MECHANIKA
CZASOPISMO TECHNICZNE
TECHNICAL TRANSACTIONS
MECHANICS
WYDAWNICTWO POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ
1-M/2011
ZESZYT 2
ROK 108
ISSUE 2
YEAR 108

GRZEGORZ CIEPLOK*

WPŁYW MOMENTU HAMUJĄCEGO NA WARTOŚĆ AMPLITUDY DRGAŃ REZONANSOWYCH PODCZAS WYBIEGU MASZYNY WIBRACYJNEJ NAPĘDZANEJ WIBRATOREM BEZWŁADNOŚCIOWYM

THE INFLUENCE OF THE BRAKING TORQUE ON THE RESONANCE AMPLITUDE VIBRATIONS DURING THE RUN DOWN OF VIBRATORY MACHINE DRIVEN BY AN INERTIAL VIBRATOR

S t r e s z c z e n i e

W artykule przedstawiono metodę wyznaczenia wartości amplitudy drgań rezonansowych maszyny wibracyjnej napędzanej wibratorem bezwładnościowym. Metoda obejmuje maszyny, których zawieszenie ma cechę symetrii i dotyczy rezonansu wzbudzanego w fazie wybiegu maszyny. Wpływ momentu hamującego na wartość amplitudy drgań rezonansowych ujęto w formie mapy konturowej i wzoru zależnego od bezwymiarowych parametrów maszyny.

Słowa kluczowe: *rezonans przejściowy, maszyny wibracyjne, wybieg*

A b s t r a c t

The method of determining the value of the amplitude of resonance vibrations of the vibratory machine driven by inertia vibrator was described in the paper. The method includes the machine, which the suspension is a feature of symmetry and affects the resonance in the run down process. Effect of braking torque on the value of the resonance amplitude is shown in the form of contours map and the mathematical formula dependent on dimensionless parameters of the machine.

Keywords: *transient resonance, vibratory machines, run down*

* Dr hab. inż. Grzegorz Cieplok, Katedra Mechaniki i Wibroakustyki, Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki, AGH Akademia Górniczo-Hutnicza.

Oznaczenia

m_k	– masa korpusu maszyny [kg]
m	– masa wibratora [kg]
m_c	– masa części drgającej maszyny [kg]. W artykule: $m_c = m_k + m$
e	– promień niewyważenia wibratora [m]
k	– współczynnik sprężystości podparcia maszyny [N/m]
b	– współczynnik tłumienia wiskotycznego podparcia maszyny [Ns/m]
M_{el}	– moment napędowy działający na wibrator [Nm]
φ	– kąt obrotu wibratora [rad]
J_{zr}	– zredukowany na kąt φ masowy moment bezwładności układu napędowego i wibratora [kgm^2]
ω	– prędkość kątowa wibratora [rad/s]
ω_0	– częstość drgań własnych nietłumionych masy drgającej maszyny [rad/s]
γ	– liczba tłumienia. W artykule $\gamma = \dfrac{b}{2\sqrt{km_c}}$
α	– współczynnik zwielokrotnienia amplitudy drgań korpusu maszyny podczas przejścia przez rezonans. W artykule: $\alpha = \dfrac{A_{\mathrm{rez}} m_c}{me}$

1. Wstęp

Maszyny wibracyjne wprowadzane do drgań za pomocą wibratora bezwładnościowego mogą podlegać w fazach rozruchu i wybiegu silnym drganiom, których amplitudy przekraczają wielokrotnie amplitudę drgań stanu ustalonego. Zjawisko to związane jest z przejściem siły wymuszającej pochodzącej od niewyważonej masy wibratora przez zakres częstości rezonansowych związanych z układem masa drgająca maszyny–zawieszenie sprężyste. Zwielokrotnienie amplitudy drgań korpusu maszyny szczególnie wyraźnie występuje w fazie wybiegu swobodnego, kiedy masa niewyważona wibratora hamowana jest tylko niewielkimi oporami ruchu stawianymi przez układ zewnętrzny i momentem pochodzącym od wzajemnego oddziaływania masy korpusu maszyny i masy niewyważonej wibratora [4].

Zagadnienie określenia wartości amplitudy drgań w stanach rezonansu przejściowego podejmowane było w piśmiennictwie naukowym wielokrotnie. Wymienić tu można prace: F. Lewisa, A. Kaca, A. Dorninga, I. Fernlunda, I. Hirano, F. Leula, T. Banaszewskiego i W. Turkiewicza [2], R. Markerta i M. Seidlera [8].

Zasadniczą trudnością w stosowaniu wzorów podanych w pracach ww. autorów jest konieczność określenia wartości przyspieszenia kątowego masy niewyważonej wibratora w fazie przechodzenia przez strefę częstości rezonansowych. Błędy uzyskane w wyniku niewłaściwego wyznaczenia tego przyspieszenia mogą sięgać nawet kilkuset procent [10].

Wady tej nie mają zależności podane w pracach E. Agranowskiej i I. Blechmana [1] czy J. Michalczyka [9]. W przypadku tej ostatniej autor na podstawie bilansu energii kinetycznej ruchu obrotowego masy niewyważonej wibratora i energii kinetycznej masy części drgającej maszyny określonych dla częstości drgań własnych układu masa drgająca–

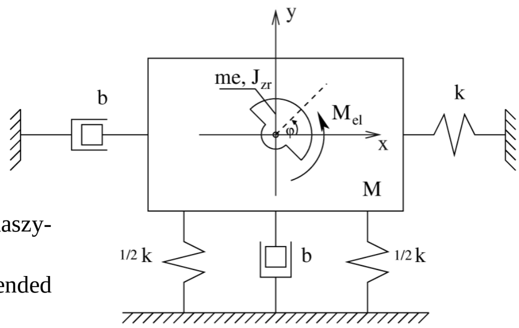
–sprężystość zawieszenia wyznacza zależność, która pozwala oszacować amplitudę drgań rezonansowych dla fazy wybiegu maszyny:

$$A_{\mathrm{rez}} = \sqrt{\frac{J_{zr}}{m_c}} \tag{1}$$

W pracach G. Cieploka [3, 4] opracowana została metoda nomogramowa do określenia współczynnika zwielokrotnienia amplitudy drgań dla faz rozruchu maszyny i wybiegu swobodnego, która również nie wymaga określenia wartości przyspieszenia kątowego wibratora. Ze względu na zgodność wyników uzyskiwanych na podstawie eksperymentów laboratoryjnych z wynikami metody, autor w dalszej części artykułu podejmuje zadanie rozszerzenia jej o przypadki, w których ruch niewyważonej masy wibratora jest hamowany w trakcie wybiegu.

2. Sformułowanie zadania. Opracowanie wyników analizy numerycznej

Zadanie określenia wpływu momentu hamującego na wartość współczynnika zwielokrotnienia amplitudy drgań α dla fazy wybiegu maszyny rozwiązane zostanie na podstawie równania wyprowadzonego przez autora w pracy [4]. Na rysunku 1 przedstawiono model fenomenologiczny maszyny wibracyjnej o trzech stopniach swobody posadowionej na symetrycznym układzie sprężysto-lepkim.



Rys. 1. Model symetrycznie posadowionej maszyny wibracyjnej

Fig. 1. Model of the symmetrically suspended vibratory machine

Dynamiczne równania ruchu maszyny w wirującym z prędkością wirnika układzie współrzędnych wyrażone w jednostkach bezwymiarowych można przedstawić w postaci układu (2):

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4\pi^2} & 0 & -\frac{1}{2\pi}\eta_r & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4\pi^2} & \frac{1}{2\pi}(1+\xi_r) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma}{4\pi^2} & \frac{1}{2\pi}(\sigma\xi_r+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} v_{\xi r} \\ v_{\eta r} \\ \omega_r \\ \xi_r \\ \eta_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_r^2 - (1-\omega_r^2)\xi_r + \frac{1}{\pi}\omega_r v_{\eta r} - \frac{\gamma}{\pi} v_{\xi r} + 2\gamma\omega_r\eta_r \\ -(1-\omega_r^2)\eta_r - \frac{1}{\pi}\omega_r v_{\xi r} - \frac{\gamma}{\pi} v_{\eta r} - 2\gamma\omega_r\xi_r \\ -\frac{\sigma}{\pi} v_{\xi r}\omega_r + \sigma\eta_r\omega_r^2 + q \\ v_{\zeta r} \\ v_{\eta r} \end{bmatrix} \tag{2}$$

gdzie:

ξ_r, η_r – współrzędne ruchu środka masy korpusu maszyny po transformacji do wirującego układu współrzędnych,

$v_{\xi r}$, $v_{\eta r}$ – prędkości współrzędnych ruchu środka masy korpusu po transformacji,

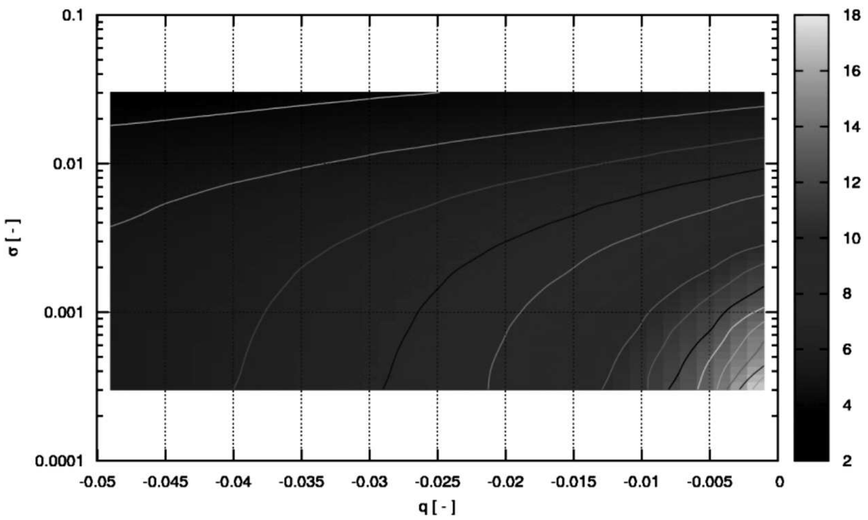
ω_r – bezwymiarowa prędkość kątowa wibratora odniesiona do częstości drgań własnych układu: korpus maszyny–zawieszenie sprężyste.

Występujące w równaniach parametry stosunkowe:

$$\sigma = \frac{m^2 e^2}{m_c J_{\mathrm{zr}}} \quad \gamma = \frac{b}{2\sqrt{m_c k}} \quad q = \frac{M_{el}}{J_{\mathrm{zr}}} \frac{1}{\omega_0^2} \tag{3}$$

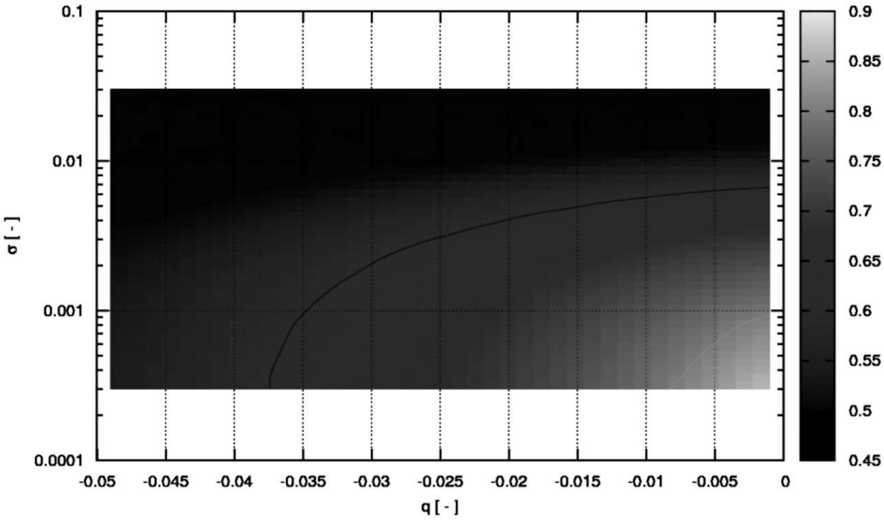
stanowią podstawę, na której opierają się wszelkie analizy przeprowadzone z użyciem metody. Parametry te pozwalają wyrazić rozwiązania układu równań ruchu nie w funkcji sześciu parametrów fizycznych maszyny, tj. masy części drgającej m_c, zredukowanego momentu bezwładności J_{zr}, niewyważenia statycznego wibratora me, momentu siły wymuszającego ruchu wibratora M_{el} oraz dwóch stałych k i b związanych z parametrami zawieszenia maszyny, lecz tylko w funkcji trzech.

Na tej podstawie uzyskano mapy konturowe przedstawione na rys. 2 i 3. Pierwsza z nich przedstawia wartość współczynnika zwielokrotnienia amplitudy drgań rezonansowych α w funkcji parametrów σ i q, druga – wartości bezwymiarowej częstości rezonansowej ω_{r_rez}.



Rys. 2. Wartość współczynnika α w funkcji parametrów σ i q

Fig. 2. The α coefficient depending on the σ and q parameters



Rys. 3. Wartość bezwymiarowej częstości rezonansowej ω_{r_rez} w funkcji parametrów σ i q

Fig. 3. The dimensionless resonance frequency ω_{r_rez} depending on the σ and q parameters

Mapa z rys. 2 stała się podstawą do przeprowadzenia badań nad doborem funkcji aproksymującej jej powierzchnię. Zaproponowana przez autora funkcja przyjęła postać:

$$\alpha = (a_2 - a_3 \ln \sigma) e^{-a_1 q} + a_4 \tag{4}$$

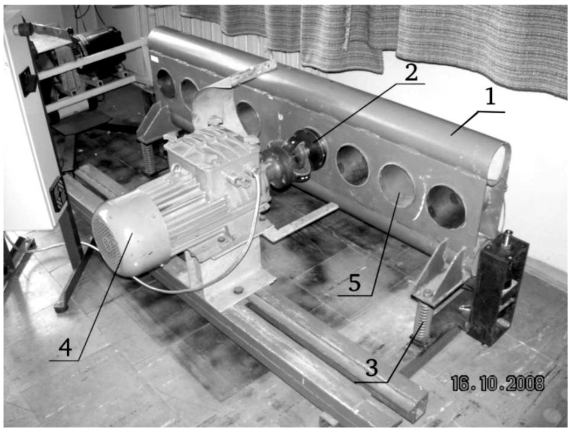
gdzie:

dla:	dla:	
$\sigma \in (0{,}0003; 0{,}03)$	$\sigma \in (0{,}0003; 0{,}03)$	
$q \in (0{,}001; 0{,}049)$	$q \in (0{,}05; 1{,}2)$	
$a_1 = 49{,}51$	$a_1 = 6{,}75$	(5)
$a_2 = -9{,}51$	$a_2 = 2{,}57$	
$a_3 = 2{,}68$	$a_3 = 0{,}31$	
$a_4 = 4{,}42$	$a_4 = 1{,}33$	

3. Weryfikacja numeryczna

W celu określenia przydatności wzoru (4) przeprowadzono badania symulacyjne. Obiektem, na podstawie którego przygotowano model cyfrowy, była maszyna laboratoryjna przedstawiona na rys. 4.

Maszyna składała się z masywnego korpusu posadowionego na czterech symetrycznie rozmieszczonych sprężynach stalowych. Współczynniki sprężystości na kierunku wzdłuż osi sprężyny i prostopadle do niej różnią się istotnie. Maszyna do drgań wprawiana jest w ruch za pomocą wibratora bezwładnościowego, którego gniazdo jest oddalone od środka



Rys. 4. Stanowisko laboratoryjne: 1 – korpus maszyny, 2 – wibrator, 3 – sprężyna, 4 – silnik
Fig. 4. Laboratory Stand: 1 – machine body, 2 – vibrator, 3 – spring, 4 – motor

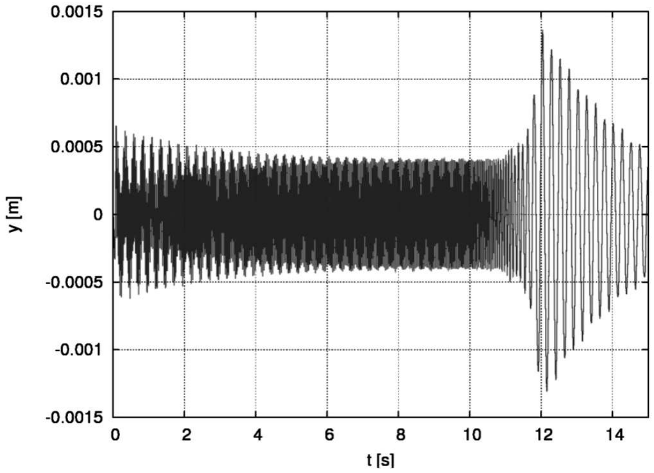
masy korpusu maszyny. Masa niewyważona wibratora napędzana jest silnikiem indukcyjnym pierścieniowym. Do opisu ruchu maszyny przyjęto cztery współrzędne uogólnione – trzy do opisu ruchu płaskiego korpusu, czwarta do opisu ruchu masy niewyważonej. Silnik napędowy opisano charakterystyką mechaniczną wyznaczoną wg równania Klossa. Dynamiczne równania ruchu maszyny przedstawiono we wzorze (6). Szczegółowy opis równań wraz wartościami parametrów można znaleźć w pracy [4] na stronach 69-72.

$$\begin{bmatrix} m_k + m & 0 & 0 & -me\sin(\varphi) \\ 0 & m_k + m & ma & m\cos(\varphi) \\ 0 & ma & J_{sk} + ma^2 & \mathrm{ma}\cos(\varphi) \\ -me\sin(\varphi) & m\cos(\varphi) & ma\cos(\varphi) & J_{ws} + me^2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_s \\ v_y \\ \omega_\beta \\ \omega_\varphi \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} me\omega_\varphi^2\cos(\varphi) - 2b_x(v_x + h\omega_\beta) - 2k_x(x_s + h\beta) \\ me\omega_\varphi^2\sin(\varphi) - 2b_y v_y - 2k_y y_s \\ ma\omega_\varphi^2\sin(\varphi) - 2k_y b^2\beta - 2hk_x(x_s + h\beta) - 2b_y b^2\omega_\beta - 2hb_x(v_x + h\omega_\beta) \\ M_{el} \end{bmatrix} \tag{6}$$

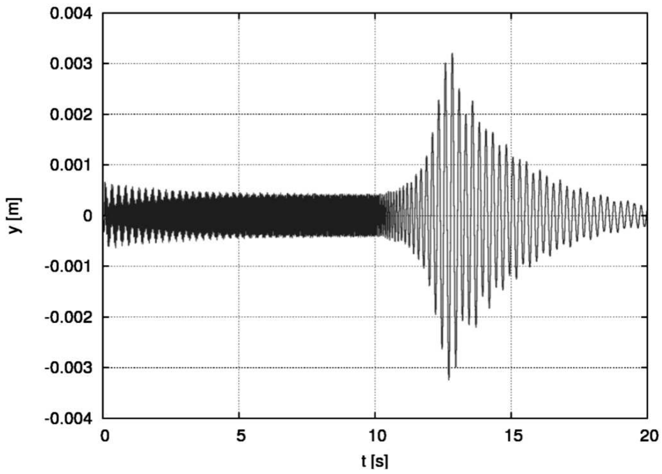
$$M_{el} = \frac{2M_{ut}(\omega_s - \omega_\varphi)(\omega_s - \omega_{st})}{(\omega_s - \omega_\varphi)^2 + (\omega_s - \omega_{st})^2}$$

Przeprowadzono trzy eksperymenty cyfrowe. W pierwszym (rys. 5) wibrator hamowany jest stałą wartością momentu siły wynoszącą około 10% znamionowego momentu silnika. W drugim eksperymencie (rys. 6) opory ruchu zamodelowane zostały w postaci momentu proporcjonalnego do drugiej potęgi prędkości kątowej masy niewyważonej wibratora. Przypadek ten miał na celu zbadanie zgodności wzoru dla przypadku, kiedy istotną rolę odgrywają opory wynikające z oddziaływania łożyska wibratora. W trzecim przypadku, (rys. 7) przeprowadzono symulację przeciwwłączenia silnika.



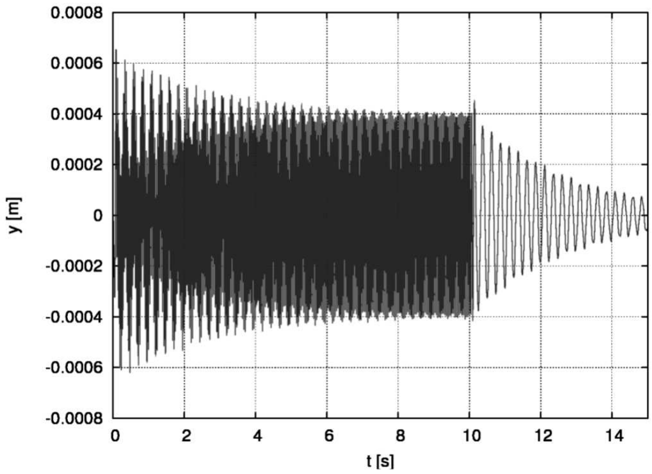
Rys. 5. Przebieg drgań korpusu maszyny w przypadku hamowania momentem stałym

Fig. 5. Vibrations of the machine body for the braking torque constant



Rys. 6. Przebieg drgań korpusu maszyny w przypadku hamowania momentem zależnym od drugiej potęgi prędkości wibratora

Fig. 6. Vibrations of the machine body for the braking torque proportional to the squared speed of the vibrator



Rys. 7. Przebieg drgań korpusu maszyny w przypadku hamowania przeciwwłączeniem silnika
Fig. 7. Vibrations of the machine body for the motor braking case

Wyniki uzyskane na podstawie badań symulacyjnych i wzoru (4) zebrano w tabeli 1.

Tabela 1

Przypadek	**Symulacja**		**Wzór**
	A_{rez} [mm]	**α**	**A**
Hamowanie momentem stałym	1,34	**3,44**	**3,47**
Hamowanie momentem proporcjonalnym do drugiej potęgi prędkości kątowej wibratora	3,24	**8,3**	**7,9–10,4**
Hamowanie przeciwwłączeniem silnika	0,44	**1,12**	**< 1,33**

W pierwszym przypadku otrzymano bardzo dobrą zgodność wartości współczynnika zwielokrotnienia amplitudy drgań uzyskanego na podstawie badań symulacyjnych i wzoru. Błąd nie przekroczył 1%. W drugim przypadku ze względu na zależność częstości rezonansowej od wartości momentu hamującego wyznaczono przedział, w którym powinien się mieścić współczynnik α. Do określenia granic przedziału wartość momentu hamującego wyznaczono dla częstości ω_0 i $½\omega_0$. W trzecim przypadku jako wartość momentu hamującego przyjęto wartość momentu rozruchowego silnika wyliczonego na podstawie wzoru Klossa. Zbyt wysoka wartość tego momentu względem momentu bezwładności J_{zr} ujawniająca się w trakcie wyznaczania parametru q uniemożliwiła skuteczne zastosowanie wzoru (4). Wartość podaną w tabeli wyznaczono dla q = 1,2 czyli dla najwyższej wartości, dla której wzór (4) jest prawdziwy.

4. Wnioski

W artykule wyznaczono wzór, który na podstawie znajomości parametrów fizycznych maszyny pozwala wyznaczyć współczynnik zwielokrotnienia amplitudy drgań dla fazy wybiegu maszyny. Wzór opracowano na podstawie badań numerycznych, w których maszyna posadowiona została na zawieszeniu symetrycznym, którego parametry odpowiadają zawieszeniu wykonanemu ze stali sprężynowej. Jednak – jak wskazują przedstawione badania symulacyjne – wzór może być zastosowany do maszyn, w których występuje niesymetria w wartościach parametrów zawieszenia, jak również przy nieznacznym oddaleniu miejsca zamocowania wibratora od środka masy korpusu maszyny.

Praca wykonana w ramach badań statutowych AGH nr11.11.130.885.

Literatura

[1] Agranowskaja E., Blechman I., *Ob. Ocenkie rezonansnych amplitud kolebanii pri wybiegie system so mnogimi stiepieniami swobody*, Dinamika Maszyn, Nauka, Moskwa 1969.
[2] Banaszewski T., Turkiewicz W., *Analiza wzrostu amplitudy drgań przesiewaczy wibracyjnych podczas rozruchu*, Mechanizacja i Automatyzacja Górnictwa, Nr 11(114), Kraków 1980.
[3] Cieplok G., *Amplituda drgań symetrycznie podpartej maszyny wibracyjnej podczas rezonansu przejściowego*, Czasopismo Techniczne, z. 1-M/2008, Kraków 2008.
[4] Cieplok G., *Stany nieustalone nadrezonansowych maszyn wibracyjnych*, Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne AGH, nr 185, Kraków 2009.
[5] Goliński J.A., *Wibroizolacja maszyn i urządzeń*, WNT, Warszawa 1979.
[6] Kac A.M., *Wynużdjonnyje kolebanija pri prochożdienii czerez rezonans*, Inżyniernyj Sbornik, t. 2, 1947.
[7] Lewis F.M., *Vibration during Acceleration through a Critical Speed*, Journal of Applied Mechanics, 54, 1932.
[8] Markert R., Seidler M., *Analitycally Based Estimation of the Maximum Amplitude During the Passage through Resonansce*, Solid and Structures, 2001.
[9] Michalczyk J., *Maszyny wibracyjne. Obliczenia dynamiczne, drgania, hałas*, WNT, Warszawa 1995.
[10] Michalczyk J., Cieplok G., *Rezonans przejściowy maszyn wirnikowych – przyczyny błędów oszacowań*, Zeszyty Naukowe AGH, Mechanika, t. 13, Kraków 1994.
[11] Michalczyk J., Bednarski Ł., *Graniczne przypadki rozruchu przenośnika wibracyjnego. Procesy wibroakustyczne w technice i środowisku*, Praca zbiorowa pod red. W. Batko i Z. Dąbrowskiego, Kraków 2006.