MECHANIKA
CZASOPISMO TECHNICZNE
TECHNICAL TRANSACTIONS
MECHANICS
WYDAWNICTWO POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ
1-M/2011
ZESZYT 2
ROK 108
ISSUE 2
YEAR 108

MAREK STANISŁAW KOZIEŃ*, DARIUSZ SMOLARSKI**

DOBÓR WARTOŚCI PARAMETRÓW TŁUMIKA DYNAMICZNEGO DRGAŃ Z ZASTOSOWANIEM ARYTMETYKI PRZEDZIAŁOWEJ

CHOSING OF THE VALUES OF DYNAMIC DAMPER WITH APPLICATION OF THE INTERVAL ARITHMETIC

Streszczenie

Przy projektowaniu dynamicznych tłumików drgań należy brać pod uwagę niedokładności wartości poszczególnych parametrów. Każda z tych wartości w zależności od zastosowanej technologii mieści się w dopuszczalnym przedziale wartości. Jedną z metod uwzględniania w analizach niejednoznaczności przyjmowanych wartości jest arytmetyka przedziałowa. W niniejszym artykule pokazano możliwość zastosowania metod arytmetyki przedziałowej przy doborze wartości sztywności sprężyny dołączanego układu dynamicznego.

Słowa kluczowe: *arytmetyka przedziałowa, tłumiki dynamiczne drgań*

Abstract

During the process of dynamic damper design, the influence of uncertainity of values of some parameters should be taken into account. Every of analyzed values is lying in the interval, which length depends of the chosen technology. One of the method of the uncertainity analysis is the interval arithmetic theory. In the paper the possibility of application of the interval arithmetic to determination of the stiffness of the connected dynamical system is presented.

Keywords: *dynamic damper, interval arithmetics*

* Dr hab. Marek S. Kozień, Wydział Mechaniczny, Instytut Mechaniki Stosowanej, Politechnika Krakowska.
** Mgr inż. Dariusz Smolarski, Studium Doktoranckie, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska.

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

1. Wstęp

Do tłumienia drgań rzeczywistych układów dynamicznych, w których można wyróżnić, w widmie częstotliwościowym odpowiedzi, wyraźnie odseparowane od siebie udziały o dużych amplitudach, a wymuszenie ma charakter ustalony, wygodnie jest stosować tłumiki dynamiczne drgań. Tłumik taki dostrajany jest na określoną częstotliwość i w trakcie pracy nie wymaga dostarczania żadnej energii zewnętrznej. Można go stosować zarówno w układach dyskretnych, jak też i ciągłych, przy wyraźnej odpowiedzi określonej postaci drgań. Najdogodniejszą formą tłumika jest jego realizacja mechaniczna. W takim przypadku dostrojenie tłumika polega na takim doborze wartości parametrów układu (dołączonej masy, sztywności sprężyny, współczynnika tłumienia tłumika wiskotycznego), aby jego częstotliwość antyrezonansowa odpowiadała tłumionej częstotliwości drgań układu [2, 4, 9, 10].

W latach sześćdziesiątych ubiegłego wieku sformalizowano podstawy teoretyczne arytmetyki przedziałowej, w której liczba rzeczywista utożsamiona jest z określonym przedziałem na rzeczywistej osi liczbowej. Wprowadzone zostały następnie podstawowe działania: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie. W nawiązaniu do działań możliwe staje się dalej określenie analiz przedziałowych na rzeczywistych funkcjach elementarnych [1, 3, 6, 7, 8].

Przy projektowaniu tłumików należy brać pod uwagę nieokreśloność wartości poszczególnych parametrów. Każda z tych wartości w zależności od zastosowanej technologii mieści się w dopuszczalnym przedziale wartości. Można w tym miejscu zatrzymać się na poziomie wartości wspomnianych parametrów (masa, sztywność, współczynnik tłumienia) albo uwzględnić dokładniej technologię wykonania. Przykładowo przy wyznaczaniu wartości sztywności sprężyny śrubowej należy wziąć pod uwagę nieokreśloność średnicy drutu, średnicy sprężyny oraz własności materiału. Zmienność tych parametrów wpływa na nieokreśloność skuteczności tłumika. W niniejszym artykule przedyskutowano możliwości wykorzystania sformułowań arytmetyki przedziałowej w analizie nieoznaczoności przy doborze sztywności sprężyny dołączonego układu dynamicznego.

2. Arytmetyka przedziałowa

Pojęcie analiz przedziałowych związane jest z uogólnieniem liczby rzeczywistej a na domknięty przedział zbioru liczb rzeczywistych $[a]$ w postaci (1). Należy zauważyć, że liczba rzeczywista posiada wówczas reprezentację przedziału punktowego $[a] = [a, a]$. Wyróżnia się wtedy pojęcia granicy dolnej $\underline{a}$, i granicy górnej $\overline{a}$ liczby $[a]$.

$$[a] = [\underline{a}, \overline{a}] = \{a \in R : \underline{a} \le a \le \overline{a}\} \tag{1}$$

Jeżeli wprowadzić definicję odległości pomiędzy elementami w postaci (2), to zbiór wszystkich rzeczywistych zwartych przedziałów zbioru liczb rzeczywistych ze wspomnianą metryką tworzy przestrzeń metryczną zupełną:

$$q([a],[b]) = \max\{|\underline{a} - \underline{b}|, |\overline{a} - \overline{b})|\} \tag{2}$$

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Na elementach zbioru można zdefiniować znane w arytmetyce działania dodawania odejmowania, mnożenia i dzielenia odpowiednio w postaci (3)–(6):

$$[a]+[b]=[\underline{a}+\underline{b},\overline{a}+\overline{b}] \tag{3}$$

$$[a]-[b]=[\underline{a}-\underline{b},\overline{a}-\overline{b}] \tag{4}$$

$$[a]\cdot[b]=[\min\{\underline{a}\underline{b},\underline{a}\overline{b},\overline{a}\underline{b},\overline{a}\overline{b}\},\max\{\underline{a}\underline{b},\underline{a}\overline{b},\overline{a}\underline{b},\overline{a}\overline{b}\}] \tag{5}$$

$$[a]:[b]=[\min\{\frac{\underline{a}}{\overline{b}},\frac{\underline{a}}{\underline{b}},\frac{\overline{a}}{\underline{b}},\frac{\overline{a}}{\overline{b}}\},\max\{\frac{\underline{a}}{\overline{b}},\frac{\underline{a}}{\underline{b}},\frac{\overline{a}}{\underline{b}},\frac{\overline{a}}{\overline{b}}\}],0\notin[b] \tag{6}$$

Możliwe staje się również zdefiniowane funkcji elementarnych. W sposób ścisły czyni się to w oparciu o rozwinięcie funkcji w szereg Taylora. Okazuje się, że w przypadku funkcji monotonicznych wystarczy obliczyć wartości na końcach przedziału. Natomiast dla funkcji niemonotonicznych konieczne jest badanie warunków na ekstrema lokalne wewnątrz badanego przedziału. Przykładowo monotoniczna funkcja exponent przyjmuje postać (7), a niemonotoniczna funkcja sinus postać (8):

$$e^{[a]}=[e^{\underline{a}},e^{\overline{a}}] \tag{7}$$

$$\sin([a])=\begin{cases}[-1,1], & \text{jeżeli } \frac{2k+1}{2}\pi,\frac{2k+3}{2}\pi\in[a]\\ [-1,\max\{\sin(\underline{a}),\sin(\overline{a})\}], & \text{jeżeli } \frac{4k+3}{2}\pi\in[a]\\ [\min\{\sin(\underline{a}),\sin(\overline{a})\},1], & \text{jeżeli } \frac{4k+1}{2}\pi\in[a]\\ [\min\{\sin(\underline{a}),\sin(\overline{a})\},\max\{\sin(\underline{a}),\sin(\overline{a})\}], & \text{inne}\end{cases} \tag{8}$$

Wprowadzone powyżej definicje umożliwiają wykorzystanie pojęcia arytmetyki przedziałowej do doboru parametrów konstrukcyjnych tłumika dynamicznego. W analizach należy jednakże mieć na uwadze efekt pakowania [3].

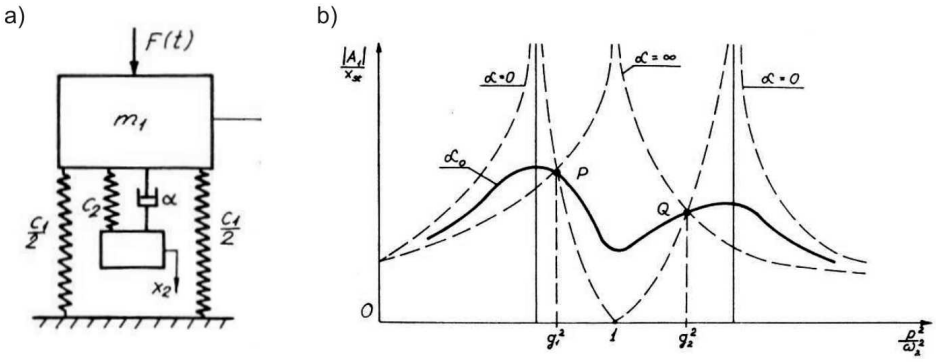
3. Tłumiki dynamiczne drgań

Idea pasywnego tłumienia drgań polega na dołączeniu do układu wykonującego niepożądane drgania, wyraźnie zorientowane na określony stopień swobody ruchu, dodatkowej masy poprzez element sprężysty i tłumienia wiskotycznego, tak aby wykonując drgania, pobierał energię z układu podstawowego, minimalizując ruch tego układu. Podstawowy model realizacji takiego układu eliminacji drgań dla układu podstawowego o jednym stopniu swobody przedstawiono na rys. 1a. Poprawnie, efektywnie działający układ eliminacji drgań powinien pracować w zakresie antyrezonansu (rys. 1b), zatem jest on projektowany na jedną określoną częstość wymuszenia (częstość pracy).

Zasadniczym problemem staje się dobór masy układu dołączonego oraz sztywności łączącej sprężyny dla określonej częstości pracy. Znane są krzywe określające zakres wartości mas dołączonych (m_{dod}) dla poprawnej pracy układu (rys. 2). Krzywe te są

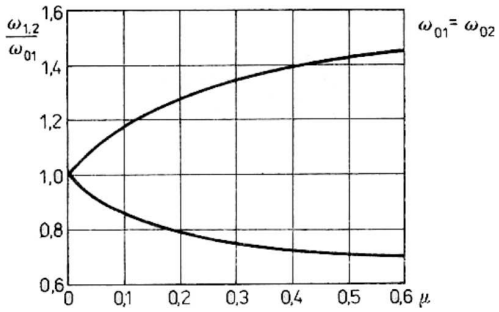
BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

tworzone dla bezwymiarowego parametru μ, zdefiniowanego w postaci (9). Na rysunku 2 przedstawiono dwie krzywe określające wartość granicznej częstości górnej ω_1 i dolnej ω_1, odniesionych do wartości częstości antyrezonansowej ω_{01}.



Rys. 1. Model tłumika dynamicznego (a) i jego charakterystyka (b) [9]

Fig. 1. Dynamic damper model (a) and its chracteristic (b) [9]



Rys. 2. Model tłumika dynamicznego (a) i jego charakterystyka (b) [9]

Fig. 2. Dynamic damper model (a) and its chracteristic (b) [9]

$$\mu = \frac{m_{\text{dod}}}{m} \tag{9}$$

Ponadto mając na względzie konstrukcję układu rzeczywistego, należy liczyć się z nieokreślonością wartości częstości antyrezonansowej, masy układu podstawowego i dołączonego, sztywności wykorzystanej lub wykonywanej sprężyny. W przypadku sprężyny dedykowanej do układu należy mieć na uwadze nieokreśloność np. własności stosowanego materiału, średnicy drutu, efektywnej liczby zwojów.

4. Przykłady zastosowań arytmetyki przedziałowej

Jako przykładowe zastosowanie metody wzięto pod uwagę dobór parametrów tłumika dynamicznego projektowanego dla częstotliwości f_0 = 12,5 Hz. Szacowana masa układu tłumionego wynosiła m = 500 kg. Założono, że dołączana masa ma wartość m_{dod} = 50 kg.

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Zweryfikowano zakres częstotliwości pracy z wykorzystaniem krzywych granicznych. Określono projektowaną wartość sztywności sprężyny *c*. Następnie projektowano sprężynę. Wybrano: średnicę drutu, liczbę zwojów sprężyny, materiał (poprzez zadanie wartości modułu ścinania poprzecznego *G*). Okazało się, że sprężyna o postulowanej sztywności jest możliwa do wykonania. Obliczenia te zostały wykonane przy przyjęciu zdeterminowanych wartości poszczególnych wielkości.

Analizy można również wykonać z użyciem arytmetyki przedziałowej, uwzględniając nieoznaczoność wartości poszczególnych parametrów. Przyjęte w obliczeniach zakresy zmienności zadawanych wielkości pozwalają na uwzględnienie nieoznaczoności wartości parametrów przyjmowanych do analiz oraz niedokładności występujących na etapie wykonawczym. W tabeli 1 zestawiono wartości uzyskane przy podejściu tradycyjnym oraz z wykorzystaniem arytmetyki przedziałowej przy doborze wartości sztywności sprężyny oraz przy szacowaniu sztywności jednej z wykonywanych sprężyn. W kolumnie drugiej podano, czy wartość parametru jest zadawana do obliczeń czy też jest ich rezultatem.

Tabela 1

Porównanie wartości parametrów tłumika dynamicznego w ujęciu tradycyjnym i przedziałowym

PARAMETR	TYP	OZNACZENIE	WARTOŚĆ	
			PUNKTOWA	PRZEDZIAŁOWA
DOBÓR WARTOŚCI SZTYWNOŚCI SPRĘŻYNY				
Częstotliwość	zadawany	f_0 [Hz]	12,5	[12,4, 12,6]
Masa chroniona	zadawany	m [kg]	430	[420, 440]
Masa dołączana	zadawany	m_{dol} [kg]	43	[42, 44]
Parametr tłumika	obliczany	μ [–]	0,1	[0,095, 0,105]
Częstotliwość graniczna górna	obliczany	f_1 [Hz]	14,6	[14,5, 14,8]
Częstotliwość graniczna dolna	obliczany	f_2 [Hz]	10,7	[10,5, 10,8]
Sztywność sprężyny	obliczany	c [N/mm]	265	[255, 276]
SZACOWANIE WARTOŚCI SZTYWNOŚCI WYKONYWANEJ SPRĘŻYNY				
Średnica drutu	zadawany	D [mm]	10	[9,9, 10,1]
Średnica zewnętrzna	zadawany	d_z [mm]	71	[70, 72]
Średnica wewnętrzna	obliczany	d_w [mm]	51	[50,2, 51,8]
Średnica podziałowa	obliczany	d_p [mm]	61	[60,1, 61,9]
Liczba zwojów	zadawany	z [–]	10	[10,10]
Moduł ścinania	zadawany	G [GPa]	79,4	[77, 82]
Sztywność sprężyny	obliczany	c [N/mm]	51,4	[45,9, 57,8]

Porównanie zamieszczonych w tab. 1 rezultatów obliczeń przy podejściu tradycyjnym oraz z wykorzystaniem arytmetyki przedziałowej pokazuje możliwość zastosowania analiz przedziałowych do projektowania tłumików dynamicznych. Metoda ta pozwala w naturalny sposób uwzględnić niepewność wartości niektórych parametrów uwzględnianych w analizach. Warto podkreślić, że wartości zdeterminowane poszczególnych

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

parametrów mieszczą się w przedziałach zmienności tych parametrów w ujęciu przedziałowym.

5. Wnioski

Wyniki przeprowadzonych symulacji pokazują, że metody arytmetyki przedziałowej są bardzo silnym i wygodnym narzędziem znajdującym zastosowanie w analizach nieoznaczoności przy projektowaniu tłumików dynamicznych drgań.

Proponowane podejście może również być zastosowane w projektowaniu innych praktycznych realizacji tłumienia dynamicznego, jak: pasywne układy dołączanych elementów piezoelektrycznych w układzie RLC, cysterny Frahma, rezonatory Helmholtza.

Można rozważać zastosowanie metody interwałowej do bardziej złożonych analiz dynamiki układów dyskretnych, jakie występują np. w zakresach stanów nieustalonych pracy maszyn wibracyjnych.

Literatura

[1] Alefeld G., Herzberger J., *Introduction to interval computations*, Academic Press, New York 1983.

[2] Cieplok G., *Stany nieustalone nadrezonansowych maszyn wibracyjnych*, Rozprawy, Monografie, nr 185, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków 2009.

[3] Galias Z., *Metody arytmetyki przedziałowej w badaniach układów nieliniowych*, Rozprawy, Monografie, Nr 122, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków 2003.

[4] Giergiel J., *Tłumienie drgań mechanicznych*, PWN, Warszawa 1990.

[5] Grimmer M., *Interval arithmetic in Maple with intpakX*, PAMM, Vol. 2, Issue 1, March 2003.

[6] Hansen E., *Topics in interval analysis*, Clarendon Press, Oxford 1969.

[7] Kulisch U., Lohner R., Facius A. (eds.), *Perspectives on enclosure methods*, Springer, Wien–New York 2001.

[8] Moore R.E., *Interval analysis*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1966.

[9] Niziol J., *Podstawy drgań w maszynach*, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 1996.

[10] Piszczek K., Walczak J., *Drgania w budowie maszyn*, PWN, Warszawa 1982.

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ