

WALDEMAR ŁATAS*, JERZY STOJEK**

MODEL DYNAMICZNY HYDRAULICZNEJ POMPY WIELOTŁOCZKOWEJ Z TARCZĄ WYCHYLNĄ

DYNAMIC MODEL OF MULTI-PISTON SWASH-PLATE HYDRAULIC PUMP

Streszczenie

W artykule przedstawiono analizę drgań wzbudzanych w czasie pracy osiowej pompy wielotłoczkowej z tarczą wychylną. Zbudowano model o 13 stopniach swobody, którego dynamikę opisano układem liniowych równań różniczkowych o stałych współczynnikach. Siły wymuszające drgania wyznaczono na podstawie rzeczywistego przebiegu ciśnienia w cylindrach wirnika pompy. Celem przeprowadzonych analiz numerycznych było zbadanie wpływu zmian wartości wybranych parametrów modelu na charakterystyki dynamiczne układu.

Słowa kluczowe: pompa hydrauliczna wielotłoczkowa, tarcza wychylna, drgania wymuszone, symulacje numeryczne

Abstract

The paper presents the vibration analysis of the multi-piston axial swas-plate hydraulic pump. The dynamic model with 13 degrees of freedom is described by a system of linear differential equations with constant coefficients. The forces acting on the pistons were obtained from the actual pressure run in the cylinder port. The aim of the performed numerical simulations was to investigate the influence of the chosen model parameters on the dynamic characteristics of the pump.

Keywords: multi-piston hydraulic pump, swash plate, forced vibrations, numerical simulations

* Dr inż. Waldemar Łatas, Instytut Mechaniki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska.

** Dr inż. Jerzy Stojek, Katedra Automatykacji Procesów, Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki, AGH Akademia Górniczo-Hutnicza.

1. Wstęp

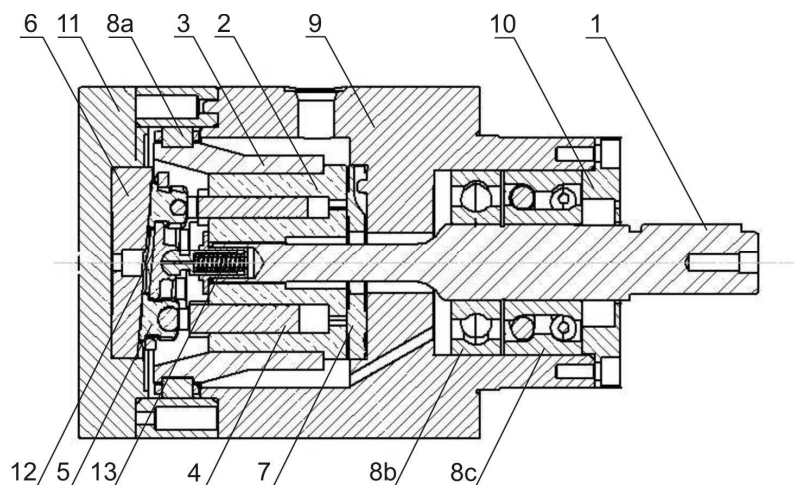
Drgania pomp są jedną z głównych przyczyn hałasu w układach hydraulicznych. Opracowanie efektywnych modeli dynamicznych pozwoliłoby określić główne źródła wibracji oraz mogłoby posłużyć ulepszeniu projektowanych konstrukcji.

Szeroki zakres wydajności oraz zakres nominalnych ciśnień eksploatacji zdecydowały o tym, że obecnie w zastosowaniach przemysłowych często wykorzystywane są osiowe pompy wielotłoczkowe.

W pracy zbudowano model dynamiczny wielotłoczkowej osiowej pompy hydraulicznej z tarczą wychylną typu WPTO2-10 [6]. Celem budowy tego modelu jest zbadanie wpływu wybranych parametrów fizycznych i geometrycznych pompy na jej charakterystyki dynamiczne.

2. Budowa i opis działania pompy WPTO2-10

Głównym zadaniem, jakie spełnia pompa wyporowa w układach napędu i sterowania hydrostatycznego, jest zamiana wejściowej energii mechanicznej na energię hydrostatyczną czynnika roboczego w jej przewodzie tłocznym [4]. W skrócie działanie pompy wyporowej polega na przetłoczeniu określonej objętości czynnika roboczego z przestrzeni ssawnej do tłocznej – przy szczelnym oddzieleniu tych przestrzeni od siebie.



Rys. 1. Schemat konstrukcyjny pompy wielotłoczkowej z tarczą wychylną WPTO2-10:
 1 – wałek; 2 – wirnik; 3 – obudowa wirnika; 4 – tłoczek; 5 – stopka tłoczka;
 6 – tarcza wychylna; 7 – tarcza rozrządca; 8a – łożysko cylindryczne;
 8b, 8c – łożyska kulkowe; 9 – korpus; 10 – pokrywa przednia; 11 – pokrywa tylnia;
 12 – tarcza separatora; 13 – sprężyna dociskowa

Fig. 1. General scheme of the WPTO2-10 axial multi-piston swash-plate pump: 1 – shaft;
 2 – cylinder block; 3 – rotor case; 4 – piston; 5 – piston shoe; 6 – swash plate;
 7 – valve-port plate; 8a – cylindrical bearing; 8b, 8c – ball bearings; 9 – pump shell;
 10 – front lid; 11 – rear lid; 12 – retaining ring; 13 – compression spring

Na rysunku 1 przedstawiono schemat konstrukcyjny pompy hydraulicznej WPTO2-10. Wirnik (2) wraz z zespołem siedmiu tłoczków (4) i cylindrycznym łożyskiem podporowym (8a) zamontowane są współosiowo na wałku napędowym (1) podpartym dwoma łożyskami kulkowymi (8b, 8c). Tłoczki (4) wraz z wirnikiem (2) wykonują ruch obrotowy, a ślizgające się po powierzchni nieruchomej tarczy wychylnej (6) stopki (5) wymuszają ruch postępowo-zwrotny w cylindrach wirnika, odpowiedzialny za przetłaczanie czynnika roboczego. Dodatkowo wirnik (2) ślizga się po nieruchomej tarczy rozrządczą (7), w której wykonane są otwory: ssawny i tłoczny pompy.

Na schemacie konstrukcyjnym pompy można wyróżnić trzy podstawowe zespoły składowe:

- *zespół obudowy*, do którego zaliczono: korpus pompy (9), tylną (11) i przednią (10) pokrywę zamykającą, tarczę wychylną (6), tarczę rozrządczą (7);
- *zespół wirnika*, w skład którego wchodzi: wałek napędowy (1), wirnik (2), obudowa wirnika (3);
- *zespół separatora*, składający się z: tarczy separatora (12), sprężyny dociskowej (13).

3. Model dynamiczny pompy

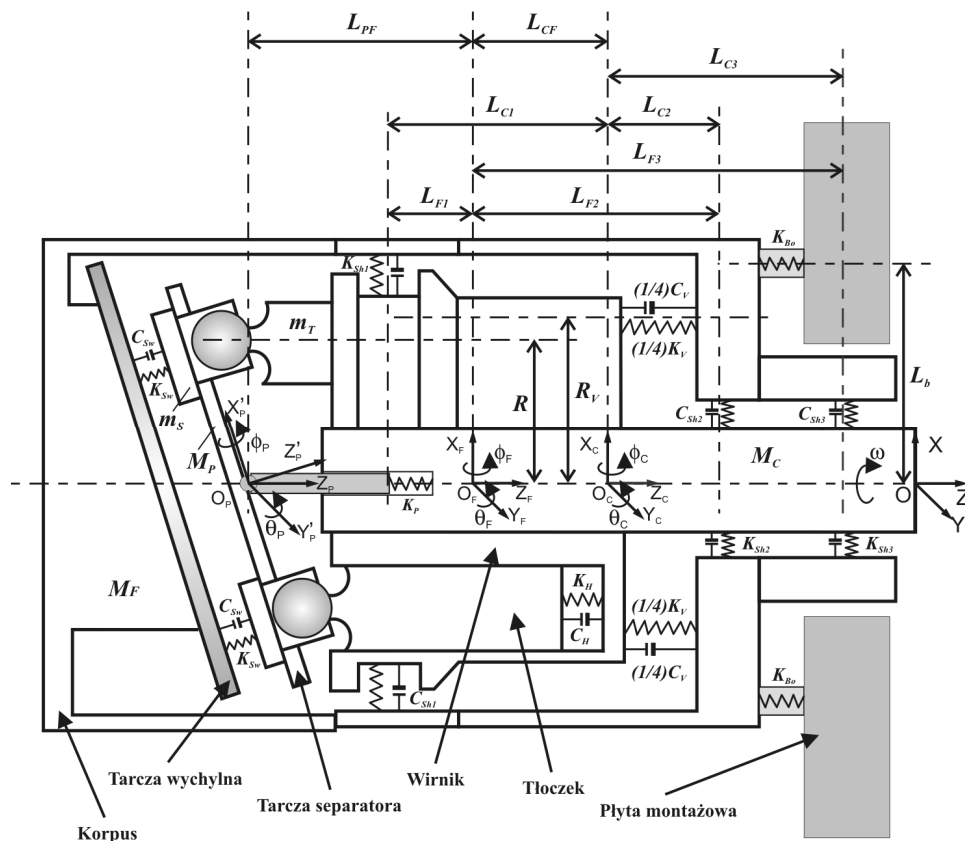
Na schemacie przedstawionym na rys. 2 zaznaczono wszystkie główne elementy pompy oraz wielkości geometryczne. Indeksy użyte w opisach odnoszą się do: F – zespół obudowy; C – zespół wirnika; P – zespół separatora; T – tłoczek; S – stopka.

Przed przystąpieniem do budowy modelu dynamicznego pompy przyjęto następujące założenia:

- nie uwzględniono ruchu obrotowego obudowy wokół osi Z ;
- prędkość obrotowa wałka napędowego jest stała w całym cyklu roboczym: $\omega = \text{const}$;
- pompa jest w stanie równowagi termicznej, wobec czego lepkość oleju nie zmienia się (właściwości fizyczne oleju są stałe);
- przebieg ciśnienia w komorze cylindra wirnika pompy jest funkcją okresową kąta obrotu wałka pompy;
- pominięto siły tarcia pomiędzy stopkami tłoczków a tarczą wychylną;
- przyjęto liniowe własności sprężyste oraz tłumiące warstwy oleju pomiędzy stopkami tłoczków a tarczą wychylną, pomiędzy wirnikiem a tarczą rozrządczą oraz pomiędzy tłoczkami a cylindrami wirnika [2];
- założono małe przemieszczenia i małe kąty obrotu ruchu drgającego elementów składowych pompy;
- pominięto drgania przenoszone od silnika napędowego na pompę – przyjęto, że jest ona zamocowana sprężysto do nieruchomej płyty montażowej.

Uwzględniając więzy kinematyczne pomiędzy elementami pompy, przyjęto do opisu ruchu drgającego 13 stopni swobody:

- *zespół obudowy* – 5 stopni swobody, współrzędne: $X_F, Y_F, Z_F, \phi_F, \theta_F$ – przemieszczenia środka masy zespołu obudowy oraz kąty obrotu wokół odpowiednich osi (rys. 2);
- *zespół wirnika* – 5 stopni swobody, współrzędne: $X_C, Y_C, Z_C, \phi_C, \theta_C$ – przemieszczenia środka masy zespołu wirnika oraz kąty obrotu wokół odpowiednich osi (rys. 2);
- *zespół separatora* – 3 stopnie swobody, współrzędne: Z_P, ϕ_P, θ_P , – przemieszczenie środka masy tarczy separatora oraz kąty obrotu wokół odpowiednich osi.



Rys. 2. Schemat modelu dynamicznego pompy: O_F – środek masy zespołu obudowy;
 O_C – środek masy zespołu wirnika; O_P – środek masy tarczy separatora

Fig. 2. Structural scheme of dynamic model of the axial piston pump: O_F – mass centre of the pump shell; O_C – mass centre of the rotor assembly; O_P – mass centre of the retaining ring

W tabeli 1 zamieszczono opis wielkości występujących na rys. 2 oraz ich wartości liczbowe. Wartości te wyznaczono bezpośrednio na podstawie pomiarów elementów pompy (długości, masy, momentów bezwładności), oszacowano eksperymentalnie (współczynniki tłumienia oraz sztywności łożysk, współczynnik sztywności sprężyny zespołu separatora) oraz dobrano na podstawie literatury [1, 2] (współczynniki tłumienia oraz sztywności warstwy oleju pomiędzy ślizgającymi się elementami).

Wartości parametrów układu

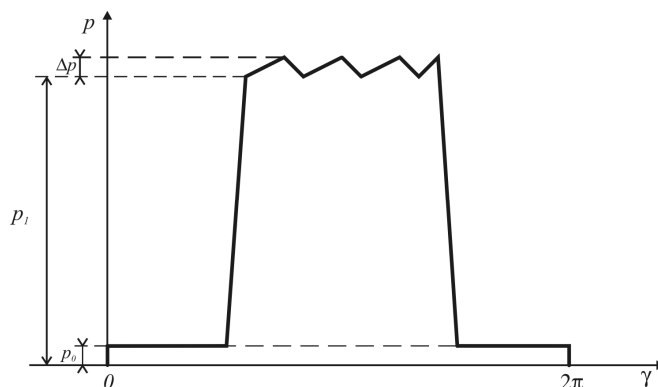
Masy i momenty bezwładności		
<i>Zespół obudowy: M_F – masa zespołu obudowy; I_{Fx}, I_{Fy} – momenty bezwładności względem osi układu przechodzących przez punkt O_F</i>	M_F	12.863 [kg]
	I_{Fx}	614.710×10^{-4} [kgm ²]
	I_{Fy}	621.985×10^{-4} [kgm ²]
<i>Zespół wirnika: M_C – masa zespołu wirnika; I_{Cx}, I_{Cy}, I_{Cz} – momenty bezwładności względem osi układu przechodzących przez punkt O_C</i>	M_C	2.837 [kg]
	I_{Cx}	106.007×10^{-4} [kgm ²]
	I_{Cy}	105.998×10^{-4} [kgm ²]
	I_{Cz}	24.950×10^{-4} [kgm ²]
<i>Zespół separatora: M_P – masa tarczy separatora; I_{Px}, I_{Py}, I_{Pz} – momenty bezwładności względem osi układu przechodzących przez punkt O_P związanych z płaszczyzną tarczy separatora</i>	M_P	0.082 [kg]
	I_{Px}	0.246×10^{-4} [kgm ²]
	I_{Py}	0.246×10^{-4} [kgm ²]
	I_{Pz}	0.437×10^{-4} [kgm ²]
m_S – masa stopki tłoczka	m_S	0.016 [kg]
m_T – masa tłoczka; I_T – moment bezwładności względem prostej przechodzącej przez środek masy prostopadłej do osi tłoczka	m_T	0.048 [kg]
	I_T	0.127×10^{-4} [kgm ²]
Współczynniki tłumienia i sztywności		
C_{Sw} , K_{Sw} – współczynniki tłumienia i sztywności oddziaływania pomiędzy stopką tłoczka a tarczą wychylną	C_{Sw}	4.30×10^7 [N/m]
	K_{Sw}	1.80×10^6 [Ns/m]
C_V , K_V – współczynniki tłumienia i sztywności oddzia- ływania pomiędzy zespołem wirnika a tarczą rozrządczą	C_V	9.80×10^8 [N/m]
	C_{Vs}	3.60×10^6 [Ns/m]
C_{Hz} , K_{Hz} – współczynniki tłumienia i sztywności oddziaływania pomiędzy tłoczkiem a cylindrem wirnika	C_{Hz}	1.20×10^7 [N/m]
	K_{Hz}	3.40×10^4 [Ns/m]
C_{Shx}^1 , K_{Shx}^1 , C_{Shy}^1 , K_{Shy}^1 – współczynniki tłumienia i sztywności łożyska 1 w kierunkach X, Y	K_{Shx}^1 , K_{Shy}^1	1.60×10^9 [N/m]
	C_{Shx}^1 , C_{Shy}^1	1.00×10^7 [Ns/m]
C_{Shx}^2 , K_{Shx}^2 , C_{Shy}^2 , K_{Shy}^2 – współczynniki tłumienia i sztywności łożyska 2 w kierunkach X, Y	K_{Shx}^2 , K_{Shy}^2	3.42×10^7 [N/m]
	C_{Shx}^2 , C_{Shy}^2	1.00×10^5 [Ns/m]
C_{Shx}^3 , K_{Shx}^3 , C_{Shy}^3 , K_{Shy}^3 – współczynniki tłumienia i sztywności łożyska 3 w kierunkach X, Y	K_{Shx}^3 , K_{Shy}^3	4.32×10^7 [N/m]
	C_{Shx}^3 , C_{Shy}^3	2.00×10^5 [Ns/m]
K_P – współczynnik sztywności sprężyny zespołu sepa- ratora	K_P	4.67×10^4 [N/m]
Wielkości geometryczne		
L_{CF} – odległość pomiędzy punktami O_C i O_F L_{PF} – odległość pomiędzy punktami O_P i O_F L_{F1} – odległość pomiędzy środkiem łożyska 1 i punk- tem O_F L_{F2} – odległość pomiędzy środkiem łożyska 2 i punk- tem O_F L_{F3} – odległość pomiędzy środkiem łożyska 3 i punk- tem O_F	L_{CF}	3.50×10^{-3} [m]
	L_{PF}	62.00×10^{-3} [m]
	L_{F1}	55.50×10^{-3} [m]
	L_{F2}	60.50×10^{-3} [m]
	L_{F3}	86.70×10^{-3} [m]

L_{F4} – odległość pomiędzy punktem O_F i płytą montażową	L_{F4}	120.00×10^{-3} [m]
L_{C1} – odległość pomiędzy środkiem łożyska 1 i punktem O_C	L_{C1}	59.00×10^{-3} [m]
L_{C2} – odległość pomiędzy środkiem łożyska 2 i punktem O_C	L_{C2}	57.00×10^{-3} [m]
L_{C3} – odległość pomiędzy środkiem łożyska 3 i punktem O_C	L_{C3}	83.20×10^{-3} [m]
L_b – odległość od osi wałka śrub mocujących obudowę do płyty montażowej	L_b	42.50×10^{-3} [m]
R – odległość osi cylindra wirnika od osi wałka	R	22.50×10^{-3} [m]
R_V – zastępczy promień siły oddziaływania pomiędzy wirnikiem a tarczą rozrządczą	R_V	22.50×10^{-3} [m]
Kąt nachylenia tarczy wychylnej	δ_0	17°
Inne		
Ilość tłoczków	n	7
Prędkość kątowa wirnika	ω	157 [rad/s]
Pole przekroju poprzecznego tłoczka	A	1.77×10^{-4} [m ²]
Połowa długości tłoczka	b	30.00×10^{-3} [m]
Ciśnienie w przewodzie ssawnym	p_0	0.11 [MPa]
Ciśnienie w przewodzie tłocznym	P_1	6.60 [MPa]
Pulsacja ciśnienia	Δp	0.60 [MPa]

4. Siły wymuszające drgania pompy

Przyczyną drgań pompy są siły działające na tłoczki i na wirnik, pochodzące od zmieniającego się w czasie ciśnienia czynnika roboczego w cylindrach wirnika.

Na rysunku 3 przedstawiono aproksymację funkcją odcinkami liniową wyznaczonego eksperymentalnie przebiegu ciśnienia wewnątrz cylindra w funkcji kąta obrotu wirnika γ (rys. 4). Tabela 1 zawiera wartości liczbowe wielkości zdefiniowanych na rys. 3.

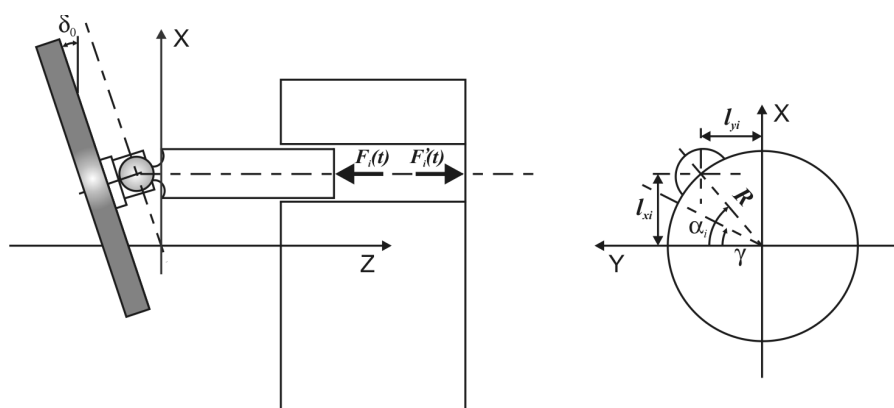


Rys. 3. Przebieg ciśnienia wewnątrz cylindra w funkcji kąta obrotu wirnika

Fig. 3. Cylinder port pressure courses for the working cycle of pump

Gwałtowne zmiany ciśnienia podczas przejścia tłoczków z fazy ssania do fazy tłoczenia są przyczyną widocznych na rys. 3 pulsacji związanych z zaburzeniami przepływu cieczy oraz falami akustycznymi.

Wykorzystując wyrażenie na kąt obrotu dla i -tego tłoczka ($i = 1, 2, \dots, n$, n – liczba tłoczków): $\alpha_i = \omega t + (i-1)\frac{2\pi}{n}$ (rys. 4), można otrzymać z przedstawionego na rys. 3 wykresu ciśnienia (mnożąc go przez wartość pola powierzchni przekroju poprzecznego tłoczka A) siłę $F_i(t)$ działającą na i -ty tłoczek w cylindrze wirnika. Siła ta jest równa co do wartości sile $F'_i(t)$ działającej w tym samym cylindrze na wirnik (rys. 4).



Rys. 4. Schemat sił działających wewnątrz cylindra wirnika

Fig. 4. Scheme referring to instantaneous forces in the cylinder port

Siła $F_i(t)$ działająca na tłoczek przenosi się poprzez jego stopkę na tarczę separatora oraz tarczę wychylną pompy. Ruch obrotowy wirnika powoduje, że zmieniają się w czasie ramiona siły $F'_i(t)$ dającej składowe momentu względem osi X oraz Y (odległości l_{xi} , l_{yi} na rys. 4). Dodatkowym czynnikiem wpływającym na ostateczną postać sił wymuszających jest także zmieniająca się cyklicznie w trakcie ustalonego ruchu obrotowego liczba tłoczków znajdujących się w przestrzeni ssawnej i tłocznej pompy.

5. Równania ruchu

Wykorzystując założenia o małych przemieszczeniach i kątach obrotu oraz używając związków opisujących więzy kinematyczne, zapisano wyrażenia na energię kinetyczną (uwzględniono efekty żyroskopowe), energię potencjalną oraz potencjał rozpraszania.

Korzystając z równań Lagrange'a II rodzaju, otrzymano układ 13 niejednorodnych liniowych równań różniczkowych o stałych współczynnikach.

Wymuszenia drgań występujące w równaniach (8-13) uzyskano na podstawie prac przygotowanych pochodzących od sił $F_i(t)$ działających na tłoczki oraz sił $F'_i(t)$ działających na wirnik we wszystkich cylindrach ($i = 1, 2, \dots, n$).

5.1. Równania ruchu dla zespołu obudowy

$$\begin{aligned}
& M_F \ddot{X}_F + C_{Sw} \sin \delta_0 n \left\{ (\dot{Z}_F - \dot{Z}_P) \cos \delta_0 + (\dot{X}_F - \dot{X}_C) \sin \delta_0 + (L_{CF} + L_{PF}) \dot{\theta}_C \sin \delta_0 - L_{PF} \dot{\theta}_F \sin \delta_0 \right\} \\
& + K_{Sw} \sin \delta_0 n \left\{ (Z_F - Z_P) \cos \delta_0 + (X_F - X_C) \sin \delta_0 + (L_{CF} + L_{PF}) \theta_C \sin \delta_0 - L_{PF} \theta_F \sin \delta_0 \right\} \\
& + C_{Shx}^1 \left[(\dot{X}_F - \dot{\theta}_F L_{F1}) - (\dot{X}_C - \dot{\theta}_C L_{C1}) \right] + C_{Shx}^2 \left[(\dot{X}_F + \dot{\theta}_F L_{F2}) - (\dot{X}_C + \dot{\theta}_C L_{C2}) \right] \\
& + C_{Shx}^3 \left[(\dot{X}_F + \dot{\theta}_F L_{F3}) - (\dot{X}_C + \dot{\theta}_C L_{C3}) \right] + K_{Shx}^1 \left[(X_F - \theta_F L_{F1}) - (X_C - \theta_C L_{C1}) \right] \\
& + K_{Shx}^2 \left[(X_F + \theta_F L_{F2}) - (X_C + \theta_C L_{C2}) \right] + K_{Shx}^3 \left[(X_F + \theta_F L_{F3}) - (X_C + \theta_C L_{C3}) \right] \\
& + 4K_{Box} (X_F + \theta_F L_{F4}) = 0 \tag{1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& M_F \ddot{Y}_F + C_{Shy}^1 \left[(\dot{Y}_F + \dot{\phi}_F L_{F1}) - (\dot{Y}_C + \dot{\phi}_C L_{C1}) \right] + C_{Shy}^2 \left[(\dot{Y}_F - \dot{\phi}_F L_{F2}) - (\dot{Y}_C - \dot{\phi}_C L_{C2}) \right] \\
& + C_{Shy}^3 \left[(\dot{Y}_F - \dot{\phi}_F L_{F3}) - (\dot{Y}_C - \dot{\phi}_C L_{C3}) \right] + K_{Shy}^1 \left[(Y_F + \phi_F L_{F1}) - (Y_C + \phi_C L_{C1}) \right] \\
& + K_{Shy}^2 \left[(Y_F - \phi_F L_{F2}) - (Y_C - \phi_C L_{C2}) \right] + K_{Shy}^3 \left[(Y_F - \phi_F L_{F3}) - (Y_C - \phi_C L_{C3}) \right] \\
& + 4K_{Boy} (Y_F - \phi_F L_{F4}) = 0 \tag{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& M_F \ddot{Z}_F + C_{Sw} \cos \delta_0 n \left\{ (\dot{Z}_F - \dot{Z}_P) \cos \delta_0 + (\dot{X}_F - \dot{X}_C) \sin \delta_0 \right. \\
& \left. + (L_{CF} + L_{PF}) \dot{\theta}_C \sin \delta_0 - L_{PF} \dot{\theta}_F \sin \delta_0 \right\} \\
& + K_{Sw} \cos \delta_0 n \left\{ (Z_F - Z_P) \cos \delta_0 + (X_F - X_C) \sin \delta_0 \right. \\
& \left. + (L_{CF} + L_{PF}) \theta_C \sin \delta_0 - L_{PF} \theta_F \sin \delta_0 \right\} \\
& + K_{Sw} \cos \delta_0 n \left\{ (Z_F - Z_P) \cos \delta_0 + (X_F - X_C) \sin \delta_0 \right\} \tag{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& I_{Fx} \ddot{\phi}_F + C_{Sw} R^2 \frac{n}{2} \cos \delta_0 (\dot{\phi}_F \cos \delta_0 - \dot{\phi}_P) + K_{Sw} R^2 \frac{n}{2} \cos \delta_0 (\phi_F \cos \delta_0 - \phi_P) \\
& + C_{Shy}^1 \left[(\dot{Y}_F + \dot{\phi}_F L_{F1}) - (\dot{Y}_C + \dot{\phi}_C L_{C1}) \right] L_{F1} - C_{Shy}^2 \left[(\dot{Y}_F - \dot{\phi}_F L_{F2}) - (\dot{Y}_C - \dot{\phi}_C L_{C2}) \right] L_{F2} \\
& - C_{Shy}^3 \left[(\dot{Y}_F - \dot{\phi}_F L_{F3}) - (\dot{Y}_C - \dot{\phi}_C L_{C3}) \right] L_{F3} + K_{Shy}^1 \left[(Y_F + \phi_F L_{F1}) - (Y_C + \phi_C L_{C1}) \right] L_{F1} \\
& - K_{Shy}^2 \left[(Y_F - \phi_F L_{F2}) - (Y_C - \phi_C L_{C2}) \right] L_{F2} - K_{Shy}^3 \left[(Y_F - \phi_F L_{F3}) - (Y_C - \phi_C L_{C3}) \right] L_{F3} \\
& + \frac{1}{2} C_V R_V^2 (\dot{\phi}_F - \dot{\phi}_C) + \frac{1}{2} K_V R_V^2 (\phi_F - \phi_C) - 4K_{Boy} (Y_F - \phi_F L_{F4}) L_{F4} + 4K_{Boz} L_b^2 \phi_F = 0 \tag{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& I_{Fy} \ddot{\theta}_F - C_{Sw} L_{PF} \sin \delta_0 n \left\{ (\dot{Z}_F - \dot{Z}_P) \cos \delta_0 + (\dot{X}_F - \dot{X}_C) \sin \delta_0 \right. \\
& \left. + (L_{CF} + L_{PF}) \dot{\theta}_C \sin \delta_0 - L_{PF} \dot{\theta}_F \sin \delta_0 \right\} \\
& - K_{Sw} L_{PF} \sin \delta_0 n \left\{ (Z_F - Z_P) \cos \delta_0 + (X_F - X_C) \sin \delta_0 \right. \\
& \left. + (L_{CF} + L_{PF}) \theta_C \sin \delta_0 - L_{PF} \theta_F \sin \delta_0 \right\} \\
& + C_{Sw} \frac{n}{2} \frac{R^2}{\cos^2 \delta_0} (\dot{\theta}_F - \dot{\theta}_P) + K_{Sw} \frac{n}{2} \frac{R^2}{\cos^2 \delta_0} (\theta_F - \theta_P) \\
& - C_{Shx}^1 \left[(\dot{X}_F - \dot{\theta}_F L_{F1}) - (\dot{X}_C - \dot{\theta}_C L_{C1}) \right] L_{F1} + C_{Shx}^2 \left[(\dot{X}_F + \dot{\theta}_F L_{F2}) - (\dot{X}_C + \dot{\theta}_C L_{C2}) \right] L_{F2} \\
& + C_{Shx}^3 \left[(\dot{X}_F + \dot{\theta}_F L_{F3}) - (\dot{X}_C + \dot{\theta}_C L_{C3}) \right] L_{F3} - K_{Shx}^1 \left[(X_F - \theta_F L_{F1}) - (X_C - \theta_C L_{C1}) \right] L_{F1} \\
& + K_{Shx}^2 \left[(X_F + \theta_F L_{F2}) - (X_C + \theta_C L_{C2}) \right] L_{F2} + K_{Shx}^3 \left[(X_F + \theta_F L_{F3}) - (X_C + \theta_C L_{C3}) \right] L_{F3} \\
& + \frac{1}{2} C_V R_V^2 (\dot{\theta}_F - \dot{\theta}_C) + \frac{1}{2} K_V R_V^2 (\theta_F - \theta_C) + 4K_{Box} (X_F + \theta_F L_{F4}) L_{F4} + 4K_{Box} L_b^2 \theta_F = 0 \quad (5)
\end{aligned}$$

5.2. Równania ruchu dla zespołu wirnika

$$\begin{aligned}
& [M_C + M_P + n(m_T + m_S)] \ddot{X}_C - [M_P (L_{CF} + L_{PF}) + n(m_T + m_S)(L_{CF} + L_{PF}) - nm_T b] \ddot{\theta}_C \\
& - C_{Sw} \sin \delta_0 n \left\{ (\dot{Z}_F - \dot{Z}_P) \cos \delta_0 + (\dot{X}_F - \dot{X}_C) \sin \delta_0 + (L_{CF} + L_{PF}) \dot{\theta}_C \sin \delta_0 - L_{PF} \dot{\theta}_F \sin \delta_0 \right\} \\
& - K_{Sw} \sin \delta_0 n \left\{ (Z_F - Z_P) \cos \delta_0 + (X_F - X_C) \sin \delta_0 + (L_{CF} + L_{PF}) \theta_C \sin \delta_0 - L_{PF} \theta_F \sin \delta_0 \right\} \\
& - C_{Shx}^1 \left[(\dot{X}_F - \dot{\theta}_F L_{F1}) - (\dot{X}_C - \dot{\theta}_C L_{C1}) \right] - C_{Shx}^2 \left[(\dot{X}_F + \dot{\theta}_F L_{F2}) - (\dot{X}_C + \dot{\theta}_C L_{C2}) \right] \\
& - C_{Shx}^3 \left[(\dot{X}_F + \dot{\theta}_F L_{F3}) - (\dot{X}_C + \dot{\theta}_C L_{C3}) \right] - K_{Shx}^1 \left[(X_F - \theta_F L_{F1}) - (X_C - \theta_C L_{C1}) \right] \\
& - K_{Shx}^2 \left[(X_F + \theta_F L_{F2}) - (X_C + \theta_C L_{C2}) \right] - K_{Shx}^3 \left[(X_F + \theta_F L_{F3}) - (X_C + \theta_C L_{C3}) \right] = 0 \quad (6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [M_C + M_P + n(m_T + m_S)] \ddot{Y}_C + [M_P (L_{CF} + L_{PF}) + n(m_T + m_S)(L_{CF} + L_{PF}) - nm_T b] \ddot{\phi}_C \\
& - C_{Shy}^1 \left[(\dot{Y}_F + \dot{\phi}_F L_{F1}) - (\dot{Y}_C + \dot{\phi}_C L_{C1}) \right] - C_{Shy}^2 \left[(\dot{Y}_F - \dot{\phi}_F L_{F2}) - (\dot{Y}_C - \dot{\phi}_C L_{C2}) \right] \\
& - C_{Shy}^3 \left[(\dot{Y}_F - \dot{\phi}_F L_{F3}) - (\dot{Y}_C - \dot{\phi}_C L_{C3}) \right] - K_{Shy}^1 \left[(Y_F + \phi_F L_{F1}) - (Y_C + \phi_C L_{C1}) \right] \\
& - K_{Shy}^2 \left[(Y_F - \phi_F L_{F2}) - (Y_C - \phi_C L_{C2}) \right] - K_{Shy}^3 \left[(Y_F - \phi_F L_{F3}) - (Y_C - \phi_C L_{C3}) \right] = 0 \quad (7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& M_C \ddot{Z}_C + C_{Hz} n (\dot{Z}_C - \dot{Z}_P) + K_{Hz} n (Z_C - Z_P) + C_V (\dot{Z}_C - \dot{Z}_F) + K_V (Z_C - Z_F) \\
& + K_P (Z_C - Z_P) = \sum_{i=1}^n F_i(t) \quad (8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ I_{C_x} + n \left[m_T (L_{CF} + L_{PF} - b)^2 + m_S (L_{CF} + L_{PF})^2 + \frac{1}{2} (m_T + m_S) R^2 \tan^2 \delta_0 \right] \right. \\
& \left. + M_P (L_{CF} + L_{PF})^2 + n I_T \right\} \ddot{\phi}_C \\
& + \left\{ n \left[m_T (L_{CF} + L_{PF} - b) + m_S (L_{CF} + L_{PF}) \right] + M_P (L_{CF} + L_{PF}) \right\} \ddot{Y}_C + I_{C_z} \omega \dot{\theta}_C \\
& - C_{Shy}^1 \left[(\dot{Y}_F + \dot{\phi}_F L_{F1}) - (\dot{Y}_C + \dot{\phi}_C L_{C1}) \right] L_{C1} + C_{Shy}^2 \left[(\dot{Y}_F - \dot{\phi}_F L_{F2}) - (\dot{Y}_C - \dot{\phi}_C L_{C2}) \right] L_{C2} \\
& + C_{Shy}^3 \left[(\dot{Y}_F - \dot{\phi}_F L_{F3}) - (\dot{Y}_C - \dot{\phi}_C L_{C3}) \right] L_{C3} - K_{Shy}^1 \left[(Y_F + \phi_F L_{F1}) - (Y_C + \phi_C L_{C1}) \right] L_{C1} \\
& + K_{Shy}^2 \left[(Y_F - \phi_F L_{F2}) - (Y_C - \phi_C L_{C2}) \right] L_{C2} + K_{Shy}^3 \left[(Y_F - \phi_F L_{F3}) - (Y_C - \phi_C L_{C3}) \right] L_{C3} \\
& + C_{Hz} \frac{n}{2} R^2 \left(\dot{\phi}_C - \frac{\dot{\phi}_P}{\cos \delta_0} \right) + K_{Hz} \frac{n}{2} R^2 \left(\phi_C - \frac{\phi_P}{\cos \delta_0} \right) \\
& + \frac{1}{2} C_V R_V^2 (\dot{\phi}_C - \dot{\phi}_F) + \frac{1}{2} K_V R_V^2 (\phi_C - \phi_F) = R \sum_{i=1}^n F_i(t) \cos \alpha_i \tag{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ I_{C_y} + n \left[m_T (L_{CF} + L_{PF} - b)^2 + m_S (L_{CF} + L_{PF})^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{1}{2} (m_T + m_S) R^2 (\tan^2 \delta_0 + \tan^4 \delta_0) \right] \right\} \ddot{\theta}_C \\
& + \left[M_P (L_{CF} + L_{PF})^2 + n I_T \right] \ddot{\theta}_C - (m_T + m_S) \frac{n}{2} R^2 \frac{\tan^2 \delta_0}{\cos^2 \delta_0} \ddot{\theta}_P + \\
& - \left\{ n \left[m_T (L_{CF} + L_{PF} - b) + m_S (L_{CF} + L_{PF}) \right] + M_P (L_{CF} + L_{PF}) \right\} \ddot{X}_C - I_{C_z} \omega \dot{\phi}_C \\
& + C_{Sw} (L_{CF} + L_{PF}) \sin \delta_0 n \left\{ (\dot{Z}_F - \dot{Z}_P) \cos \delta_0 + (\dot{X}_F - \dot{X}_C) \sin \delta_0 \right. \\
& \left. + (L_{CF} + L_{PF}) \dot{\theta}_C \sin \delta_0 - L_{PF} \dot{\theta}_F \sin \delta_0 \right\} \\
& + K_{Sw} (L_{CF} + L_{PF}) \sin \delta_0 n \left\{ (Z_F - Z_P) \cos \delta_0 + (X_F - X_C) \sin \delta_0 \right. \\
& \left. + (L_{CF} + L_{PF}) \theta_C \sin \delta_0 - L_{PF} \theta_F \sin \delta_0 \right\} \\
& + C_{Shx}^1 \left[(\dot{X}_F - \dot{\theta}_F L_{F1}) - (\dot{X}_C - \dot{\theta}_C L_{C1}) \right] L_{C1} - C_{Shx}^2 \left[(\dot{X}_F + \dot{\theta}_F L_{F2}) - (\dot{X}_C + \dot{\theta}_C L_{C2}) \right] L_{C2} \\
& - C_{Shx}^3 \left[(\dot{X}_F + \dot{\theta}_F L_{F3}) - (\dot{X}_C + \dot{\theta}_C L_{C3}) \right] L_{C3} + K_{Shx}^1 \left[(X_F - \theta_F L_{F1}) - (X_C - \theta_C L_{C1}) \right] L_{C1} \\
& - K_{Shx}^2 \left[(X_F + \theta_F L_{F2}) - (X_C + \theta_C L_{C2}) \right] L_{C2} - K_{Shx}^3 \left[(X_F + \theta_F L_{F3}) - (X_C + \theta_C L_{C3}) \right] L_{C3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +C_{Hz} \frac{n}{2} \frac{R^2}{\cos^4 \delta_0} (\dot{\theta}_C - \dot{\theta}_P) + K_{Hz} \frac{n}{2} \frac{R^2}{\cos^4 \delta_0} (\theta_C - \theta_P) \\
& + \frac{1}{2} C_V R_V^2 (\dot{\theta}_C - \dot{\theta}_F) + \frac{1}{2} K_V R_V^2 (\theta_C - \theta_F) = -\frac{R}{\cos^2 \delta_0} \sum_{i=1}^n F_i(t) \sin \alpha_i
\end{aligned} \quad (10)$$

5.3. Równania ruchu dla tarczy separatora

$$\begin{aligned}
& [M_P + n(m_T + m_S)] \ddot{Z}_P \\
& - C_{Sw} \cos \delta_0 n \left\{ (\dot{Z}_F - \dot{Z}_P) \cos \delta_0 + (\dot{X}_F - \dot{X}_C) \sin \delta_0 + (L_{CF} + L_{PF}) \dot{\theta}_C \sin \delta_0 - L_{PF} \dot{\theta}_F \sin \delta_0 \right\} \\
& - K_{Sw} \cos \delta_0 n \left\{ (Z_F - Z_P) \cos \delta_0 + (X_F - X_C) \sin \delta_0 + (L_{CF} + L_{PF}) \theta_C \sin \delta_0 - L_{PF} \theta_F \sin \delta_0 \right\} \\
& + C_{Hz} n (\dot{Z}_P - \dot{Z}_C) + K_{Hz} n (Z_P - Z_C) + K_P (Z_P - Z_C) = -\sum_{i=1}^n F_i(t)
\end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
& \left[I_{Px'} + \frac{n}{2} (m_T + m_S) \frac{R^2}{\cos^2 \delta_0} \right] \ddot{\phi}_P + I_{Pz'} \omega \dot{\theta}_P + C_{Sw} \frac{n}{2} R^2 (\dot{\phi}_P - \dot{\phi}_F \cos \delta_0) \\
& + K_{Sw} \frac{n}{2} R^2 (\phi_P - \phi_F \cos \delta_0) \\
& + C_{Hz} \frac{n}{2} R^2 \left(\frac{\dot{\phi}_P}{\cos^2 \delta_0} - \frac{\dot{\phi}_C}{\cos \delta_0} \right) + K_{Hz} \frac{n}{2} R^2 \left(\frac{\phi_P}{\cos^2 \delta_0} - \frac{\phi_C}{\cos \delta_0} \right) = -\frac{R}{\cos \delta_0} \sum_{i=1}^n F_i(t) \cos \alpha_i
\end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
& \left[I_{Py'} + \frac{n}{2} (m_T + m_S) \frac{R^2}{\cos^4 \delta_0} \right] \ddot{\theta}_P - I_{Pz'} \omega \dot{\phi}_P - \frac{n}{2} (m_T + m_S) R^2 \frac{\tan^2 \delta_0}{\cos^2 \delta_0} \ddot{\theta}_C \\
& + C_{Sw} \frac{n}{2} \frac{R^2}{\cos^2 \delta_0} (\dot{\theta}_P - \dot{\theta}_F) + K_{Sw} \frac{n}{2} \frac{R^2}{\cos^2 \delta_0} (\theta_P - \theta_F) \\
& + C_{Hz} \frac{n}{2} \frac{R^2}{\cos^4 \delta_0} (\dot{\theta}_P - \dot{\theta}_C) + K_{Hz} \frac{n}{2} \frac{R^2}{\cos^4 \delta_0} (\theta_P - \theta_C) = \frac{R}{\cos^2 \delta_0} \sum_{i=1}^n F_i(t) \sin \alpha_i
\end{aligned} \quad (13)$$

6. Wyniki obliczeń numerycznych

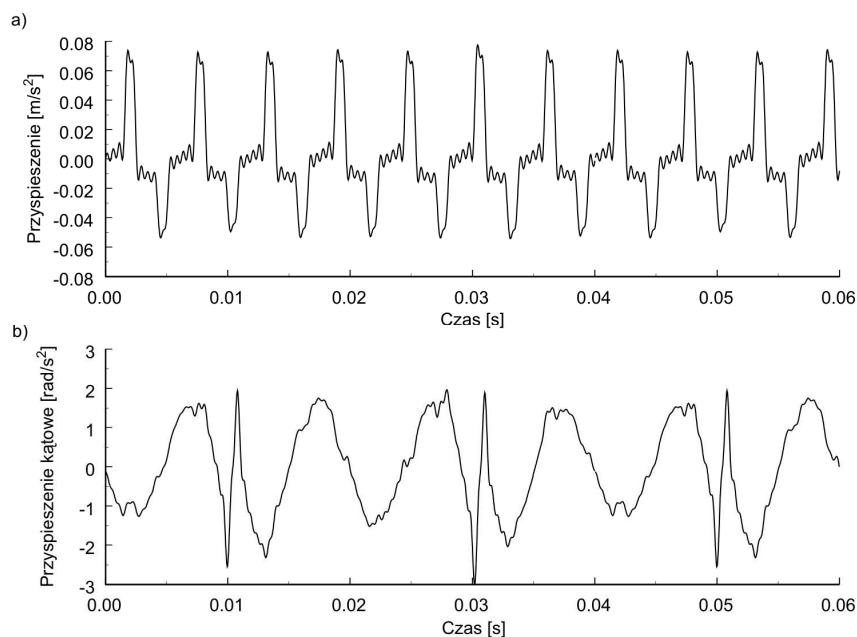
Układ równań ruchu (1-13) został rozwiązany metodą superpozycji. Wymuszenia występujące w równaniach (8-13) rozwinięto w szeregi Fouriera, przy czym liczbę składowych harmonicznnych ograniczono do częstotliwości, powyżej której w układzie wystąpią efekty falowe niedające się opisać stosowanym modelem dyskretnym. Częstotliwość ta została oszacowana na 2000 Hz na podstawie pierwszej częstotliwości drgań

własnych korpusu pompy (rys. 9) wyznaczonej z wykorzystaniem MES. Wartość ta została potwierdzona badaniami doświadczalnymi.

Jako przykład zastosowania modelu dynamicznego zbadano wpływ sztywności mocowania do płyty montażowej na amplitudy drgań obudowy pompy.

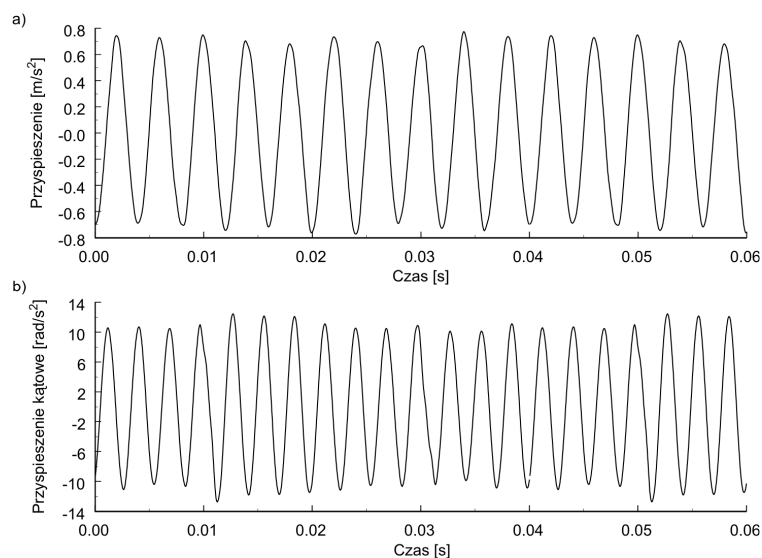
Przebiegi czasowe przyspieszeń $\ddot{X}_F, \ddot{\Phi}_F$ zespołu obudowy (rys. 2) dla różnych wartości współczynników sztywności w kierunkach X, Y, Z (odpowiednio: $K_{Box}, K_{Boy}, K_{Boz}$) śrub mocujących pompę do płyty montażowej (rys. 2) przedstawiono na rys. 5-7.

Porównując wykresy, można stwierdzić, że największe wartości przyspieszenia występują dla współczynników sztywności wynoszących: $K_{Box} = K_{Boy} = 4.0 \cdot 10^6$ [N/m], $K_{Boz} = 1.0 \cdot 10^7$ [N/m]. Dla powyższych współczynników (pozostałe wartości parametrów znajdują się w tab. 1) wyznaczono charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe, na podstawie których otrzymano częstotliwości rezonansowe układu wynoszące: $\omega_1 = 442$ [rad/s], $\omega_2 = 1570$ [rad/s], $\omega_3 = 2225$ [rad/s], $\omega_4 = 2816$ [rad/s]. Okazuje się, że w badanym przypadku druga częstota rezonansowa jest dokładnie dziesięciokrotnością prędkości kątowej wirnika $\omega = 157$ [rad/s].



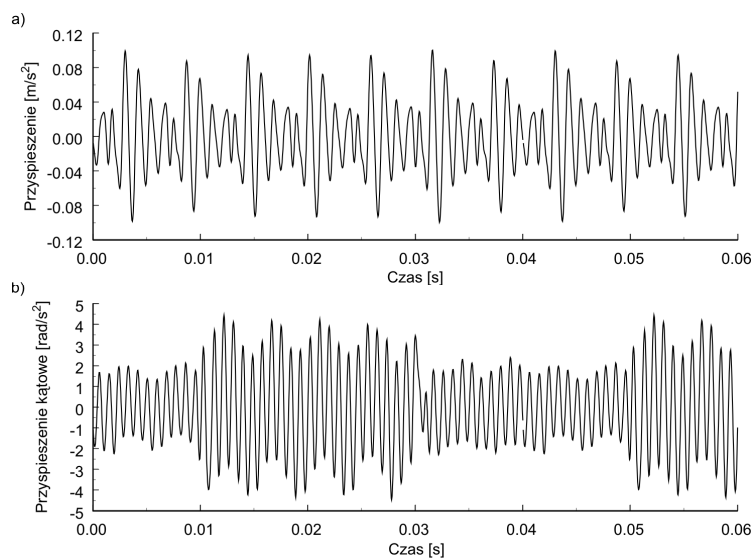
Rys. 5. Przebiegi przyspieszeń $\ddot{X}_F, \ddot{\Phi}_F$ dla: $K_{Box} = K_{Boy} = 4.0 \cdot 10^5$ [N/m],
 $K_{Boz} = 1.0 \cdot 10^6$ [N/m]

Fig. 5. Acceleration courses $\ddot{X}_F, \ddot{\Phi}_F$ for: $K_{Box} = K_{Boy} = 4.0 \cdot 10^5$ [N/m],
 $K_{Boz} = 1.0 \cdot 10^6$ [N/m]



Rys. 6. Przebiegi przyspieszeń \ddot{X}_F , $\ddot{\Phi}_F$ dla: $K_{Box} = K_{Boy} = 4.0 \cdot 10^6$ [N/m],
 $K_{Boz} = 1.0 \cdot 10^7$ [N/m]

Fig. 6. Acceleration courses \ddot{X}_F , $\ddot{\Phi}_F$ for: $K_{Box} = K_{Boy} = 4.0 \cdot 10^6$ [N/m],
 $K_{Boz} = 1.0 \cdot 10^7$ [N/m]



Rys. 7. Przebiegi przyspieszeń \ddot{X}_F , $\ddot{\Phi}_F$ dla: $K_{Box} = K_{Boy} = 4.0 \cdot 10^7$ [N/m],
 $K_{Boz} = 1.0 \cdot 10^8$ [N/m]

Fig. 7. Acceleration courses \ddot{X}_F , $\ddot{\Phi}_F$ for: $K_{Box} = K_{Boy} = 4.0 \cdot 10^7$ [N/m],
 $K_{Boz} = 1.0 \cdot 10^8$ [N/m]

7. Wnioski

Zbudowany model pompy wielotłoczkowej umożliwia badanie wpływu parametrów fizycznych (np. sztywności mocowania) na amplitudy drgań jej elementów składowych (np. obudowy pompy). Pozwala także wyznaczyć składowe dynamiczne siły działające w układzie (np. siły w śrubach mocujących pompę do płyty montażowej). Może zatem służyć do rozwiązania zagadnień związanych z amortyzacją oraz wibroizolacją, umożliwia przeprowadzenie m.in. parametrycznej minimalizacji poziomu drgań. Na podstawie uzyskanych charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych można otrzymać prędkości kątowe wału napędowego, przy których wystąpi rezonans. W artykule przedstawiono wyniki przykładowych obliczeń numerycznych dotyczących wymienionych zagadnień.

W przeprowadzonych obliczeniach część parametrów została przyjęta arbitralnie. Aby wyciągnąć wnioski nie tylko jakościowe, ale i ilościowe, konieczne jest przeprowadzenie identyfikacji doświadczalnej pełnego modelu pompy.

Zbudowany model dynamiczny pompy wielotłoczkowej można rozbudować, uwzględniając drgania przenoszone na pompę z silnika napędowego poprzez płytę montażową, co pozwoli na zbadanie wpływu różnych warunków zamocowania na zachowania się układu.

Pracę wykonano w ramach realizacji projektu badawczego nr N501 325135 finansowanego ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

Literatura

- [1] Nishimura T., Umeda T., Tsuta T., Fujiwara M., Kawakami M., *Dynamic response analysis of a swash-plate type hydraulic piston pump*, Dynamic Fracture, Failure and Deformation, PVP-Vol. 300 ASME (1995), 145-155.
- [2] Chen H. X., Chua Patrick S.K., Lim G.H., *Dynamic vibration analysis of a swash plate type water hydraulic motor*, Mechanism and Machine Theory, 41 (2006), 487-504.
- [3] Edge K.A., Darling J., *The pumping dynamics of swash plate piston pumps*, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Trans. of ASME, 111 (1989).
- [4] Stryczek S., *Napęd hydrostatyczny*, PWN, Warszawa 1995.
- [5] Adams M., *Rotating Machinery Vibration*, CRC Press Inc., 2010.
- [6] <http://www.pzl-wroclaw.com.pl>.