trajektorii stanów $\hat{\mathbf{x}}(t)$.

W pierwszej kolejności ustalimy zależność między zmiennymi sprzężonymi, wynikającą z równań (13) i (14), konieczną w związku z równaniem (7) na trajektoriach stanów.

Z równania (13) otrzymujemy:

$$\delta x_1(T) = - \left(\frac{\partial h(T) / \partial x_2(T)}{\partial h(T) / \partial x_1(T)} \right) \cdot \delta x_2(T) - \left(\frac{\partial h(T) / \partial x_3(T)}{\partial h(T) / \partial x_1(T)} \right) \cdot \delta x_3(T) \quad (15)$$

Podstawiamy zależność (15) do równania (14), otrzymując w konsekwencji:

$$\boldsymbol{\eta}(T) = \begin{bmatrix} 1 \\ \left(\frac{\partial h(T) / \partial x_2(T)}{\partial h(T) / \partial x_1(T)} \right) \\ \left(\frac{\partial h(T) / \partial x_3(T)}{\partial h(T) / \partial x_1(T)} \right) \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{\eta}_1(T), \quad \boldsymbol{\eta}(T) = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\eta}_1(T) \quad (16)$$

Dla ustalonego czasu końcowego T współczynniki wektora \mathbf{E} przyjmują wartości stałe w czasie.

Całkując równanie (12), otrzymuje się:

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}(t) = \mathbf{C} \quad (17)$$

Po scałkowaniu równania (11) otrzymuje się równanie opisujące ogólną postać wektora trajektorii stanu:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \int_{t_0}^t [\mathbf{Q}^P(\xi - \tau^P(\xi)) - \mathbf{S}_1 \cdot \hat{\mathbf{u}}(\xi)_{(+)} + \mathbf{S}_2 \cdot \hat{\mathbf{z}}(\xi)] d\xi + \mathbf{C}_2 \quad (18)$$

Podstawiamy wyrażenie (16) do równania (9), a wówczas wektor sterowań wyraża się równaniem:

$$\hat{\mathbf{u}}(t)_{(+)} = \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{1} - \mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{S}_1^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{C}_1 \quad (19)$$

Podstawiamy wyrażenie (16) do równania (10), a wówczas wektor sterowanych przerzutów międzyzbiornikowych wyraża się równaniem:

$$\hat{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}_2^{-1} \cdot \mathbf{S}_2^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{C}_1 \quad (20)$$

gdzie:

\mathbf{C}_1 – jest pierwszym elementem wektora \mathbf{C} .

Następnie dążymy do wyznaczenia wektora stanów

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \int_{t_0}^t \left\{ \mathcal{Q}^P(\xi - \tau^P(\xi)) + \right. \\ \left. - \{ \mathbf{S}_1 \cdot [\mathbf{B}(\xi) \cdot \mathbf{Y}(\xi) \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{1} - \mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{S}_1^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{C}_1] - \mathbf{S}_2 \cdot [\mathbf{A}_2^{-1} \cdot \mathbf{S}_2^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{C}_1] \} \right\} d\xi + \mathbf{C}_2 \quad (21)$$

$$t = t_0, \Rightarrow \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 = \mathbf{C}_2 \quad (22)$$

Po przegrupowaniu i po dokonaniu całkowania składnika stałego w czasie oraz dla $t = T$, wektor trajektorii stanu przyjmuje postać:

$$\hat{\mathbf{x}}(T) = \int_{t_0}^T \{ \mathcal{Q}^P(\xi - \tau^P(\xi)) - \mathbf{S}_1 \cdot [\mathbf{B}(\xi) \cdot \mathbf{Y}(\xi) \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{1}] \} d\xi + \\ + (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{S}_1^T + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{A}_2^{-1} \cdot \mathbf{S}_2^T) \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{C}_1 \cdot (T - t_0) + \mathbf{x}_0 \quad (23)$$

W następnej kolejności, wykorzystując warunek (7), otrzymuje się wyrażenie, z którego wyznaczyć można stałą \mathbf{C}_1 :

$$\mathbf{S}_3 \cdot \left\{ \int_{t_0}^T \{ \mathcal{Q}^P(\xi - \tau^P(\xi)) - \mathbf{S}_1 \cdot [\mathbf{B}(\xi) \cdot \mathbf{Y}(\xi) \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{1}] \} d\xi + \right. \\ \left. + (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{S}_1^T + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{A}_2^{-1} \cdot \mathbf{S}_2^T) \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{C}_1 \cdot (T - t_0) + \mathbf{x}_0 \right\} - D = 0 \quad (24)$$

$$\mathbf{C}_1 = \left[D - \mathbf{S}_3 \cdot \left\{ \int_0^T \{ \mathcal{Q}^P(t - \tau^P(t)) - \mathbf{S}_1 \cdot [\mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{1}] \} dt + \mathbf{x}_0 \right\} \right] \cdot \\ \cdot \left[\mathbf{S}_3 \cdot (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{S}_1^T + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{A}_2^{-1} \cdot \mathbf{S}_2^T) \cdot \mathbf{E} \cdot (T - t_0) \right]^{-1} \quad (25)$$

Dalsze rozwiązanie nie przedstawia trudności:

- podstawiamy (25) do (19) oraz (20), otrzymujemy wektor sterowań optymalnych w systemie (odpływów ze zbiorników) $\hat{\mathbf{u}}(t)$ oraz wektor optymalnych przerzutów międzyzbiornikowych $\hat{\mathbf{z}}(t)$,
- następnie podstawiamy $\hat{\mathbf{u}}(t)$ i $\hat{\mathbf{z}}(t)$ do (18), uzyskując wzór na wektor trajektorii stanów zbiorników $\hat{\mathbf{x}}(t)$, które spełniają końcowy warunek (7) na trajektoriach stanów,
- minimalną wartość wskaźnika jakości otrzymujemy, podstawiając $\hat{\mathbf{u}}(t)$, $\hat{\mathbf{z}}(t)$ do (1).

Hipotetyczny scenariusz zdarzeń. Przykład 1

Przyjmujemy następujące założenia:

– początkowe stany zbiorników:

$$x_0^T = [30 \ 30 \ 10] \text{ [m}^3\text{]},$$

– końcowe stany zbiorników związane równanie:

$$h(T): S_3 \cdot x(T) - 140 = 0 \quad S_3 = [2 \ 3 \ 4],$$

– dopływy do zbiorników:

$$Q(t)^T = [1(t) \ 2(t) \ 3(t)] \text{ [m}^3\text{/s]},$$

– zapotrzebowanie na wodę poniżej zbiorników:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} [*] & 0 & 0 \\ 0 & [*] & 0 \\ 0 & 0 & [*] \end{bmatrix} \text{ [m}^3\text{/s]}, \quad [*] = \begin{bmatrix} 2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 3(t) & 0 \\ 0 & 0 & 4(t) \end{bmatrix},$$

– funkcje zaangażowania zbiorników w realizację funkcji zapotrzebowania:

$$B(t) = \begin{bmatrix} [1] & 0 & 0 \\ 0 & [2] & 0 \\ 0 & 0 & [3] \end{bmatrix}, \quad [1] = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} (t),$$

$$[2] = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} (t), \quad [3] = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} (t),$$

– macierz współczynników wag:

$$A = \begin{bmatrix} [*] & 0 & 0 \\ 0 & [*] & 0 \\ 0 & 0 & [*] \end{bmatrix}, \quad [*] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

– macierz strukturalna

$$S_1 = \begin{bmatrix} [*] & 0 & 0 \\ 0 & [*] & 0 \\ 0 & 0 & [*] \end{bmatrix} \quad [*] = [1 \ 1 \ 1]$$

(pełna struktura połączeń)

– macierz strukturalna

$$S_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

– czas początkowy $t_0 = 0$ [s], czas końcowy $T = 10$ [s].

Rozwiązanie:

1. wg (16)

$$\boldsymbol{\eta}(T) = \begin{bmatrix} 1 \\ \left(\frac{\partial h(T)/\partial x_2(T)}{\partial h(T)/\partial x_1(T)}\right) = 1,5 \\ \left(\frac{\partial h(T)/\partial x_3(T)}{\partial h(T)/\partial x_1(T)}\right) = 2,0 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{\eta}_1(T), \quad \boldsymbol{\eta}(T) = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\eta}_1(T)$$

2. wg (25)

$$C_1 = \left[D - \mathbf{S}_3 \cdot \left\{ \int_0^T \{ \boldsymbol{Q}^P(t - \tau^P(t)) - \mathbf{S}_1 \cdot [\mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{1}] \} dt + \mathbf{x}_0 \right\} \right] \cdot \left[\mathbf{S}_3 \cdot (\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{A}_1^{-1} \cdot \mathbf{S}_1^T + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{A}_2^{-1} \cdot \mathbf{S}_2^T) \cdot \mathbf{E} \cdot (T - t_0) \right]^{-1} = 0,0258$$

$$3. \quad \hat{\boldsymbol{\eta}}(T) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,5 \\ 2,0 \end{bmatrix} \cdot 0,0258 = \begin{bmatrix} 0,0258 \\ 0,0387 \\ 0,0516 \end{bmatrix}$$

$$4. \quad \hat{\boldsymbol{u}}(t) = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 1,8 \\ 1,6 \\ 0,8 \\ 0,6 \\ 0,8 \\ 0,8 \\ 0,6 \\ 1,6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,0258 \\ 0,0258 \\ 0,0258 \\ 0,054 \\ 0,054 \\ 0,054 \\ 0,072 \\ 0,072 \\ 0,072 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3742 \\ 1,7742 \\ 1,5742 \\ 0,7613 \\ 0,5613 \\ 0,7613 \\ 0,7484 \\ 0,5484 \\ 1,5484 \end{bmatrix} \quad [\text{m}^3/\text{s}]$$

$$5. \quad \hat{\boldsymbol{z}}(t) = \mathbf{A}_2^{-1} \cdot \mathbf{S}_2^T \cdot \mathbf{E} \cdot C_1$$

$$\hat{\boldsymbol{z}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,0 \\ 1,5 \\ 2,0 \end{bmatrix} \cdot 0,0258 = \begin{bmatrix} 0,0129 \\ 0,0129 \\ -0,0258 \end{bmatrix} \quad [\text{m}^3/\text{s}]$$

6.

$$x(10) = \int_0^{10} \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [1 \ 1 \ 1] & 0 & 0 \\ 0 & [1 \ 1 \ 1] & 0 \\ 0 & 0 & [1 \ 1 \ 1] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,372414 \\ 1,772414 \\ 1,572414 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,0129 \\ 0,0129 \\ -0,0258 \end{bmatrix} \end{array} \right\} dt + \begin{bmatrix} 30 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,387 \\ 29,161 \\ 11,935 \end{bmatrix} [\text{m}^3]$$

7. Stany końcowe na trajektoriach spełniają warunek (3.45)

$$[2 \ 3 \ 4] \cdot \begin{bmatrix} 2,387 \\ 29,161 \\ 11,935 \end{bmatrix} - 140 = 0$$

8. Dla sterowań i przrzutów optymalnych z punktu 4. i 5. wskaźnik jakości osiąga wartość równą $F = 0,4157$.
9. Każde inne sterowanie prowadzi do zwiększenia wartości wskaźnika jakości lub/i naruszenia ograniczenia (7) na trajektoriach stanów.

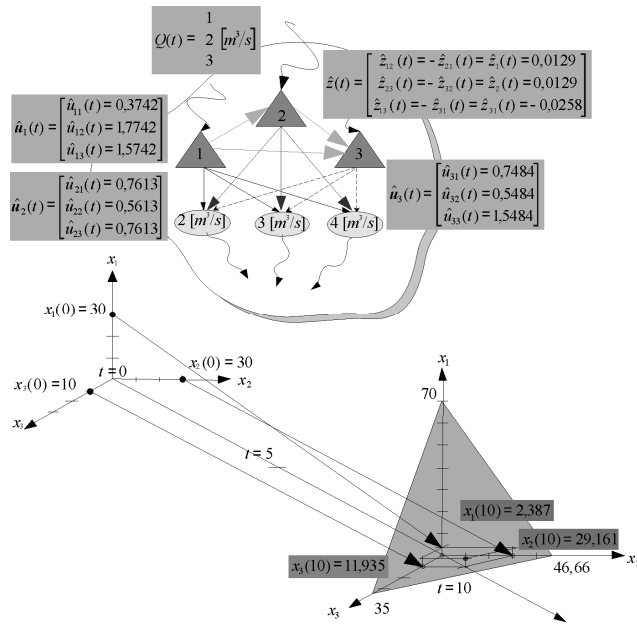
3. Symulacje komputerowe

Szybkie analityczne rozwiązanie przedstawionego problemu możliwe jest przy prostych funkcjach opisujących dopływy prognozowane, funkcje zapotrzebowania i inne wymagane parametry. W miarę wzrostu stopnia komplikacji zapisu analitycznego koniecznych parametrów wejściowych, można skorzystać z programu analogowo/cyfrowego (Matlab/Simulink) realizującego rozwiązanie problemu wg opisanych wzorów. Korzystając z autorskiego programu symulacyjnego (rys. 3) w dowolny sposób można zmieniać

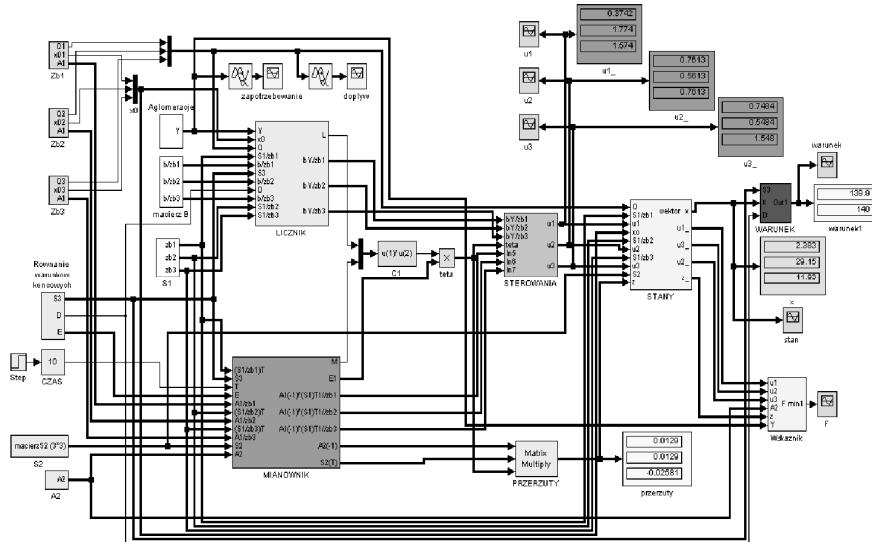
- parametry wejściowe zadania (dopływy prognozowane, stany początkowe zbiorników, funkcję zapotrzebowania na wodę poniżej zbiorników, funkcje zaangażowania poszczególnych zbiorników w realizację funkcji zapotrzebowania itp.),
- strukturę systemu (połączenia między zbiornikami a odbiorcami wody),
- parametry równania wiążącego warunki końcowe na trajektoriach stanów.

Po przeprowadzeniu symulacji otrzymuje się wykresy przedstawiające odpływy ze zbiorników (sterowania) na rzecz kolejnych odbiorców oraz przrzuły międzyzbiornikowe. Optymalne sterowane odpływy i przrzuły zapewniają realizację wektora funkcji za-

potrzebowania przy minimalnej wartości wskaźnika jakości. Jednocześnie otrzymane trajektorie stanów zbiorników systemu zapewniają realizację przyjętego równania dotyczącego warunków końcowych na trajektoriach stanów.



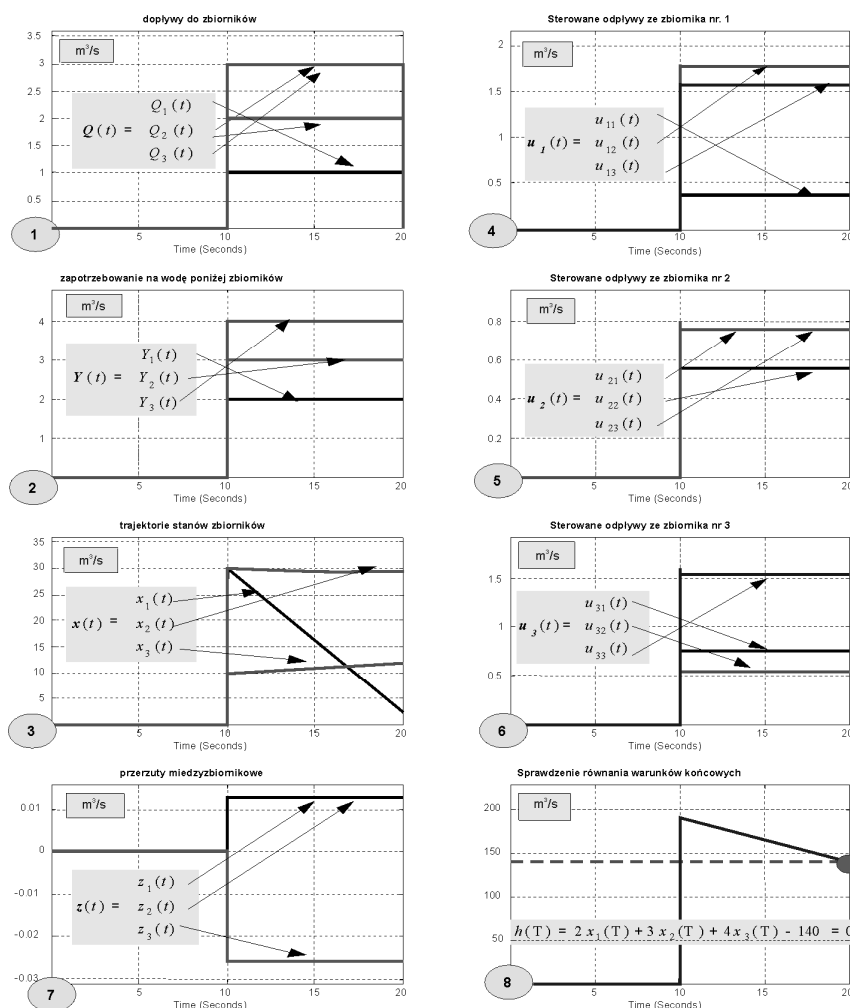
Rys. 2. Ilustracja graficzna przykładu
 Fig. 2. Graphical illustration of the example



Rys. 3. Schemat symulacji analogowo-cyfrowej (Matlab/Simulink)
 Fig. 3. Scheme of analog-numerical simulation (Matlab/Simulink)

Symulacje pracy systemu dla parametrów z przykładu nr 1 przedstawiono na rysunku 4. Program umożliwia symulację pracy systemu składającego się z trzech zbiorników, które zasilają w wodę maksymalnie trzech odbiorców (przy dowolnej strukturze połączeń zbiorniki/odbiorcy oraz zbiorniki/zbiorniki). W poszczególnych blokach wprowadzane są konieczne parametry, następnie po ustaleniu interwału optymalizacji i uruchomieniu symulacji, możemy obserwować przebiegi sterowań (odpływów ze zbiorników i przrzutów międzyzbiornikowych) oraz inne interesujące wykresy.

Na wykresie nr 1 obserwujemy wektor dopływów prognozowanych do systemu zbiorników, wykres nr 2 to wektor funkcji zapotrzebowania na wodę poniżej zbiorników. Wykres nr 3 przedstawia przebieg trajektorii stanów zbiorników, wykres nr 8 obrazuje przebieg równania $h(t)$, $t \in [t_0, T]$.



Rys. 4. Wyniki symulacji pracy systemu dla przyjętych parametrów wyjściowych z przykładu 1
Fig. 4. Results of simulation of system behavior for input parameters as for example no 1

Wykresy od 4 do 6 przedstawiają odpływy (sterowania) ze zbiorników na korzyść poszczególnych aglomeracji, natomiast na wykresie 8 przedstawione są trajektorie przelotów międzyzbiornikowych.

W dalszej kolejności wprowadzając dowolnie dane wejściowe można testować różne sytuacje hydrologiczne w obrębie analizowanego systemu, zmieniać jego strukturę i warunki brzegowe oraz stawiać różne wymagania dotyczące globalnej ilości wody w systemie na koniec horyzontu optymalizacji.

Hipotetyczny scenariusz zdarzeń. Przykład 2

Przyjmujemy następujące założenia:

1. początkowe stany zbiorników

$$\mathbf{x}_0^T = [60 \quad 30 \quad 70] \text{ [m}^3\text{]}$$

końcowe stany zbiorników związane równanie

$$h(T) : \mathbf{S}_3 \cdot \mathbf{x}(T) - 330 = 0 \quad \mathbf{S}_3 = [1,5 \quad 1 \quad 2]$$

2. dopływy do zbiorników

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{bmatrix} Q_1(t) = \frac{0, 1, 2, 7, 8, 9, 10 \text{ [t]}}{1, 5, 4, 6, 3, 6, 1 \text{ [m}^3\text{/s]}} \\ Q_2(t) = \frac{0, 1, 3, 6, 8, 9, 10 \text{ [t]}}{2, 8, 2, 10, 2, 3, 2 \text{ [m}^3\text{/s]}} \\ Q_3(t) = \frac{0, 1, 4, 5, 7, 9, 10 \text{ [t]}}{3, 8, 3, 3, 6, 3, 1 \text{ [m}^3\text{/s]}} \end{bmatrix}$$

3. zapotrzebowanie na wodę poniżej zbiorników

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{bmatrix} [*] & 0 & 0 \\ 0 & [*] & 0 \\ 0 & 0 & [*] \end{bmatrix},$$

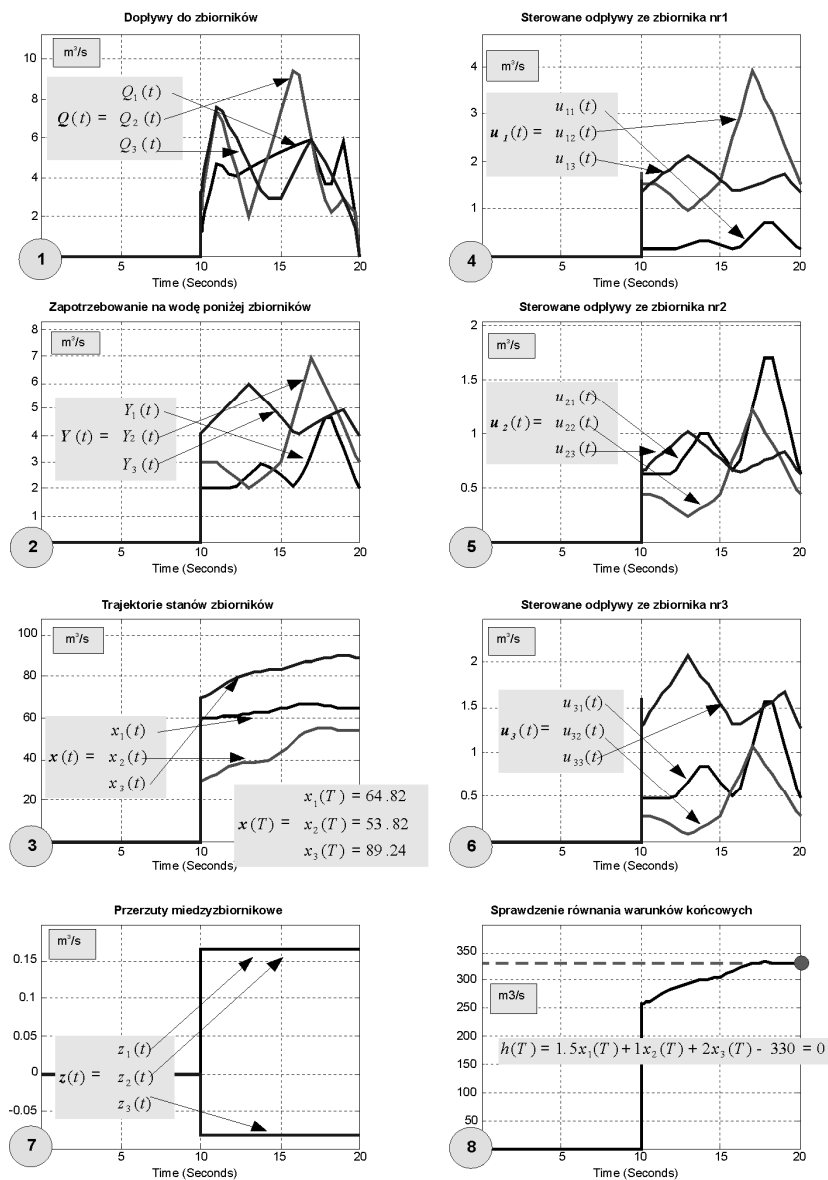
$$[*] = \begin{bmatrix} \frac{0, 2, 4, 6, 8, 10 \text{ [t]}}{2, 3, 4, 3, 5, 2 \text{ [m}^3\text{/s]}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{0, 1, 3, 5, 7, 10 \text{ [t]}}{3, 3, 2, 2, 7, 3 \text{ [m}^3\text{/s]}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{0, 3, 6, 9, 10 \text{ [t]}}{4, 6, 4, 5, 4 \text{ [m}^3\text{/s]}} \end{bmatrix}$$

funkcje zaangażowania zbiorników w realizację funkcji zapotrzebowania

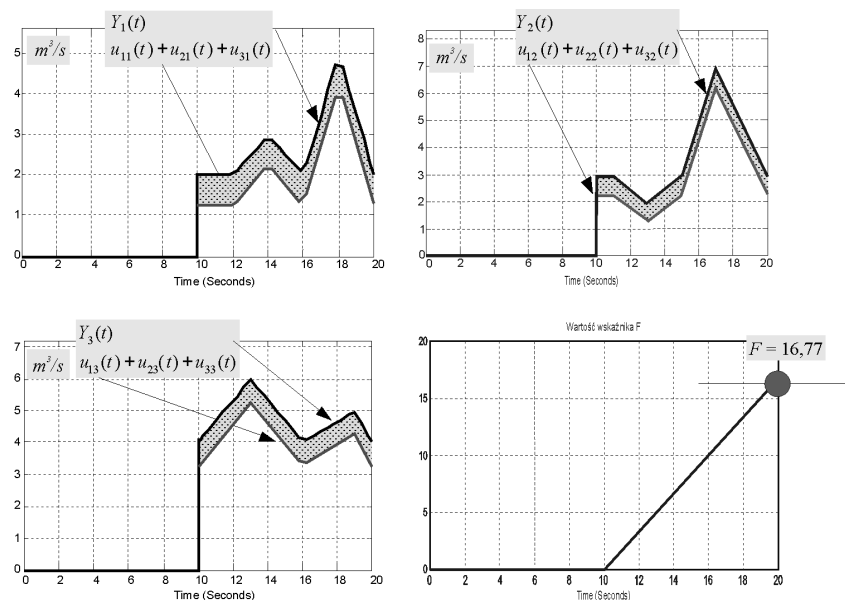
$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} [1] & 0 & 0 \\ 0 & [2] & 0 \\ 0 & 0 & [3] \end{bmatrix}, \quad [1] = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} (t),$$

$$[2] = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} (t), [3] = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

4. pozostałe parametry bez zmian.



Rys. 5. Wyniki symulacji pracy systemu dla przyjętych parametrów wejściowych z przykładu 2
Fig. 5. Results of simulation of system behavior for input parameters as for example no 2



Rys. 6. Wyniki symulacji pracy systemu dla przyjętych parametrów wejściowych z przykładu 2
 Fig. 6. Results of simulation of system behavior for input parameters as for example no 2

4. Wnioski

W wyniku wielu dalszych symulacji, przeprowadzonych na systemach o różnej strukturze powiązań w odniesieniu zarówno do zbiorników i aglomeracji, jak też do przerzutów międzyzbiornikowych, można wyprowadzić następujące wnioski:

1. Możliwość uwzględnienia i zastosowania przerzutów międzyzbiornikowych wydatnie wpływa na pracę systemu połączonych zbiorników, głównie w aspekcie pozostawienia stanów końcowych zbiorników na takich poziomach, które zapewnią realizację przyjętego równania dotyczącego sumarycznej objętości wody w systemie zbiorników, a osiągnięcie tej objętości nastąpi przy minimalnej wartości wskaźnika jakości (1).
2. Kooperacja systemu zbiorników w układzie bez przerzutów międzyzbiornikowych sprowadza się do pracy zbiorników, których jedynym wspólnym celem jest realizowanie potrzeb wodnych nałożonych na system. Żaden ze zbiorników, realizując przypadającą na niego część potrzeb wodnych systemu, „nie widzi” pozostałych w systemie zbiorników. W niektórych przypadkach taka kooperacja może prowadzić do sytuacji, w której w ramach systemu współpracujących zbiorników, przy niekorzystnym, niskim dopływie prognozowanym i po czasie optymalizacji T , część zbiorników pozostanie z bardzo niskimi stanami końcowymi, co nie gwarantuje realizacji warunku (7). Złagodzenie tego niekorzystnego efektu możliwe jest właśnie w wyniku uwzględnienia przerzutów międzyzbiornikowych, które zgodnie z warunkami zadania optymalizacji, będą tak dobrane (wartość, kierunek przerzutu), aby przy danym wektorze dopływów prognozowanych do systemu zbiorników zapewnić pożądane stany końcowe zbiorników systemu.

Literatura

- [1] Chmielowski W., Uryga R., *Szczególne postacie warunków brzegowych w sterowaniu optymalnym wielozbiornikowymi systemami wodno-gospodarczymi*, Czasopismo Techniczne PK, 1-Ś/2009, Wydawnictwo PK, Kraków 2009, 43-58.
- [2] Chmielowski W., *Czas obserwacji i różnorodność warunków brzegowych na trajektoriach stanów, jako elementy optymalnego sterowania odpływami z systemu zbiorników retencyjnych*, Czasopismo Techniczne PK, 8-Ś/2005.
- [3] Chmielowski W., *Ograniczenia stanu i sterowania jako element optymalizacji wielozbiornikowego systemu wodno-gospodarczego (część I)*, Czasopismo Techniczne PK, 16-Ś/2005, Wydawnictwo PK, Kraków 2005.
- [4] Chmielowski W., *Ograniczenia stanu i sterowania jako element optymalizacji wielozbiornikowego systemu wodno-gospodarczego (część II)*, Czasopismo Techniczne PK, 16-Ś/2005, Wydawnictwo PK, Kraków 2005.
- [5] Chmielowski W., *Zastosowania optymalizacji w gospodarce wodnej*, Wydawnictwo PK, Kraków 2005.
- [6] Chmielowski W., *Optymalizacja pracy systemu zbiorników retencyjnych przy warunku konieczności zaspokojenia potrzeb*, Czasopismo Techniczne, 8-Ś/2004, Wydawnictwo PK, Kraków 2004.
- [7] Findeisen W., Szymanowski J., Wierzbicki A., *Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji*, PWN, Warszawa 1980.
- [8] Górecki H., *Optymalizacja systemów dynamicznych*, PWN, Warszawa 1993.
- [9] Lambor J., *Gospodarka wodna na zbiornikach retencyjnych*, Arkady, Warszawa 1962.
- [10] Słota H., *Operacyjne sterowanie retencją wody w zbiornikach z uwzględnieniem stanów końcowych*, Mon. Kom. Gospodarki Wodnej PAN, z. 7, 1995.