

JAKUB KISIEL*

**OPRÓŻNIANIE DWÓCH KOMÓR ZBIORNIKA,
W PRZYPADKU GDY W POCZĄTKOWEJ CHWILI PROCESU
KOMORA WYLOTOWA
JEST JUŻ CZĘŚCIOWO OPRÓŻNIONA**

**EMPTYING OF TWO CHAMBERS THE CONTAINER
IN THE EVENT THAT IN THE INITIAL MOMENT
OF THE PROCESS THE OUTLET CHAMBER PARTLY
IS ALREADY VACATED**

Streszczenie

W artykule przedstawiono modele matematyczne opisujące przebieg procesów opróżniania szeregowo połączonych dwóch komór zbiornika w przypadku, gdy komora wylotowa jest częściowo opróżniona. Wyróżniono pięć różnych przypadków przebiegu procesu ich opróżniania, uzależnionych od stopnia zróżnicowania poziomów położeń zwierciadeł cieczy w obu zbiornikach w chwili początkowej. Dla wszystkich pięciu możliwych przypadków początkowych procesu opróżniania przyporządkowane zostały właściwe opisy matematyczne wraz z ich rozwiązaniem

Słowa kluczowe: zbiorniki kanalizacyjne, procesy opróżniania komór zbiorników

Abstract

In the paper mathematical models describing courses of processes of emptying two chambers in series connected of the container were described in the event that the outlet chamber partly is emptied. Five different cases of the course of the process of emptying them dependent on the degree of diversifying levels of locations of mirrors of liquid in both containers in the initial moment were distinguished. For all five possible initial cases of the process of emptying them appropriate mathematical descriptions were assigned with untying them.

Keywords: sewer containers, processes of emptying chambers of containers

* Dr inż. Jakub Kisiel, Instytut Inżynierii Środowiska, Wydział Inżynierii i Ochrony Środowiska, Politechnika Częstochowska.

1. Wstęp

Dwie szeregowo połączone komory zbiornika mogą być równocześnie opróżniane w wariancie takim, gdy komora wylotowa jest już częściowo opróżniona. Stan początkowy charakteryzuje się tym, że w komorze poprzedniej (1) stan napełnienia jest znacznie wyższy od stanu napełnienia w komorze wylotowej (0). Wyższy stan napełnienia w komorze poprzedniej (1) niekoniecznie musi oznaczać jej całkowite wypełnienie. Będzie on jednak w oznaczeniach obliczeniowych traktowany jako początkowa głębokość o wartości maksymalnej równej $y = H_0$. Z kolei w chwili początkowej napełnienie komory wylotowej (0) wynoszące $x = h_{0P}$ powodować będzie również początkową wartość różnicy poziomów cieczy wypełniającej obie komory zbiornika $\Delta H = y - x = H_0 - h_{0P}$.

Takie szczególne opróżnianie komór zbiornika nie stanowi normatywnych przypadków ich działania w praktyce, jednakże wystąpienie takiego wariantu nie jest wykluczone. Z punktu widzenia nauki jest przypadkiem zasługującym na uwagę.

2. Możliwe przypadki początkowego stanu procesu opróżniania komór zbiornika oraz jego charakterystyczne etapy

Częściowe opróżnienie komory wylotowej w przypadku wielokomorowych retencyjnych zbiorników kanalizacyjnych jest mało prawdopodobne, ale w szczególnych przypadkach możliwe. Przykładem takim w odniesieniu do kanalizacyjnych zbiorników retencyjnych może być chwilowe zablokowanie zaworu klapowego lub zatarcie jego łożysk. W takiej sytuacji dopływ cieczy z komory poprzedniej (1) do komory wylotowej (0) jest chwilowo niemożliwy. Taki przypadek jest niewątpliwie przypadkiem awaryjnym, którego wystąpienie przy właściwej konserwacji zaworu klapowego jest raczej niemożliwe.

Może wystąpić taka eksploatacja dwóch komór zbiornika połączonych szeregowo odcinkiem rurociągu wraz zaworem odcinającym, że po częściowym opróżnieniu komory wylotowej zaistnieje konieczność opróżnienia obu komór zbiornika równocześnie. Taki wariant jest możliwy w przypadku magazynowania różnego rodzaju cieczy, na przykład paliw płynnych.

Początkowa różnica napełnień w obu opróżnianych komorach $\Delta H = y - x = H_0 - h_{0P}$ może obejmować różne przypadki, które wyróżniać się będą odniesieniem do charakterystycznych zdefiniowanych różnic napełnień, którymi są:

– chwilowa różnica napełnień w obu komorach $\Delta H_0 = y_0 - x_0$, przy której następuje zrównanie dopływu ($Q_{1i(y_0-x_0)}$) z komory poprzedniej (1) do wylotowej z odpływem ($Q_{0i(x_0)}$) z komory wylotowej(0). Jest to chwila, w której wystąpi ustalony stanu ruchu, który jest to możliwy wtedy, gdy w ruchu nieustalonym, w komorze poprzedniej (1), zwierciadło cieczy jest obniżane, zaś w komorze wylotowej (0) zwierciadło cieczy jest podnoszone. Jeżeli zatem wystąpi równość przepływów ($Q_{1i(y_0-x_0)} = Q_{0i(x_0)}$), czyli że:

$$\mu_1 f_1 \sqrt{2g(y_0 - x_0)} = \mu_0 f_0 \sqrt{2gx_0} \quad (1)$$

to dokonując odpowiednich przekształceń, otrzymamy:

$$\Delta H_0 = y_0 - x_0 = \left(\frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} \right)^2 x_0 \quad (2)$$

– chwilowa różnica napełnień w obu komorach, która stanowi wartość maksymalną podczas opróżniania dwóch jednakowo napełnionych komorach [1], co oznacza, że w chwili początkowej procesu ich opróżniania, napełnienia w obu komorach znajdują się na tych samych poziomach, a ich różnica wynosi $\Delta H = y - x = H_0 - H_0 = 0$. W pierwszej fazie opróżniania obu komór zbiornika różnica poziomów cieczy w obu komorach rośnie od wartości zerowej $\Delta H = 0$ do wartości maksymalnej równej $\Delta H_{0P} = y_P - x_P$. Począwszy od tej maksymalnej różnicy napełnień (faza druga), maleje ona ponownie do wartości zerowej $\Delta H = 0$, przy której obydwie komory zbiornika są całkowicie opróżnione. W drugiej fazie opróżniania obu komór zbiornika stosunek przepływów oraz stosunek napełnień w obu komorach są wartościami stałymi [1] i wynoszą:

$$\frac{Q_{0i}}{Q_i} = \left(\frac{F_0 + F_1}{F_0} \right)^2 = \text{const} \quad (3)$$

$$\frac{y}{x} = \frac{z_P}{x_P} = \left(\frac{F_1}{F_1 + F_0} \frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} \right)^2 + 1, \quad (4)$$

gdzie:

Q_{0i} – chwilowe natężenie wypływu cieczy komory z wylotowej (0),

Q_i – chwilowe natężenie przepływu cieczy komory poprzedniej (1) do komory wylotowej (0).

Różnica napełnień w komorach zbiornika (ΔH_{0P}) będzie zatem równa:

$$\Delta H_{0P} = y_P - x_P = \left(\frac{F_1}{F_1 + F_0} \frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} \right)^2 x_P \quad (5)$$

Z powyższych zapisów wynika, że:

$$\Delta H_{0P} < \Delta H_0 \quad (6)$$

ponieważ:

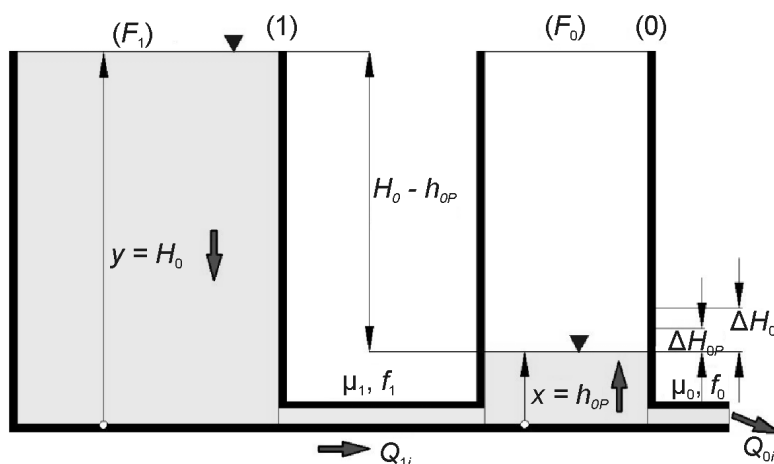
$$\left(\frac{F_1}{F_1 + F_0} \frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} \right)^2 < \left(\frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} \right)^2$$

Przypadek 1 (rys. 1) – w którym początkowa różnica napełnień $\Delta H = y - x = H_0 - h_{0P}$ spełnia nierówność: $H_0 - h_{0P} > \Delta H_0 > \Delta H_{0P}$. Przy początkowym napełnieniu komory wylotowej wynoszącym $x = h_{0P}$ oraz początkowym napełnieniu komory poprzedniej równym $y = H_0$ mamy:

$$\Delta H_0 = \left(\frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} \right)^2 h_{0P}$$

czyli:

$$\Delta H_{0P} = \left(\frac{F_1}{F_1 + F_0} \frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} \right)^2 h_{0P}$$



Rys. 1. Początkowy stan napełnień w komorach zbiornika w przypadku gdy:

$$H_0 - h_{0P} > \Delta H_0 > \Delta H_{0P}$$

Fig. 1. Initial depths at chambers when: $H_0 - h_{0P} > \Delta H_0 > \Delta H_{0P}$

Jest to przypadek, w którym proces jednoczesnego opróżniania obu komór zbiornika wyróżniać będą trzy etapy:

- w **etapie pierwszym**, w którym $Q_{0i} < Q_{1i}$ obniżane będzie napełnienie w komorze poprzedniej (1) przy równoczesnym wzroście napełnienia w komorze wylotowej (0). Zmniejszająca się (początkowo szybko) różnica napełnień w obu komorach zbiornika $\Delta H = y - x$ powodować będzie zmniejszanie natężenia dopływu (Q_{1i}) z komory poprzedniej (1) do komory wylotowej (0) oraz wzrost natężenia odpływu (Q_{0i}) z komory wylotowej (0). Proces zmiany napełnień w komorach następować będzie do chwili osiągnięcia ich różnicy równej ΔH_0 , przy której nastąpi zrównanie się natężeń przepływów ($Q_{0i} = Q_{1i} = Q_0$). Wówczas odpowiadające przepływowi (Q_0) napełnienia w komorach zbiornika oznaczone zostaną jako x_0 w komorze wylotowej (0) oraz y_0 w komorze poprzedniej (1). Wyniosą one odpowiednio:

$$x_0 = \frac{Q_0^2}{2g(\mu_0 f_0)^2}$$

$$y_0 = x_0 + \Delta H_0 = x_0 + \left(\frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} \right)^2 x_0 = \left[1 + \left(\frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} \right)^2 \right] x_0$$

- w **etapie drugim**, w którym $Q_{0i} > Q_{1i}$, począwszy od chwilowej różnicy napełnień równej ΔH_0 aż do jej zmniejszenia do wartości ΔH_{0P} , każdy chwilowy dopływ cieczy (Q_{1i}) z komory poprzedniej (1) do komory wylotowej (0) będzie zawsze mniejszy od odpływu cieczy (Q_{0i}) z komory wylotowej. Obniżanie napełnień w obu komorach zbiornika następować będzie równocześnie, przy czym w komorze poprzedniej (1) będzie ono szybsze niż w komorze wylotowej (0), co wyrażać będzie $dy > dx$. Ten proces zakończony zostanie w chwili, gdy: $dy = dx$, w której różnica napełnień w komorach wyniesie: $\Delta H_{0P} = y_P - x_P$. Wówczas przepływy będą równe:

$$Q_{0i(P)} = \mu_0 f_0 \sqrt{2g x_P}$$

oraz

$$Q_{1i(P)} = \mu_1 f_1 \sqrt{2g(y_P - x_P)}$$

i będą one spełniać równość:

$$Q_2 = \mu_1 f_1 \sqrt{2g(y_P - x_P)} = \frac{F_1}{F_1 + F_0} \mu_0 f_0 \sqrt{2g x_P},$$

natomiast napełnienia w obu komorach: wylotowej (0) oznaczone przez x_P oraz poprzedniej (1) oznaczone przez y_P wyniosą:

$$x_P = 2g \left(\frac{F_1 + F_0}{F_1} \frac{Q_2}{\mu_0 f_0} \right)^2$$

$$y_P = \left[1 + \left(\frac{F_1}{F_1 + F_0} \frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} \right)^2 \right] x_P$$

– w **etapie trzecim** jednoczesne opróżnianie obu komór zbiornika charakteryzować będzie się stałym stosunkiem napełnień w obu komorach oraz również stałym stosunkiem przepływów, które odpowiednio wyniosą:

$$\frac{y}{x} = \left(\frac{F_1}{F_1 + F_0} \frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} \right)^2 + 1 = \text{const}$$

$$\frac{Q_{0i}}{Q_{1i}} = \left(\frac{F_0 + F_1}{F_0} \right)^2 = \text{const}$$

Przypadek 2 (rys. 2) – w którym początkowa różnica napełnień wynosi $H_0 = H_0 - h_{0P} = y_0 - x_0$ i spełnia nierówność: $H_0 - h_{0P} = \Delta H_0 > \Delta H_{0P}$, będzie charakteryzował się dwoma etapami procesu opróżniania obu komór zbiornika.

Etapy te odpowiadają będą jak dla **Przypadku 1**:

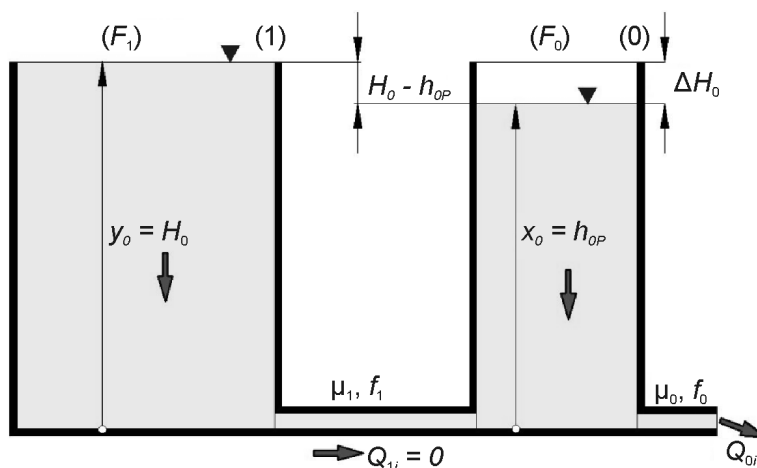
- **etapowi drugiemu**, w którym obniżanie napełnienia w komorze poprzedniej (1) jest szybsze od obniżania się napełnienia w komorze wylotowej (0), czyli że $dy > dx$ aż do chwili, gdy nastąpi zrównanie $dy = dx$, przy którym różnica napełnień w komorach wyniesie $\Delta H_{0P} = y_P - x_P$,
- **oraz etapowi trzeciemu**, w którym opróżnianie obu komór zbiornika charakteryzuje się stałym stosunkiem napełnień w obu komorach oraz również stałym stosunkiem przepływów.

Przypadek 3 (rys. 3) – w którym początkowa różnica napełnień $\Delta H = H_0 - h_{0P} = y - x$ spełnia nierówność $\Delta H_{0P} < H_0 - h_{0P} < \Delta H_0$ i będzie się również charakteryzowała dwoma etapami procesu opróżniania obu komór zbiornika.

Etapy te odpowiadają będą jak dla **Przypadku 1**:

- **etapowi drugiemu**, w którym obniżanie napełnienia w komorze poprzedniej (1) jest szybsze od obniżania się napełnienia w komorze wylotowej (0), czyli że $dy > dx$ aż

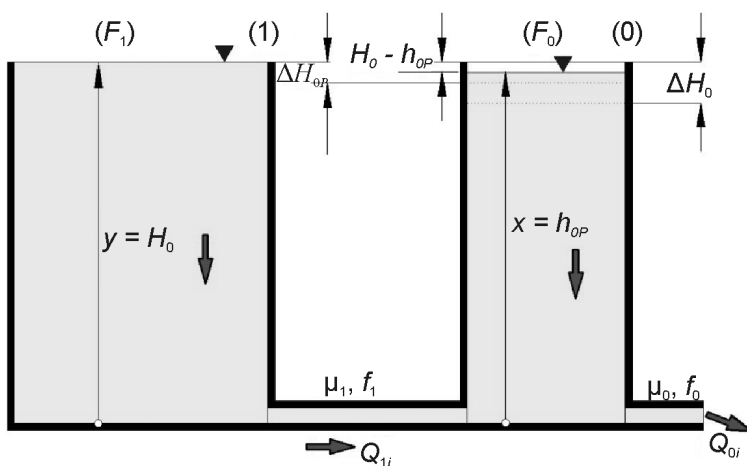
- do chwili, gdy nastąpi zrównanie $dy = dx$, przy którym różnica napełnień w komorach wyniesie $\Delta H_{0P} = y_P - x_P$,
- **oraz etapowi trzeciemu**, w którym opróżnianie obu komór zbiornika charakteryzuje się stałym stosunkiem napełnień w obu komorach oraz również stałym stosunkiem przepływów.



Rys. 2. Początkowy stan napełnień w komorach zbiornika w przypadku gdy:

$$H_0 - h_{0P} = \Delta H_0 > \Delta H_{0P}$$

Fig. 2. Initial depths at chambers when: $H_0 - h_{0P} = \Delta H_0 > \Delta H_{0P}$

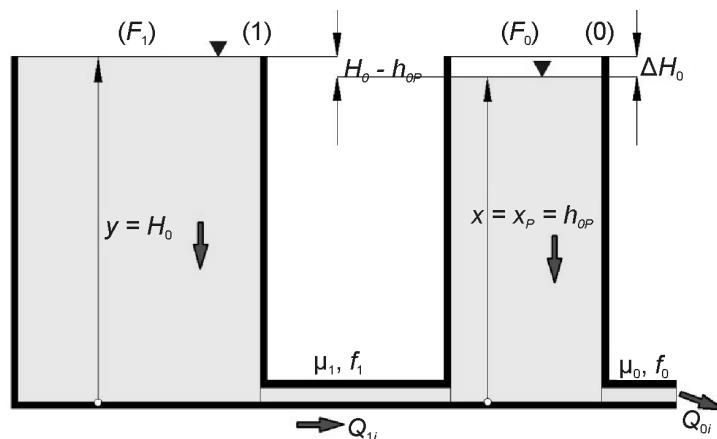


Rys. 3. Początkowy stan napełnień w komorach zbiornika w przypadku gdy:

$$H_{0P} < H_0 - h_{0P} < \Delta H_0$$

Fig. 3. Initial depths at chambers when: $H_{0P} < H_0 - h_{0P} < \Delta H_0$

Przypadek 4 – w którym początkowa różnica napełnień $\Delta H_P = H_0 - h_{0P} = y - x$ spełnia równość $H_0 - h_{0P} = \Delta H_{0P} = y_P - x_P$ i charakteryzuje się tylko jednym etapem procesu opróżniania obu komór zbiornika.



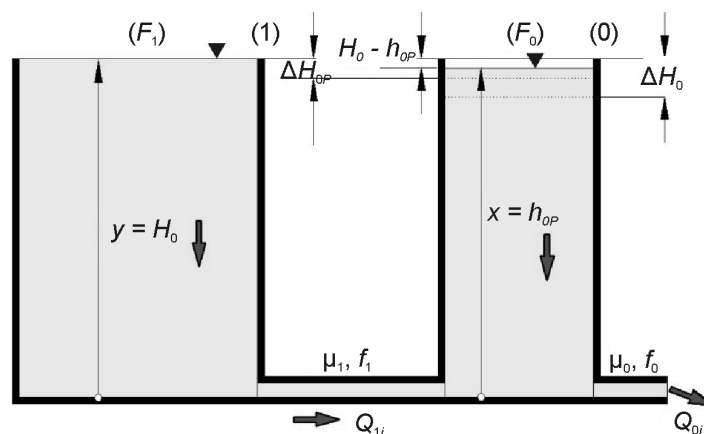
Rys. 4. Początkowy stan napełnień w komorach zbiornika w przypadku gdy:
 $H_0 - h_{0P} = \Delta H_{0P}$

Fig. 4. Initial depths at chambers when: $H_0 - h_{0P} = \Delta H_{0P}$

Etap ten odpowiada jak dla **Przypadku 1**:

– **oraz etapowi trzeciemu**, w którym opróżnianie obu komór zbiornika charakteryzuje się stałym stosunkiem napełnień w obu komorach oraz również stałym stosunkiem przepływów.

Przypadek 5 – w którym początkowa różnica napełnień $\Delta H = H_0 - h_{0P} = y - x$ spełnia nierówność $\Delta H_{0P} > H_0 - h_{0P} > 0$.



Rys. 5. Początkowy stan napełnień w komorach zbiornika w przypadku gdy:
 $\Delta H_{0P} > H_0 - h_{0P} > 0$

Fig. 5. Initial depths at chambers when: $\Delta H_{0P} > H_0 - h_{0P} > 0$

Etapy te odpowiadać będą jak dla **Przypadku 1**:

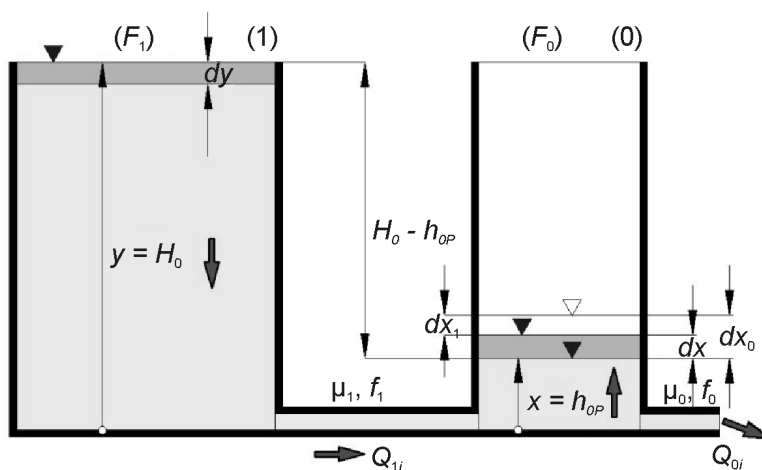
- w **etapie drugim**, w którym $Q_{0i} > Q_{1i}$, obniżanie napień w obu komorach zbiornika następować będzie równocześnie, przy czym w komorze poprzedniej (1) będzie ono szybsze niż w komorze wylotowej (0), co wyrażać będzie $dy > dx$. Ten proces zakończony zostanie w chwili, gdy: $dy = dx$, w której różnica napień w komorach wyniesie: $\Delta H_{0P} = y_P - x_P$,
- **oraz etapowi trzeciemu**, w którym opróżnianie obu komór zbiornika charakteryzuje się stałym stosunkiem napień w obu komorach oraz również stałym stosunkiem przepływów.

3. Opis matematyczny opróżniania komór zbiornika

Przypadek 1

W etapie pierwszym i drugim model matematyczny posługuje się identycznymi równaniami. Należy jednak pamiętać, że w etapie pierwszym $Q_{0i} < Q_{1i}$, zaś w etapie drugim $Q_{0i} > Q_{1i}$.

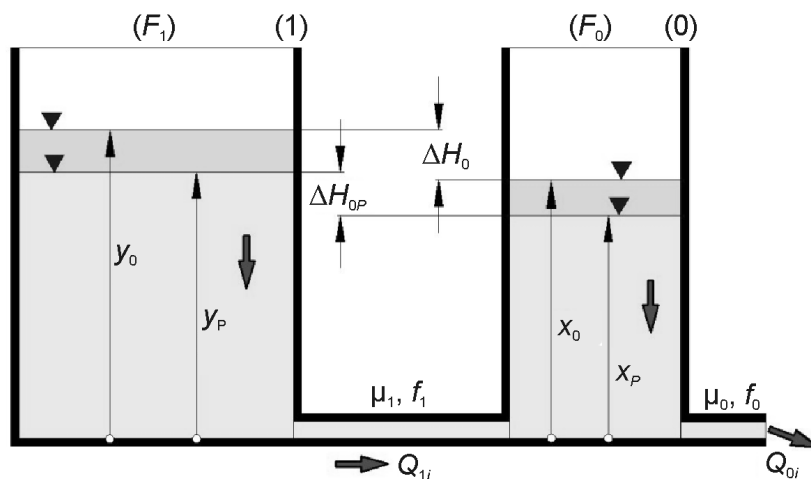
Etap pierwszy (rys. 6), w którym przepływy spełniają relację $Q_{0i} < Q_{1i}$, od chwili początkowej, w której początkowa różnica napień w komorach wynosi $\Delta H = y - x = H_0 - h_{0P} > \Delta H_0 > \Delta H_{0P}$, do chwili, gdy różnica napień w komorach jako końcowa w tym etapie wynosi $\Delta H_0 = y_0 - x_0$ i przy której nastąpi zrównanie natężeń przepływów $Q_{0i} = Q_{1i} = Q_0$.



Rys. 6. Model matematyczny opróżniania dwóch szeregowo połączonych komór zbiornika w przypadku, gdy komora wylotowa jest częściowo opróżniona – etap pierwszy
Fig. 6. Mathematical model of emptying phase of the two chambers connected in series – case when the outlet chamber is partially emptied (phase one)

Etap drugi (rys. 7), w którym przepływy spełniają z kolei relację $Q_{0i} > Q_{1i}$, począwszy od chwili początkowej etapu drugiego, w której nastąpiło zrównanie natężeń przepływów: $Q_{0i} = Q_{1i} = Q_1$ przy różnicy napień w komorach zbiornika wynoszą-

cej $\Delta H_0 = y_0 - x_0$, do chwili, gdy $dy = dx$, a różnica napełnień w komorach wyniesie $\Delta H_{0P} = y_P - x_P$. Podczas drugiego etapu napełnienie komory poprzedniej (1) maleje od wartości y_0 do wartości y_P , natomiast w komorze wylotowej (0) również maleje od wartości x_0 do wartości x_P .



Rys. 7. Model matematyczny opróżniania dwóch szeregowo połączonych komór zbiornika w przypadku, gdy komora wylotowa jest częściowo opróżniona – etap drugi
Fig. 7. Mathematical model of emptying phase of the two chambers connected in series – case when the outlet chamber is partially emptied (phase two)

Zestawienie równań pierwszego i drugiego etapu opróżniania dwóch szeregowo połączonych komór zbiornika w przypadku, gdy komora wylotowa jest częściowo opróżniona:
– chwilowe natężenie przepływu między komorami (1) i (0):

$$Q_{1i} = \mu_1 f_1 \sqrt{2g(y-x)} \quad (7)$$

– chwilowe natężenie odpływu z komory wylotowej(0):

$$Q_{0i} = \mu_0 f_0 \sqrt{2gx} \quad (8)$$

– równanie różniczkowe odpływu (Q_{1i}) z komory poprzedniej (1) w czasie dt wyrażone ubytkiem objętości cieczy ($-F_1 dy$) w niej zawartej:

$$Q_{1i} dt = -F_1 dy \quad (9)$$

– równanie różniczkowe odpływu (Q_{0i}) z komory wylotowej (0) w czasie dt wyrażone ubytkiem objętości cieczy ($-F_0 dx_1$) w niej zawartej przy założeniu w superpozycji braku dopływu ($Q_{1i} = 0$) z komory poprzedniej(1):

$$Q_{0i} dt = -F_0 dx_1 \quad (10)$$

– równanie różniczkowe dopływu (Q_{1i}) z komory poprzedniej (1) w czasie dt wyrażone przyrostem objętości cieczy ($F_0 dx_0$) w komorze wylotowej (0) przy założeniu w superpozycji braku odpływu ($Q_{1i} = 0$):

$$Q_1 dt = F_0 dx_0 \quad (11)$$

– ostateczne obniżenie zwierciadła cieczy w komorze wylotowej (0) w czasie dt jako wynik superpozycji:

$$dx = dx_0 - dx_1 = \frac{Q_{1i}}{F_0} dt - \frac{Q_{0i}}{F_0} dt \quad (12)$$

– równanie różniczkowe dopływu i odpływu z komory wylotowej (0) w czasie dt wyrażone zmianą (przyrostem lub ubytkiem) objętości cieczy ($F_0 dx$) w niej zawartej:

$$(Q_{1i} - Q_{0i}) dt = F_0 dx \quad (13)$$

Etap trzeci, w którym przepływy spełniają nadal relację $Q_{0i} > Q_{1i}$, począwszy od końcowej chwili etapu drugiego, w którym $dy = dx$, a różnica napełnień w komorach wynosi $\Delta H_{0P} = y_p - x_p$, do chwili całkowitego opróżnienia obu komór zbiornika, w której $y = x = 0$ oraz $Q_{0i} = Q_{1i} = 0$.

Obliczenia etapu trzeciego prowadzone mogą być jako kontynuacja obliczeń etapu drugiego, czyli tymi samymi wzorami, jakie przedstawione zostały w rozwiązaniu pierwszego i drugiego etapu. Można również na podstawie wartości wyznaczonych dla końcowej chwili etapu drugiego: $x = x_p$ oraz $y = x_p + \Delta H_{0P}$ kończyć obliczenia, posługując się uproszczonym schematem obliczeniowym przedstawionym w artykule [1].

Czas trwania etapu trzeciego można zatem obliczyć za pośrednictwem wzoru:

$$t_3 = \frac{2(F_1 + F_0)}{\mu_0 f_0 \sqrt{2g}} \left[1 + \left(\frac{F_1}{F_1 + F_0} \right)^3 \left(\frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} \right)^2 \right] \sqrt{x_p} \quad (14)$$

Natomiast zmiana napełnienia komory wylotowej (x) w czasie (t_i) obliczana może być wzorem (15):

$$t_{3i} = \frac{2(F_1 + F_0)}{\mu_0 f_0 \sqrt{2g}} \left[1 + \left(\frac{F_1}{F_1 + F_0} \right)^3 \left(\frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} \right)^2 \right] (\sqrt{x_{i+1}} - \sqrt{x_i}) \quad (15)$$

4. Model matematyczny opróżniania komór zbiornika oraz jego numeryczne rozwiązanie

Etap pierwszy $Q_{0i} < Q_{1i}$ (rys. 6):

– obliczenie położenia zwierciadeł cieczy w obu zbiornikach oraz wartości natężeń przepływów po upływie pierwszego kroku czasowego równego Δt :

$$\begin{aligned} (Q_{1i} - Q_{0i}) \Delta t &= |F_0 \Delta x_1| = F_0 \Delta x_1 \\ \left[\mu_1 f_1 \sqrt{2g(H_0 - h_{0P})} - \mu_0 f_0 \sqrt{2gh_{0P}} \right] \Delta t &= F_0 \Delta x_1 \\ \Delta x_1 &= \frac{\mu_1 f_1 \sqrt{2g} \Delta t}{F_0} \left(\sqrt{H_0 - h_{0P}} - \frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} \sqrt{h_{0P}} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\Delta y_1 = \frac{Q_{01}}{F_1} \Delta t = \frac{\mu_1 f_1 \sqrt{2g(H_0 - h_{0P})}}{F_1} \Delta t \quad (17)$$

Pierwszy krok obliczeniowy umożliwi wyznaczenie następujących parametrów:

- napełnienie komory wylotowej (0) po pierwszym kroku obliczeniowym:

$$h_{01} = h_{0P} + \Delta x_1 \quad (18)$$

- napełnienie komory poprzedniej (1) po pierwszym kroku obliczeniowym:

$$h_{11} = H_0 - \Delta y_1 \quad (19)$$

- różnica poziomów napełnień w komorach zbiornika po pierwszym kroku obliczeniowym:

$$\Delta h_{01} = h_{11} - h_{01} = (H_0 - \Delta y_1) - (h_{0P} + \Delta x_1) \quad (20)$$

- odpływ z komory wylotowej (0) zbiornika w pierwszym kroku obliczeniowym:

$$Q_{01} = \mu_0 f_0 \sqrt{2gh_{0P}} \quad (21)$$

- przepływ między komorami zbiornika (1) i (0) w pierwszym kroku obliczeniowym:

$$Q_{11} = \mu_1 f_1 \sqrt{2g(H_0 - h_{0P})} \quad (22)$$

– następny, drugi krok czasowy $2\Delta t$ spowoduje dalszą zmianę położenia zwierciadeł cieczy w komorach oraz zmianę wartości natężeń przepływów zgodnie z poniższymi równaniami:

Dla:

$$\left[\mu_1 f_1 \sqrt{2g[H_0 - h_{0P} - (\Delta y_1 - \Delta x_1)]} - \mu_0 f_0 \sqrt{2g(h_{0P} + \Delta x_1)} \right] \Delta t = F_0 \Delta x_2$$

mamy:

$$\Delta x_2 = \frac{\mu_1 f_1 \sqrt{2g} \Delta t}{F_0} \left(\sqrt{(H_0 - h_{0P}) - (\Delta y_1 - \Delta x_1)} - \frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} \sqrt{h_{0P} + \Delta x_1} \right) \quad (23)$$

$$\Delta y_2 = \frac{Q_{01}}{F_1} \Delta t = \frac{\mu_1 f_1 \sqrt{2g [(H_0 - h_{0P}) - (\Delta y_1 - \Delta x_1)]}}{F_1} \Delta t \quad (24)$$

Drugi krok obliczeniowy umożliwi z kolei wyznaczenie następujących parametrów:

- napełnienie komory wylotowej (0) po drugim kroku obliczeniowym:

$$h_{02} = h_{0P} + \Delta x_1 + \Delta x_2 \quad (25)$$

- napełnienie komory poprzedniej (1) po drugim kroku obliczeniowym:

$$h_{12} = H_0 - \Delta y_1 - \Delta y_2 \quad (26)$$

- różnica poziomów napełnień w komorach zbiornika po drugim kroku obliczeniowym:

$$\Delta h_{02} = h_{12} - h_{02} = (H_0 - \Delta y_1 - \Delta y_2) - (h_{0P} + \Delta x_1 + \Delta x_2) \quad (27)$$

- odpływ z komory wylotowej (0) zbiornika w drugim kroku obliczeniowym:

$$Q_{02} = \mu_0 f_0 \sqrt{2g(h_{0P} + \Delta x_1)} \quad (28)$$

- przepływ między komorami zbiornika (1) i (0) w drugim kroku obliczeniowym:

$$Q_{12} = \mu_1 f_1 \sqrt{2g[(H_0 - h_{0P}) - (\Delta y_1 - \Delta x_1)]} \quad (29)$$

W kolejnych krokach obliczeniowych dla $i = 1, 2, 3, \dots, n$ położenia poziomów zwierciadeł cieczy w komorach zbiornika wyznaczenie będą wzorami:

$$\Delta x_n = \frac{\mu_1 f_1 \sqrt{2g} \Delta t}{F_0} \left(\sqrt{(H_0 - h_{0P}) - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \Delta y_i - \sum_{i=1}^{n-1} \Delta x_i \right)} - \frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} \sqrt{h_{0P} + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta x_i} \right) \quad (30)$$

$$\Delta y_n = \frac{Q_{0n}}{F_1} \Delta t = \frac{\mu_1 f_1 \sqrt{2g \left[(H_0 - h_{0P}) - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \Delta y_i - \sum_{i=1}^{n-1} \Delta x_i \right) \right]}}{F_1} \Delta t \quad (31)$$

Każdy kolejny krok obliczeniowy umożliwi wyznaczenie następujących parametrów:

- napełnienie komory wylotowej (0) po n kroku obliczeniowym:

$$h_{0n} = h_{0P} + \sum_{i=1}^n \Delta x_i \quad (32)$$

- napełnienie komory poprzedniej (1) po n kroku obliczeniowym:

$$h_{1n} = H_0 - \sum_{i=1}^n \Delta y_i \quad (33)$$

- różnica poziomów napełnień w komorach zbiornika po n kroku obliczeniowym:

$$\Delta h_{0n} = h_{1n} - h_{0n} = H_0 - \sum_{i=1}^n \Delta y_i - h_{0P} - \sum_{i=1}^n \Delta x_i = H_0 - h_{0P} - \sum_{i=1}^n \Delta y_i - \sum_{i=1}^n \Delta x_i \quad (34)$$

- odpływ z komory wylotowej (0) zbiornika w n kroku obliczeniowym:

$$Q_{0n} = \mu_0 f_0 \sqrt{2g \left(h_{0P} + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta x_i \right)} \quad (35)$$

- przepływ między komorami zbiornika (1) i (0) w n kroku obliczeniowym:

$$Q_{1n} = \mu_1 f_1 \sqrt{2g \left[(H_0 - h_{0P}) - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \Delta y_i - \sum_{i=1}^{n-1} \Delta x_i \right) \right]} \quad (36)$$

Obliczenia prowadzone będą do czasu osiągnięcia równości przepływów $Q_{0i} = Q_{1i}$, przy której ustalona zostanie wartość różnicy napełnień $\Delta H_0 = y_0 - x_0 = h_{1Q} - h_{0Q}$.

Etap drugi $Q_{0i} > Q_{1i}$:

– obliczenie położenia zwierciadeł cieczy w obu zbiornikach po upływie pierwszego kroku czasowego równego Δt etapu drugiego:

$$\begin{aligned} (Q_{0i} - Q_{1i})\Delta t &= |-F_0\Delta x_1| = F_0\Delta x_1 \\ [\mu_0 f_0 \sqrt{2gx_0} - \mu_1 f_1 \sqrt{2g(y_0 - x_0)}]\Delta t &= F_0\Delta x_1 \\ \Delta x_1 &= \frac{\mu_1 f_1 \sqrt{2g}\Delta t}{F_0} \left(\frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} \sqrt{x_0} - \sqrt{y_0 - x_0} \right) \\ \Delta y_1 &= \frac{Q_{01}}{F_1} \Delta t = \frac{\mu_1 f_1 \sqrt{2g(y_0 - x_0)}}{F_1} \Delta t \end{aligned} \quad (37)$$

Pierwszy krok obliczeniowy umożliwi wyznaczenie następujących parametrów:

- napełnienie komory wylotowej (0) po pierwszym kroku obliczeniowym:

$$h_{01} = x_0 - \Delta x_1 \quad (38)$$

- napełnienie komory poprzedniej (1) po pierwszym kroku obliczeniowym:

$$h_{11} = y_0 - \Delta y_1 \quad (39)$$

- napełnienie komory poprzedniej (1) po pierwszym kroku obliczeniowym:

$$\Delta h_{01} = h_{11} - h_{01} = (y_0 - \Delta y_1) - (x_0 - \Delta x_1) \quad (40)$$

- odpływ z komory wylotowej (0) zbiornika w pierwszym kroku obliczeniowym:

$$Q_{01} = \mu_0 f_0 \sqrt{2gh_{01}} = \mu_0 f_0 \sqrt{2g(x_0 - \Delta x_1)} \quad (41)$$

- przepływ między komorami zbiornika (1) i (0) w pierwszym kroku obliczeniowym:

$$Q_{11} = \mu_1 f_1 \sqrt{2g(h_{11} - h_{01})} = \mu_1 f_1 \sqrt{2g[\Delta H_0 - (\Delta y_1 - \Delta x_1)]} \quad (42)$$

Następny, drugi krok czasowy $2\Delta t$ spowoduje dalszą zmianę położenia zwierciadeł cieczy w komorach oraz zmianę wartości natężeń przepływów zgodnie z poniższymi równaniami:

Dla:

$$[\mu_0 f_0 \sqrt{2g(x_0 - \Delta x_1)} - \mu_1 f_1 \sqrt{2g[\Delta H_0 - (\Delta y_1 - \Delta x_1)]}]\Delta t = F_0\Delta x_2 \quad (43)$$

mamy:

$$\Delta x_2 = \frac{\mu_1 f_1 \sqrt{2g}\Delta t}{F_0} \left(\frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} \sqrt{x_0 - \Delta x_1} - \sqrt{\Delta H_0 - (\Delta y_1 - \Delta x_1)} \right)$$

$$\Delta y_2 = \frac{Q_{01}}{F_1} \Delta t = \frac{\mu_1 f_1 \sqrt{2g[\Delta H_0 - (\Delta y_1 - \Delta x_1)]}}{F_1} \Delta t \quad (44)$$

Drugi krok obliczeniowy umożliwi z kolei wyznaczenie następujących parametrów:

- napełnienie komory wylotowej (0) po drugim kroku obliczeniowym:

$$h_{02} = x_0 - \Delta x_1 - \Delta x_2 \quad (45)$$

- napełnienie komory poprzedniej (1) po drugim kroku obliczeniowym:

$$h_{12} = y_0 - \Delta y_1 - \Delta y_2 \quad (46)$$

- różnica poziomów napełnień w komorach zbiornika po drugim kroku obliczeniowym:

$$\Delta h_{02} = h_{12} - h_{02} = (H_0 - \Delta y_1 - \Delta y_2) - (h_{0P} - \Delta x_1 - \Delta x_2) \quad (47)$$

- odpływ z komory wylotowej (0) zbiornika w drugim kroku obliczeniowym:

$$Q_{02} = \mu_0 f_0 \sqrt{2g(x_0 - \Delta x_1 - \Delta x_2)} \quad (48)$$

- przepływ między komorami zbiornika (1) i (0) w drugim kroku obliczeniowym:

$$Q_{12} = \mu_1 f_1 \sqrt{2g[\Delta H_0 - (\Delta y_1 + \Delta y_2 - \Delta x_1 - \Delta x_2)]} \quad (49)$$

– w kolejnych krokach obliczeniowych dla $i = 2, 3, \dots, n$ położenia poziomów zwierciadeł cieczy komorach zbiornika wyznaczenie będą wzorami:

$$\Delta x_n = \frac{\mu_1 f_1 \sqrt{2g} \Delta t}{F_0} \left[\frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} \sqrt{x_0 - \sum_{i=1}^{n-1} \Delta x_i} - \sqrt{\Delta H_0 - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \Delta y_i - \sum_{i=1}^{n-1} \Delta x_i \right)} \right] \quad (50)$$

$$\Delta y_n = \frac{Q_{0n}}{F_1} \Delta t = \mu_1 f_1 \sqrt{2g \left[\Delta H_0 - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \Delta y_i - \sum_{i=1}^{n-1} \Delta x_i \right) \right]} \frac{\Delta t}{F_1} \quad (51)$$

Każdy kolejny krok obliczeniowy umożliwi wyznaczenie następujących parametrów:

- napełnienie komory wylotowej (0) po n kroku obliczeniowym:

$$h_{0n} = x_0 - \sum_{i=1}^n \Delta x_i \quad (52)$$

- napełnienie komory poprzedniej (1) po n kroku obliczeniowym:

$$h_{1n} = y_0 - \sum_{i=1}^n \Delta y_i \quad (53)$$

- różnica poziomów napełnień w komorach zbiornika po n kroku obliczeniowym:

$$\Delta h_{0n} = h_{1n} - h_{0n} = y_0 - \sum_{i=1}^n \Delta y_i - x_0 - \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \Delta H_0 - \sum_{i=1}^n \Delta y_i - \sum_{i=1}^n \Delta x_i \quad (54)$$

- różnica poziomów napełnień w komorach zbiornika po n kroku obliczeniowym:

$$Q_{0n} = \mu_0 f_0 \sqrt{2g \left(x_0 + \sum_{i=1}^n \Delta x_i \right)} \quad (55)$$

- odpływ z komory wylotowej (0) zbiornika w n kroku obliczeniowym:

$$Q_{1n} = \mu_1 f_1 \sqrt{2g \left[\Delta H_0 - \left(\sum_{i=1}^n \Delta y_i - \sum_{i=1}^n \Delta x_i \right) \right]} \quad (56)$$

Obliczenia prowadzone będą do czasu osiągnięcia równości $dy = dx$, przy której ustalona zostanie wartość różnicy napełnień ΔH_{0P} . Wartość ΔH_{0P} obliczona może być od odpowiadającego w tej chwili napełnienia w komorze wylotowej $x_P = x_0 - \sum_{i=1}^n \Delta x_i$.

Wówczas różnica napełnień powinna być równa:

$$\Delta H_{0P} = y_P - x_P = \left(\frac{F_1}{F_1 + F_0} \frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} \right)^2 x_P$$

Etap trzeci $Q_{0i} > Q_{1i}$

Obliczenia mogą być prowadzone numerycznie jako kontynuacja etapu drugiego, względnie można posłużyć się metodą uproszczoną opisaną w artykule [1].

5. Wnioski

W artykule przedstawiono ciekawe z punktu widzenia naukowego rozwiązanie zagadnienia dotyczącego opróżniania dwóch prostopadłościennych i szeregowo połączonych komór zbiornika w przypadku, gdy komora wylotowa jest częściowo opróżniona. Wzrost naukowy takiego zagadnienia zawiera się w przebiegu nieustalonego procesu opróżniania obu komór jednocześnie. Rozwinięcie to polega na tym, że w komorze wylotowej napełnienie i odpływ początkowo wzrastają przy równoczesnym szybkim odpływie z komory poprzedniej, aż do chwili, gdy różnica poziomów napełnień w obu komorach osiągnie określoną wartość, począwszy od której opróżnianie komór zbiornika następować będzie z liniowo malejącymi natężeniami odpływu. Równania opisu matematycznego oraz rozwiązania numeryczne zweryfikowane zostały dla przypadku początkowego opróżniania dwóch prostopadłościennych i szeregowo połączonych komór zbiornika, w którym obie komory są napełnione cieczą do tego samego poziomu [1].

Literatura

- [1] Kisiel J., Kisiel A., *Opróżnianie dwóch szeregowo połączonych komór zbiornika*, Czasopismo Techniczne, 3-Ś/2009, Wydawnictwo PK, Kraków 2009, 71-85.
- [2] Kisiel J., *Hydrauliczne podstawy współdziałania szeregowo połączonych komór zbiornika*, XIV Konferencja Naukowa „Aktualne problemy gospodarki wodno-ściekowej”, Ustroń 2004.
- [3] Kisiel J., *Wybrane zagadnienia nieustalonego wypływu cieczy z szeregowo połączonych komór zbiornika*, monografia przygotowywana do druku.