

MICHAŁ POLAK\*

ZASTOSOWANIE MASOWYCH TŁUMIKÓW  
WAHADŁOWYCH DO REDUKCJI DRGAŃ POZIOMYCH  
W MOSTACH DLA PIESZYCH – KONCEPCJA I BADANIA  
NUMERYCZNE

APPLICATION OF PENDULUM MASS DAMPERS  
FOR HORIZONTAL VIBRATIONS REDUCTION  
OF FOOTBRIDGES – CONCEPT AND NUMERICAL STUDY

Streszczenie

Artykuł przedstawia koncepcję i zalety stosowania masowych tłumików wahadłowych w mostach dla pieszych w celu redukcji drgań wywołanych przejściem przechodniów. Przedstawiono model układu obiekt mostowy-tłumik wraz z analizą numeryczną zagadnienia, przy wykorzystaniu wyników badań istniejącego obiektu mostowego.

*Słowa kluczowe: masowe tłumiki wahadłowe, drgania, mosty dla pieszych*

Abstract

This paper presents an idea and advantages of using pendulum mass dampers in footbridges for reduction of horizontal vibrations caused by pedestrian. A model of system: bridge object-pendulum damper, with additional viscous damper, including a numerical analysis of the problem, using the results of investigations of existing footbridge are presented in the paper.

*Keywords: Pendulum Mass Damper, vibrations, footbridges*

\* Mgr inż. Michał Polak, doktorant, Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska.

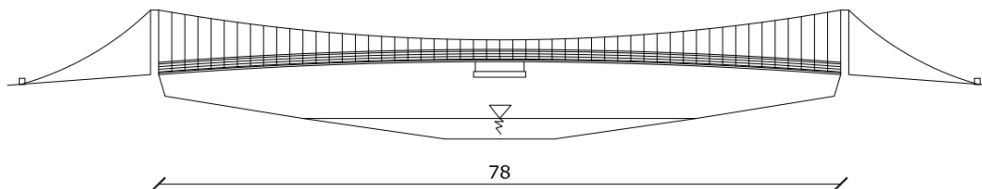
## 1. Wstęp

Mosty dla pieszych pozwalają przeprowadzić ruch pieszych nad przeszkodą terenową lub ciągiem komunikacyjnym. Większość takich mostów cechuje prosta, najczęściej jedno-przęsłowa konstrukcja, której obciążenie zgodnie z normą EN 1991:2007 [1] nie przekracza  $5 \text{ kN/m}^2$ . W praktyce obiekty tego typu są narażone na różne oddziaływania dynamiczne, które sprawiają, że komfort użytkowania odczuwany przez przechodniów obniża się. Niniejszy artykuł prezentuje koncepcję wahadłowego tłumika drgań w zastosowaniu do redukcji drgań poziomych w mostach dla pieszych. Podstawą rozważań jest most dla pieszych w Suchej Beskidzkiej oraz projektowany tłumik wahadłowy w formie płyty stalowej lub betonowej podwieszanej do konstrukcji mostu.

Konstrukcje z takim tłumikiem są traktowane najczęściej jako nieliniowe układy o dwóch stopniach swobody dynamicznej. Na podstawie modelu matematycznego i za pomocą oprogramowania MATLAB wykonano badania numeryczne odpowiedzi dynamicznej układu wyposażonego w tłumik wahadłowy i oceniono zasadność i efekty stosowania takich tłumików w typowych mostach dla pieszych.

## 2. Koncepcja tłumika wahadłowego

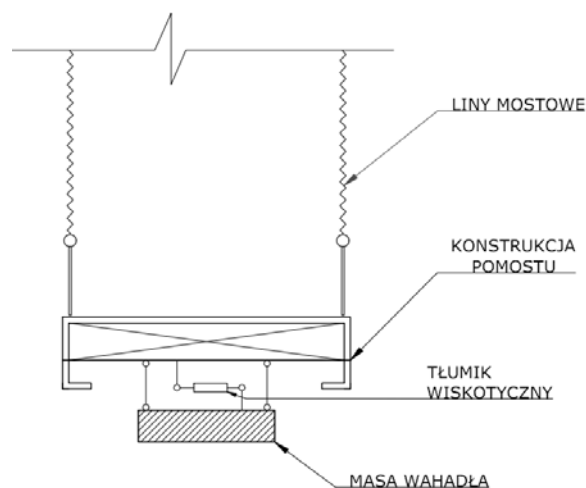
Tłumik wahadłowy jest urządzeniem mechanicznym przeznaczonym do tłumienia drgań poziomych obiektów budowlanych. Główną częścią urządzenia jest masa bezwładna na nierozciągliwym zawieszaniu. Tłumik wahadłowy może być wyposażony także w dodatkowy tłumik wiskotyczny, który poprawia jego pracę. W stosunku do tłumików masowych typu masa-sprężyna-tłok tłumik wahadłowy z dodatkowym tłumikiem wiskotycznym lub bez cechuje niższy koszt wykonania, prostsza konstrukcja, łatwość montażu, a także wyższa trwałość.



Rys. 1. Koncepcja lokalizacji tłumika wahadłowego z dołączonym tłumikiem wiskotycznym na moście wiszącym

Fig. 1. Concept of location of a pendulum mass damper with an additional viscous damper on a footbridge

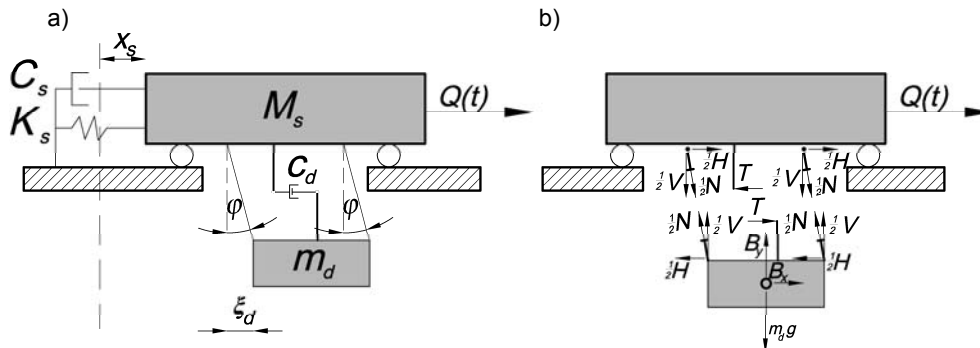
Rysunek 1 przedstawia przykładową koncepcję realizacji tłumika wahadłowego z dołączonym tłumikiem wiskotycznym na obiekcie mostowym. Masa wahadła może być wykonana z betonu lub stali ocynkowanej. Sposób dołączenia tłumika wiskotycznego przedstawiono na rysunku 2.



Rys. 2. Schemat układu most-tłumik

Fig. 2. Scheme of bridge-damper system

### 3. Układ 1-SSD z tłumikiem wahadlowym – model matematyczny



Rys. 3. Model fizyczny układu z tłumikiem wahadlowym i dodanym tłumikiem wiskotycznym

Fig. 3. Physical model of the structure with pendulum damper and additional viscous damper

Rozważono układ o jednym stopniu swobody dynamicznej z zamontowanym tłumikiem wahadlowym. Schemat zaprezentowano na rysunku 3a, gdzie:  $M_s$ ,  $K_s$ ,  $C_s$  – masa uogólniona, sztywność i tłumienie konstrukcji;  $x_s$  – przemieszczenie liniowe konstrukcji;  $Q(t)$  – siła uogólniona;  $m_d$  – masa wahadła;  $c_d$  – współczynnik tłumienia tłumika wiskotycznego;  $\varphi$  – przemieszczenie kątowe masy wahadła;  $\xi_d$  – przemieszczenie liniowe masy wahadła;  $l$  – długość zawiesia.

Przemieszczenia poziome i pionowe wahadła są opisane przez zależności geometryczne

$$\xi_d = l \cdot \sin(\varphi) \quad (1)$$

$$x_d = x_s + \xi_d \quad (2)$$

$$y_d = l(1 - \cos(\varphi)) \quad (3)$$

Rozważane siły są oznaczone na rys. 3b. Łączące je zależności są następujące

$$H = N \cdot \sin(\varphi); \quad V = N \cdot \cos(\varphi); \quad H = V \cdot \operatorname{tg}(\varphi); \quad V = H \cdot \operatorname{ctg}(\varphi) \quad (4)$$

Model matematyczny układu zapisany jest jak poniżej:

#### 1. Siły bezwładności wahadła

$$B_x = -m_d \ddot{x}_d = -m_d \ddot{x}_s - m_d \ddot{\xi}_d = -m_d \ddot{x}_s - m_d l \cdot (\ddot{\varphi} \cos(\varphi) - \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi)) \quad (5)$$

$$B_y = -m_d \ddot{y}_d = -m_d \cdot l \cdot (\ddot{\varphi} \sin(\varphi) + \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi)) \quad (6)$$

#### 2. Siły tłumienia tłumika wiskotycznego

$$T_x = -c_d \dot{\xi}_d = -c_d l \cdot \dot{\varphi} \cos(\varphi) \quad (7)$$

$$T_y = -c_d \dot{y}_d = -c_d \cdot l \cdot \dot{\varphi} \sin(\varphi) \quad (8)$$

#### 3. Równania równowagi dynamicznej układu

$$B_x + T_x - H = 0; \quad B_y + T_y + V - G = 0 \quad (9)$$

$$B_x + T_x + B_y \operatorname{tg}(\varphi) + T_y \operatorname{tg}(\varphi) - G \cdot \operatorname{tg}(\varphi) = 0 \quad (10)$$

$$-m_d (\ddot{x}_s \cos(\varphi) + l \cdot \ddot{\varphi} + g \sin(\varphi)) - c_d \cdot l \cdot \varphi = 0 \quad (11)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{c_d}{m_d} \dot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \sin(\varphi) + \frac{\ddot{x}_s}{l} \cos(\varphi) = 0 \quad (12)$$

#### 4. Równanie ruchu przęsła mostu

$$M_s \ddot{x}_s + C_s \dot{x}_s + K_s x_s = Q(t) + H - T_x \quad (13)$$

gdzie

$$H - T_x = B_x = -m_d \ddot{x}_s - m_d l \cdot (\ddot{\varphi} \cos(\varphi) - \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi)) \quad (14)$$

## 5. Układ równań ruchu układu 2-SSD

$$\begin{cases} M_s \ddot{x}_s + C_s \dot{x}_s + K_s x_s = Q(t) - m_d \ddot{x}_s - m_d l \cdot (\ddot{\varphi} \cos(\varphi) - \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi)) \\ \ddot{\varphi} + \frac{c_d}{m_d} \dot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \sin(\varphi) = -\frac{\ddot{x}_s}{l} \cos(\varphi) \end{cases} \quad (15)$$

Wprowadzając zmienne

$$\mu = \frac{m_d}{M_s}, \quad \omega_s = \sqrt{\frac{K_s}{M_s}}, \quad \gamma_s = \frac{C_s}{2\omega_s M_s}, \quad \omega_d = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \gamma_d = \frac{c_d}{2\omega_d m_d} \quad (16)$$

powyższy układ równań można zapisać w uproszczonej formie

$$\begin{cases} \ddot{x}_s + 2\gamma_s \omega_s \dot{x}_s + \omega_s^2 x_s = \frac{Q(t)}{M_s} + \mu \cdot l \cdot \left( -\frac{\ddot{x}_s}{l} - \ddot{\varphi} \cos(\varphi) + \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) \right) \\ \ddot{\varphi} + 2\gamma_d \omega_d \dot{\varphi} + \omega_d^2 \cdot \sin(\varphi) = -\frac{\ddot{x}_s}{l} \cos(\varphi) \end{cases} \quad (17)$$

Należy zwrócić uwagę, że  $\omega_d$  jest tożsamościowo równe częstości drgań swobodnych wahadła dla małych wychyleń. Okres drgań obliczany jest w takim przypadku następująco

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_d} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (18)$$

Dla dowolnych amplitud drgań swobodnych okres drgań zależny jest od przemieszczenia kąowego  $\varphi$

$$T(\varphi) = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} \right)^2 \cdot \sin^{2n} \left( \frac{\varphi}{2} \right) \right] = \frac{2\pi}{\omega'_d(\varphi)} \quad (19)$$

Częstość kąowa drgań  $\omega'_d(\varphi)$  staje się zatem nieliniową funkcją przemieszczenia kąowego  $\varphi$ . Przykładowo:  $\omega'_d(20 \text{ deg}) = 0,98 \cdot \omega_d$  lub  $\omega'_d(90 \text{ deg}) = 0,85 \cdot \omega_d$ .

Warto zwrócić uwagę, że wielkość siły tłumiącej zależna jest przede wszystkim od składowej poziomej siły bezwładności masy wahadła. Duże drgania wpływają na zwiększenie wartości tej składowej.

#### 4. Modelowanie oddziaływania pieszych

Most dla pieszych może być obciążony: pojedynczymi przechodniami, grupą ludzi w sposób dynamiczny lub tłumem w sposób statyczny. Wymuszenie może mieć charakter typowo losowy, może być wynikiem przypadkowej synchronizacji użytkowników lub wynikiem działania całkowicie celowego [3].

W przypadku chodu, biegu lub truchtu jednej osoby przez most oddziaływanie opiszemy wzorami [4]

$$F_V(t) = G + \sum_{i=1}^n G\alpha_i \sin(2\pi \cdot i \cdot f_k \cdot t - \varphi_i) \quad (20)$$

$$F_H(t) = G \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i^H \sin(2\pi \cdot i \cdot \frac{f_k}{2} \cdot t - \varphi_i^H) \quad (21)$$

gdzie:

- $G$  – ciężar przechodnia (w tej pracy przyjmowane jest 0,7 kN–1 kN),
- $i$  – numer składowej harmonicznej,
- $n$  – liczba uwzględnianych składowych harmonicznych,
- $\alpha_i$  – współczynniki Fouriera dla  $i$ -tej składowej harmonicznej, zależny od typu wymuszenia,
- $f_k$  – częstotliwość kroków lub skoków,
- $\varphi_k$  – kąt przesunięcia fazowego,
- $t$  – czas.

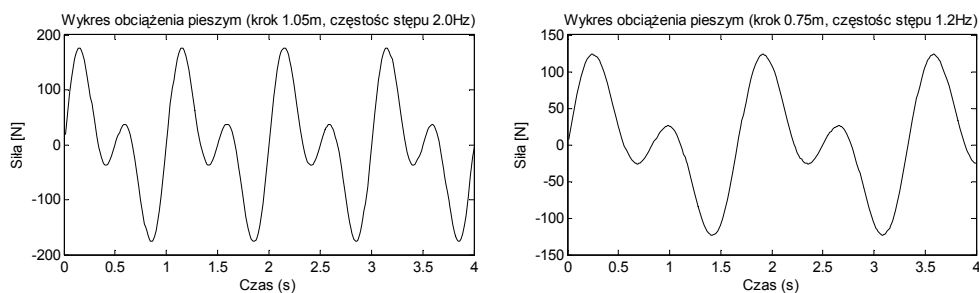
Amplitudę przyspieszenia drgań  $a_N$  dla wielu przechodniów oblicza się jako iloczyn maksymalnego przyspieszenia drgań  $a_{\max}$  spowodowanego przejściem jednego pieszego i współczynnika zwiększającego  $M$ , opisanego wzorem

$$M = \sqrt{\lambda \cdot T_0} \quad (22)$$

$$a_N = a_{\max} \cdot M \quad (23)$$

gdzie:

- $\lambda$  – średnie natężenie ruchu w osobach/sekundę w odniesieniu do szerokości mostu,
- $T_0$  – czas potrzebny do przejścia mostu.



Rys. 4. Wykres wymuszenia powodowanego przez pieszego dla dwóch przypadków ruchu

Fig. 4. Dynamic action caused by single pedestrian in two cases

Zbadano zachowanie pieszych przechodzących przez most w Suchej Beskidzkiej. Stwierdzono, że wielu przechodniów zatrzymuje się z różnych powodów w połowie przęsła. Taka prawidłowość będzie występować dla większości mostów dla pieszych o dużej rozpiętości przęsła środkowego.

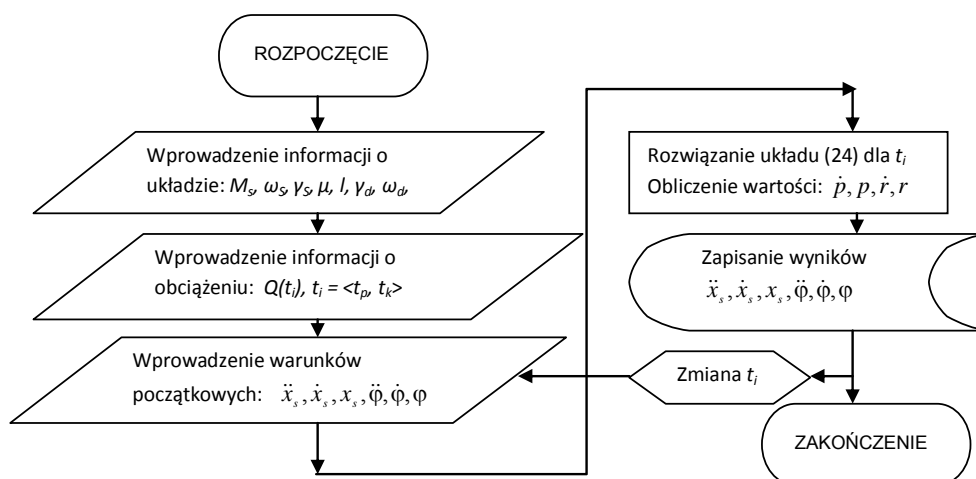
Przykładowe wykresy siły poziomej  $F_H$  działającej na przęsło mostu w wyniku przejścia jednego pieszego zostały zaprezentowane na rys. 4.

### 5. Model numeryczny, rozwiązania w programie MATLAB

Układ równań różniczkowych (17) można rozwiązać, stosując opierającą się na metodzie Rungego-Kutty [6] procedurę pakietu numerycznego MATLAB. Wymaga to zapisania układu w postaci

$$\begin{cases} p = \frac{d\varphi}{dt} \\ \dot{p} = -\omega_d^2 \cdot \sin(\varphi) - 2\gamma_d \omega_d \dot{\varphi} - \frac{\ddot{x}_s}{l} \cos(\varphi) \\ r = \frac{dx_s}{dt} \\ \dot{r} = \mu \cdot l \cdot \left( -\frac{\ddot{x}_s}{l} - \ddot{\varphi} \cos(\varphi) + \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) \right) - 2\gamma_s \omega_s \dot{x}_s - \omega_s^2 x_s + \frac{Q(t)}{M_s} \end{cases} \quad (24)$$

Rysunek 5 przedstawia algorytm prezentujący działanie programu do obliczania równania ruchu układu most-tłumik. Program do rozwiązania tego równania został zapisany w języku MATLAB z wykorzystaniem procedury ode45.



Rys. 5. Algorytm obliczeń numerycznych

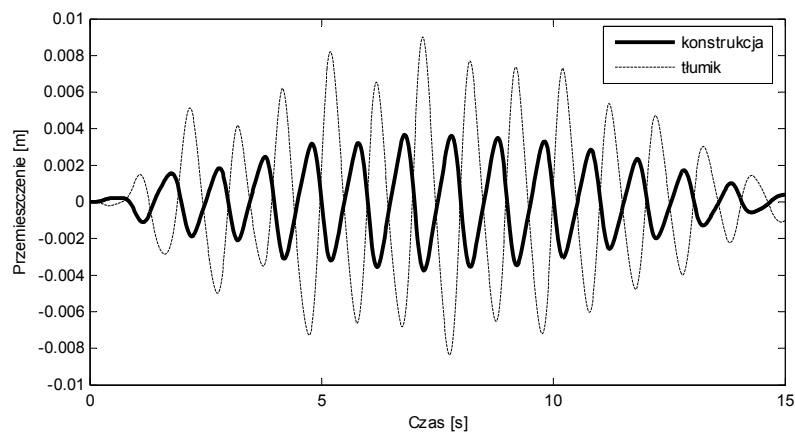
Fig. 5. Numerical algorithm

## 6. Przykłady numeryczne

### 6.1. Obiekt mostowy o rozpiętości 20 m

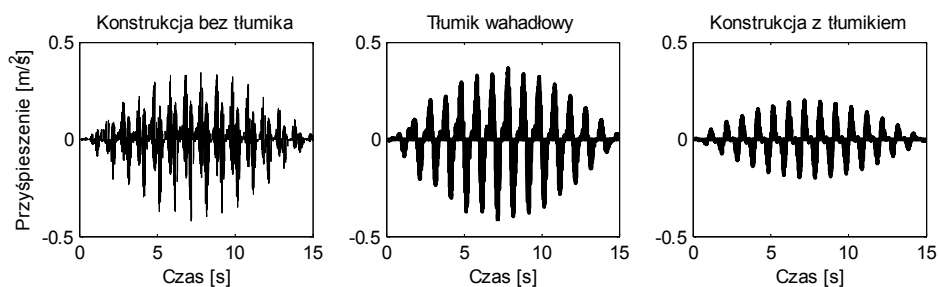
W celu przedstawienia zasady pracy układu konstrukcja-tłumik, ze względu na skalę wykresów, posłużono się mniejszym projektowanym obiektem mostowym o rozpiętości 20 m, opisanym następującymi parametrami  $M_s = 5,47$  t;  $\omega_s = 3,33$  rad/s,  $\gamma_s = 0,01$ ,  $\mu = 0,02$ ,  $l = 0,75$  m,  $\omega_d = 3,30$  rad/s,  $\gamma_d = 0$ , obciążonym ruchem pieszych zgodnie z procedurą opisaną w p. 4.

Na rysunku 6 możemy zauważyć, że wahadło i konstrukcja drgają w przeciwfazie. Siła tłumienia oddziałuje na konstrukcję ze zwrotem przeciwnym do wymuszenia, któremu ta konstrukcja została poddana. Efektem jest zmniejszenie przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia poziomego badanego punktu w środku przęsła konstrukcji, a w rezultacie poprawa komfortu użytkowania mostu. Należy zwrócić uwagę, że przemieszczenia tłumika mogą być większe niż samego mostu dla pieszych.



Rys. 6. Porównanie przemieszczenia tłumika i środka przęsła mostu z tłumikiem

Fig. 6. Comparison of displacement of the pendulum damper and the center of the bridge span



Rys. 7. Porównanie przyspieszeń środka przęsła mostu bez tłumika, z tłumikiem i samego tłumika

Fig. 7. Comparison of acceleration of the center of the bridge span with and without damper and acceleration of the pendulum damper itself



## 6.2. Most dla pieszych w Suchej Beskidzkiej

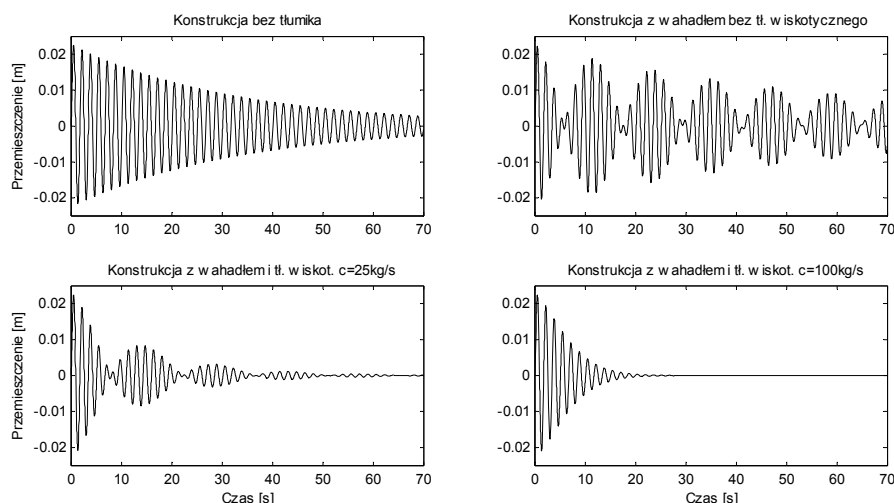
Stalowy most wiszący dla pieszych zlokalizowany jest nad rzeką Skawa w Suchej Beskidzkiej. Pomost o szerokości użytkowej 2,5m skonstruowany jest na dwóch rurach okrągłych  $\varnothing 220$  skratowanych kątownikami  $L65 \times 65 \times 6$ . Nawierzchnię wykonano z desek z drewna jodłowego 32 mm. Ciężar konstrukcji pomostu oszacowano na 3,0 kN/mb. Dopuszczalne projektowane obciążenie pomostu wynosi 10 kN/mb. Bariery stalowe zaprojektowano zgodnie z PN-85/S-10030 [2] – obciążenie dopuszczalne pionową siłą skupioną 0,3kN, obciążenie dopuszczalne ciągłe: poziomo 1 kN/m, pionowo 0,5 kN/m.

Bazując na badaniach eksperymentalnych zawartych w [1] przyjęto: pierwszą postać drgań poziomych o częstości kątowej  $\omega_s = 3,77$  rad/s, ułamek tłumienia krytycznego  $\gamma_s = 0,008$ . Wyznaczono następujące parametry układu:  $M_s = 11\,700$  kg;  $C_s = 705,74$  kg/s,  $K_s = 0,167$  MN/m. Należy zauważyć, że sztywność konstrukcji jest bardzo niska, co będzie wiązało się ze sporą podatnością na oddziaływania dynamiczne.

W naszych rozważaniach numerycznych jako badany układ przyjęto most opisany powyżej z tłumikiem wahadłowym podwieszonym do przęsła w środku rozpiętości. Dla takiego obiektu wyznaczono następujące parametry:  $M_s = 11,70 \cdot 10^3$ ;  $\omega_s = 3,77$  rad/s;  $\gamma_s = 0,008$ ;  $m_d = 224,0$  kg;  $\mu = 2,0\%$ ;  $l = 0,70$ m;  $\gamma_d = 0$ ;  $\omega_d = 3,74$  rad/s (zatem  $\eta = \omega_d/\omega_s = 0,99$ ).

## 6.3. Drgania własne

Dla modelu opisanego powyżej przyjęto obciążenie siłą  $Q(t) = 10$  kN dla chwili  $t_0 = 0$  s i  $Q(t) = 0$  dla pozostałego przedziału czasowego drgań. Odpowiedź dynamiczna układu w czterech przypadkach bez tłumika i z zainstalowanym tłumikiem wahadłowym oraz z dodatkowym tłumikiem wiskotycznym o współczynniku tłumienia 25 kg/s lub 100 kg/s przedstawiona została na rys. 8. Należy zwrócić uwagę, że dla rzeczywistych konstrukcji



Rys. 8. Odpowiedź dynamiczna układu w różnych przypadkach instalacji tłumika

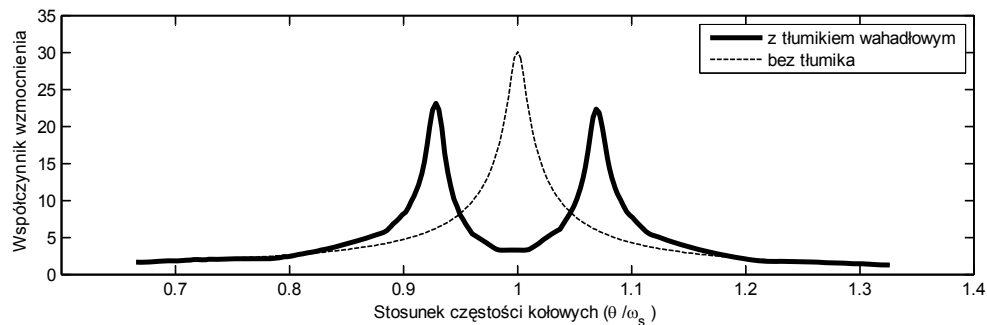
Fig. 8. Dynamic response of the structure in various case of damper installation

tłumika wahadłowego, bez dodatkowego tłumika wiskotycznego, zawsze występuje słabe tłumienie związane z oporem aerodynamicznym i tarcie zawiesia, powodujące zatrzymanie wahadła (inaczej niż ma to miejsce w modelu idealizowanym przedstawionym na rys. 8). Niemniej jednak można zauważyć, że czas, po jakim tłumik stabilizuje drgania konstrukcji na odpowiednio niskim poziomie, jest zbyt duży, co więcej – brak mechanizmów tłumienia drgań własnych tłumika powoduje, że po pewnym czasie tłumik staje się dla konstrukcji wzbudnikiem. Zwróćmy uwagę, że w takim przypadku przemieszczenia w pewnych fragmentach są wyższe niż w przypadku, gdy nie ma tłumika, a co za tym idzie odczuwalne przyspieszenia również będą wyższe niż w kładce nietłumionej. Rozwiązaniem jest dodanie tłumika wiskotycznego. Jak można zauważyć, wystarczy dodanie dowolnego tłumika by jakość pracy wyraźnie się poprawiła. Dołączenie optymalnego tłumika wiskotycznego o tłumieniu wiskotycznym  $c_d = 100$  kg/s pozwoliło uzyskać dobrą efektywność i drgania własne zostały stłumione już po kilkunastu sekundach.

#### 6.4. Wymuszenie harmoniczne

Układ zaprezentowany w p. 6.2 został obciążony siłą harmoniczną  $Q(t) = Q_0(t)\sin(\theta t)$ , gdzie  $Q_0 = 1000$  N,  $\theta$  – częstość kątowa wymuszenia harmonicznego.

Współczynnik wzmocnienia w dwóch przypadkach z zainstalowanym tłumikiem drgań i bez niego został przedstawiony na rys. 9. Uzyskane wyniki pozwolą określić spodziewaną efektywność pracy tłumika w typowych mostach dla pieszych.



Rys. 9. Współczynnik wzmocnienia dla konstrukcji z tłumikiem wahadłowym i bez niego

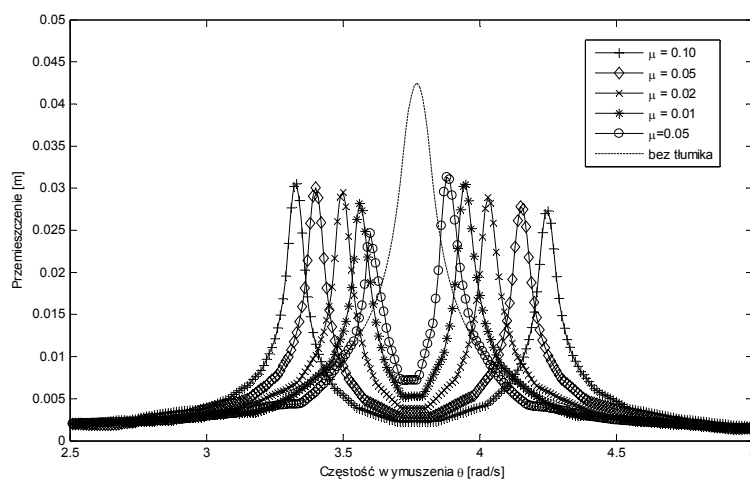
Fig. 9. Magnification factor for the structure with and without pendulum mass damper

##### 6.4.1. Zmiana amplitudy wymuszenia

Dla przyjętego układu dokonano analizy wpływu zmiany amplitudy wymuszenia harmonicznego na wykres współczynnika wzmocnienia. Amplituda przyjmowała wartości 20 N, 200 N, 2 kN, 20 kN, 200 kN. Ostatnia wartość przekraczała dopuszczalne obciążenie i zgodnie z przewidywaniami wykres pokrywał się z wykresem współczynnika wzmocnienia bez tłumika. Jednak należy pamiętać, że takie obciążenie nie jest dopuszczalne dla tej konstrukcji. Wykresy 20 N, 200 N, 2 kN i 20 kN pokryły się, co oznacza, że tłumik w każdym z tych przypadków działa tak samo.

#### 6.4.2. Dobór współczynnika masowego

Dobry w p. 6.2 tłumik został przebadany pod kątem wpływu wielkości masy wahadła na pracę układu. Wyniki przedstawiono na rys. 10. Warto zauważyć, że masa tłumika w lekkich mostach dla pieszych może dochodzić do 15% masy konstrukcji, co stanowić będzie dodatkowe obciążenie przęsła.



Rys. 10. Wykres zależności maksymalnego przemieszczenia środka przęsła mostu od częstotliwości wymuszenia harmonicznego dla różnych wartości współczynnika masowego

Fig. 10. Maximum displacement of a structure in case of various mass ratios

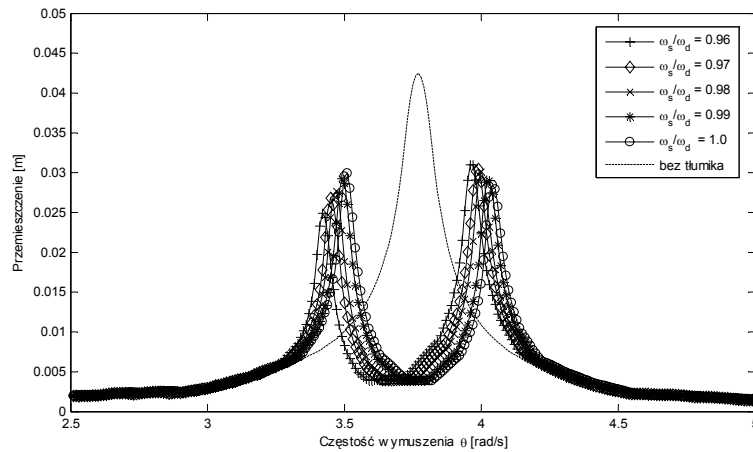
#### 6.4.3. Dostrojenie układu

Układ o parametrach podanych w p. 6.2 został poddany badaniom dla różnych wartości stosunku częstotliwości małych drgań swobodnych tłumika do częstotliwości drgań własnych konstrukcji  $\eta = \omega_d/\omega_s$ . Uzyskane rezultaty zostały przedstawione na rys. 11. Jak można zauważyć, różnice w wynikach są znikome, szczegółowa analiza wykazała, że przyjęta wartość  $\eta = \omega_d/\omega_s = 0,99$  jest właściwa.

#### 6.5. Wymuszenie wywołane przez pieszego o wadze 1000 N i częstotliwości kroków 2 Hz

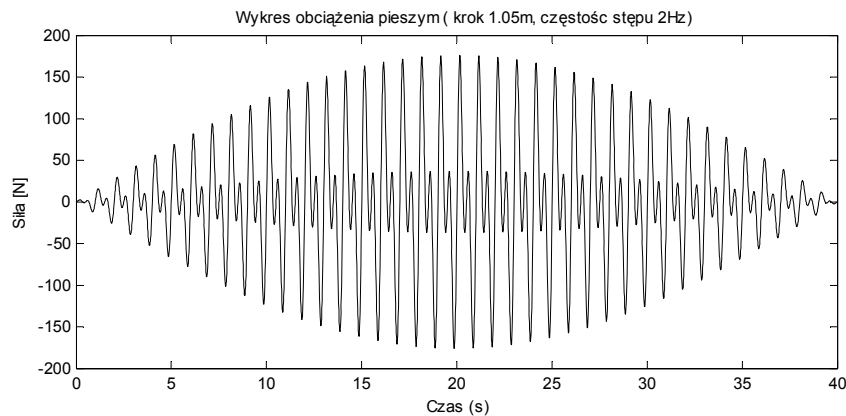
Siłę uogólnioną oddziałującą na obiekt mostowy wyznaczono dla pierwszej postaci drgań własnych, uwzględniając ruch pieszego wg schematu z rysunku 4a. Oddziaływanie to symuluje szybkie przejście osoby o wadze 1000 N przez most w czasie 40 s. Drgania ustają kilka sekund po opuszczeniu kładki przez pieszego.

Należy zwrócić uwagę, że tłumik w takim przypadku ma niską efektywność.



Rys. 11. Wykres zależności maksymalnego przemieszczenia środka przęsła mostu od częstości wymuszenia harmonicznego dla różnych wartości strojenia

Fig. 11. Maximum displacement of a structure in case of various frequency ratios



Rys. 12. Wykres oddziaływania pieszego w przypadku szybkiego chodu

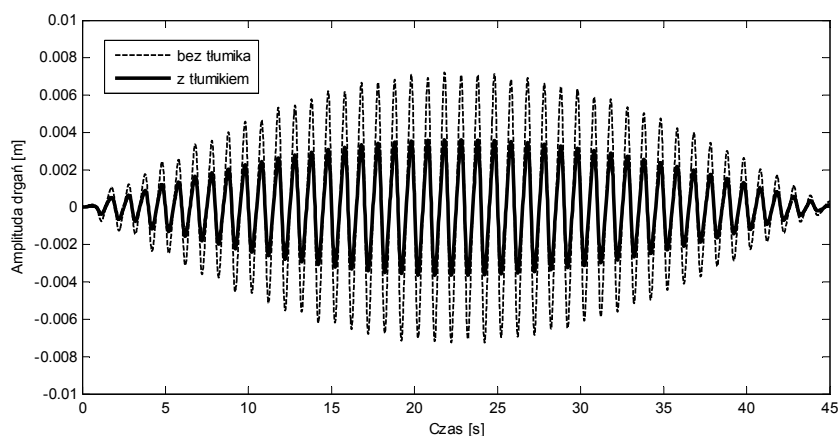
Fig. 12. Dynamic action caused by pedestrian in case of fast walk

#### 6.6. Wymuszenie wywołane przez pieszego o wadze 700 N i częstotliwości kroków 1,2 Hz

Siłę uogólnioną oddziałującą na obiekt mostowy wyznaczono dla pierwszej postaci drgań własnych, uwzględniając ruch pieszego wg schematu z rysunku 4b. Ruch ten symuluje szybkie przejście osoby o wadze 700 N przez kładkę w czasie 65 s. Należy zauważyć, że drgania rezonansowe w kładce bez tłumika nie ustają długo po zejściu pieszego z pomostu. Tłumik w tym przypadku bardzo skutecznie tłumil wywołane drgania mostu dla pieszch.

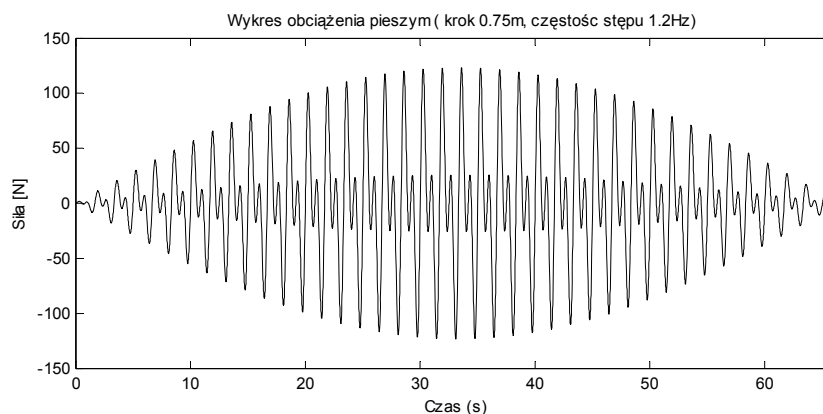
### 6.7. Oddziaływanie dynamiczne tłumu pieszych

Dla przypadku stałego wymuszenia powolnym ruchem tłumu (ok. 30 osób na kładce w tym samym czasie) z częstotliwością rezonansową kroków wykonano próbę obciążenia w czasie 300 s. Po około 100 s drgania ustabilizowały się. Na rysunku 13 pokazano 50 s ustabilizowanych drgań pomiędzy 150 s a 200 s. Można zauważyć, że bez tłumika amplituda drgań dochodzi do ponad 0,5 m, z tłumikiem jest to mniej niż 10 cm. Należy zwrócić uwagę, że przy takim obciążeniu kładka powinna być sztywniejsza.



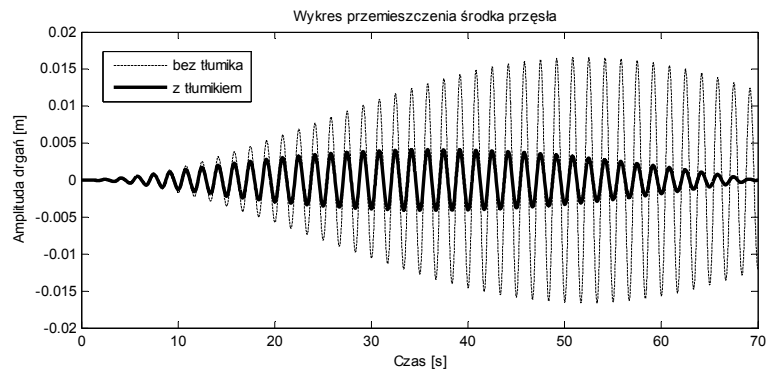
Rys. 13. Wykres odpowiedzi dynamicznej mostu w środku przęsła z tłumikiem i bez niego

Fig. 13. Dynamic response of footbridge with and without pendulum mass damper



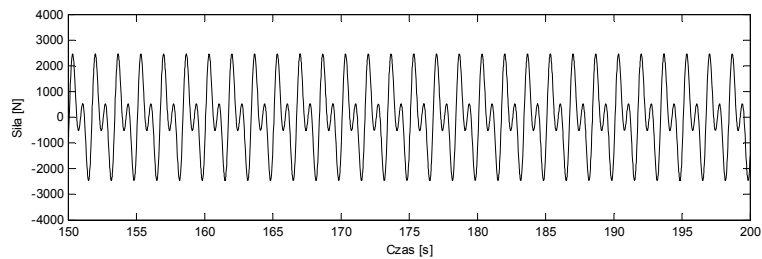
Rys. 14. Wykres oddziaływania pieszego w przypadku szybkiego chodu

Fig. 14. Dynamic action caused by pedestrian in case of slow walk



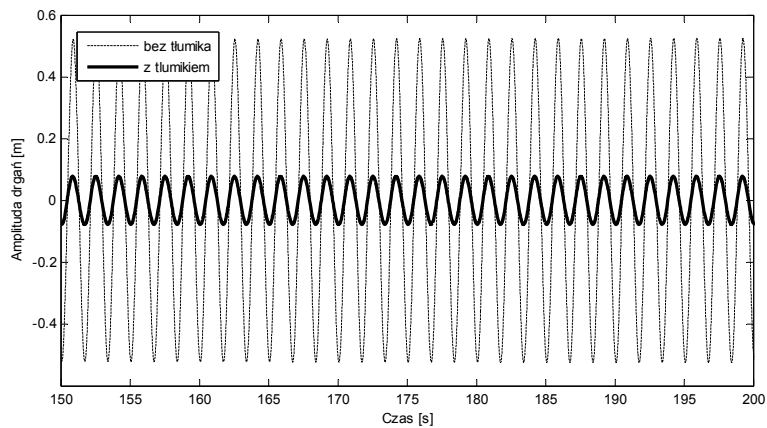
Rys. 15. Wykres odpowiedzi dynamicznej mostu w środku przęsła z tłumikiem i bez niego

Fig. 15. Dynamic response of a footbridge with and without pendulum mass damper



Rys. 16. Wykres oddziaływania dynamicznego tłumy

Fig. 16. Dynamic action caused by many pedestrians



Rys. 17. Wykres odpowiedzi dynamicznej układu przy ruchu tłumy

Fig. 17. Dynamic response of the structure in case of heavy crowd

## 7. Wnioski

Jak wykazano w pracy, masowe tłumiki wahadłowe pomimo prostej konstrukcji oferują zadowalającą efektywność pracy. Problemem może być nieliniowość zagadnienia, w szczególności zależność pomiędzy częstotliwością drgań własnych wahadła a maksymalnym wychyleniem. Zakres efektywnej pracy zawiera się w dość szerokim paśmie częstotliwości wymuszenia, bliskiej częstotliwości drgań własnych konstrukcji. Jednakże poza tym obszarem praca tłumika nie ma negatywnego wpływu na konstrukcję. Dobre wyniki przy tłumieniu drgań uzyskano dla każdej z przyjętych wartości parametru strojenia tłumika. Ze względu na wolne tłumienie drgań własnych wahadła wymagane będzie stosowanie dodatkowych urządzeń powodujących tłumienie drgań wahadła, takich jak dodatkowe tłumiki wiskotyczne.

Przedstawione analizy numeryczne wykazały, że proponowany tłumik wahadłowy, w szczególności z dodatkowym tłumikiem wiskotycznym, może znaleźć szerokie zastosowanie w typowych mostach dla pieszych. Redukcja drgań spowodowanych wymuszeniami harmonicznymi i oddziaływaniem pieszych w wybranych przypadkach osiągała 90%.

Pominięta w tym artykule kwestia doboru dodatkowych tłumików wiskotycznych została podjęta w późniejszych opracowaniach, np. w artykule [7].

## Literatura

- [1] Norma Europejska EN 1991-2:2007 (Eurocode 1) – Actions on structures.
- [2] Polska Norma Budowlana PN-85/S-10030 – *Konstrukcje mostowe. Obciążenia*.
- [3] Pańtak M., *Analiza komfortu użytkowania stalowych kładek dla pieszych podatnych na wpływy dynamiczne*, rozprawa doktorska, Kraków 2007.
- [4] Bachman H. [et. al.], *Vibrations induced by people, Vibrations problem in structures*, Wiedeń 1991.
- [5] Michałowski T., *Analiza aerodynamiczna sztywności przestrzennej lekkich stalowych kładek dla pieszych*, rozprawa doktorska, Kraków 2002.
- [6] Flaga A., Polak M., *Non-linear numerical study of a single degrees of freedom system equipped with a pendulum mass damper at its high vibration amplitude*, Environmental Effects on People and Building VI, Kraków 2010.
- [7] Flaga A., Polak M., *Effectiveness of non-linear tuned viscous-pendulum damper in horizontal vibration reduction of footbridges*, Footbrige 2011, Wrocław 2011.