

ALEKSANDER MATUSZAK\*

ALGORYTM WYZNACZANIA STREFY ŚCISKANEJ  
W ZAGADNIENIU ZAKOTWIENŃ ORAZ W PRZYPADKU  
PRZEKROJU ŻELBETOWEGO PROJEKTOWANEGO  
WEDŁUG NLALGORITHM FOR FINDING COMPRESSION REGION  
IN CASE OF ANCHORAGE AND CONCRETE SECTION  
DESIGNED BY WORKING STRESS METHOD

## Streszczenie

W artykule poddano analizie zagadnienie znajdowania strefy ściskanej dla zakotwień oraz dla przekroju żelbetowego projektowanego wg. NL. Sformułowano, opierając się na wielkościach kinematycznych, metodę prowadzącą do rozwiązania zagadnienia. Znalezione przypadki szczególne i na tej podstawie sformułowano algorytm znajdowania strefy ściskanej. Zaproponowano sposób regularyzacji zadania pozwalający uniknąć załamania algorytmu. Podano miarę błędu, która pozwala określić, na ile końcowe rozwiązanie zadania spełnia założenia. Przedyskutowano też stabilność algorytmu i tempo zbieżności. Pokazano przykłady rozwiązań proponowanym algorytmem.

*Słowa kluczowe: zakotwienia, przekrój żelbetowy, metoda naprężeń liniowych*

## Abstract

In this paper algorithm for determining compression region for two problems: anchorage and section designed by working stress are analysed. Special cases which may occur during solution are examined and the robust algorithm is formulated. Regularisation technique is suggested. Solution of example problem are given.

*Keywords: anchorage, concrete cross-section, working stress design*

\* Dr inż. Aleksander Matuszak, Instytut Technologii Informatycznych w Inżynierii Łądowej, Wydział Inżynierii Łądowej, Politechnika Krakowska.

## 1. Wstęp

Metoda naprężeń liniowych (NL) dawniej stosowana była powszechnie do określania nośności przekrojów żelbetowych. Obecnie częściowo została wyparta przez metodę nośności granicznej (plastyczną), która daje oszczędniejsze przekroje. W dalszym ciągu NL do określania nośności stosuje się w przypadku obciążeń o dużej liczbie cykli bądź obciążeń dynamicznych. Ponadto metodę NL stosuje się powszechnie do sprawdzania SGU.

Zakotwienia rozumiane są tutaj jako mocowanie elementu stalowego – poprzez sztywną płytę podstawy – do płaskiego elementu betonowego, z użyciem stalowych łączników. Typowo jest to mocowanie stalowego słupa do betonowej podstawy.

Z punktu widzenia praktyki, zarówno w przypadku zakotwień, jak i przekroju żelbetowego obliczanego wg metody NL, najbardziej kłopotliwym etapem projektowania jest znajdowanie strefy ściskanej betonu.

Można pokazać, że zarówno projektowanie zakotwień, jak i projektowanie przekroju wg NL, są odmianami tego samego zadania [4]. Różnica sprowadza się do uwzględniania bądź pomijania stali w strefie ściskanej. Fakt, że oba zagadnienia sprowadzają się do jednego ogólniejszego zadania, nie ułatwia w żaden sposób rozwiązywania. W ogólnym przypadku wyznaczenie strefy ściskanej pozostaje dość trudnym zadaniem, pomimo względnej prostoty założeń. Trudność polega nie na skomplikowanej teorii, ale na żmudnych obliczeniach. Nie wydaje się, aby istniało proste, ogólne rozwiązanie analityczne tego zadania.

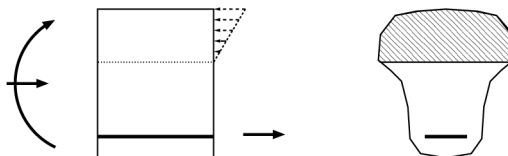
Obecnie używa się komputerów, które nawet złożone obliczenia wykonują błyskawicznie. Jednak komputer, jak każde narzędzie, wnosi swoją specyfikę. Metoda rozwiązywania tworzona pod kątem wymogów techniki komputerowej często znacząco różni się od metody tworzony pod kątem obliczeń analitycznych.

Odmienne stosowanie powoduje, że inne cechy bywają pożądane w obu przypadkach. Dla metod analitycznych ceni się przede wszystkim łatwość użycia i unikanie żmudnych rachunków. Od algorytmu komputerowego wymaga się zwartości i łatwości implementacji. Dlatego metoda tworzona na potrzeby algorytmu komputerowego często korzysta z koncepcji, które wydają się nienaturalne z punktu widzenia metod analitycznych.

Opracowując oprogramowanie do projektowania zakotwień [5], niezbędne było znalezienie skutecznej metody znajdowania strefy ściskanej. Sformułowano więc odpowiedni algorytm, uzyskując dodatkowo algorytm dla NL. Algorytm ten wykazuje bardzo dobre cechy numeryczne, jak zbieżność i stabilność.

Opracowywanie algorytmu zarówno dla zakotwień, jak i NL, wniosło nową jakość, gdyż w przypadku zakotwień niezbędne jest rozwiązanie problemu pojawiających się osobliwości, który rzadko występuje w przypadku NL. Jednak, jeśli problem osobliwości zostanie rozwiązany, to również dla NL uzyskuje się niezawodny program, który nie załamie się nawet w tych rzadko spotykanych przypadkach.

Po przetestowaniu wielu wariantów, od oprogramowania metody obliczeń analitycznych aż do metody zorientowanej na obliczenia komputerowe wraz z algorytmem, można było z całą wyrazistością uświadomić sobie różnice między metodami zorientowanymi na obliczenia analityczne i metodami zorientowanymi na obliczenia komputerowe. Niniejszy artykuł w dużym stopniu podsumowuje również doświadczenia w tej kwestii.



Rys. 1. Schemat pracy przekroju żelbetowego według metody NL

Fig. 1. Concrete cross-section designed by working stress method

## 2. Sformułowanie zadania i założenia

Rozwiązanie zagadnienia będzie sprowadzane do rozwiązania przekroju smukłego pręta pryzmatycznego, belki lub słupa. W przypadku zakotwień jest to spore uproszczenie, jednak praktyka pokazuje, że jest to dostatecznie dobre przybliżenie rzeczywistości.

Rozważane obciążenie ogranicza się do kombinacji czystego zginania i czystego stanu osiowego, a więc przekroju prętowego obciążonego dowolnym układem sił podłużnych i momentów zginających.

Rozwiązanie statyki będzie utożsamiane ze znalezieniem strefy ściskanej. Znając tę strefę, można wyznaczyć zarówno naprężenia w betonie, jak i naprężenia (siły) w stali.

Założono, że przemieszczenia i odkształcenia są nieskończenie małe.

Przyjęto, że oba materiały, zarówno beton, jak i stal, zachowują się liniowo (dokładniej: liniowo dla ustalonego znaku). W ramach teorii pręta smukłego materiały pracują jednowymiarowo. W osiowym stanie naprężenia moduł Younga dla betonu jest  $E^b$ , a dla stali  $E^s$ .

Naprężenie w stali wynosi:

$$\sigma^s = E^s \varepsilon^s \quad (1)$$

Naprężenie w betonie wynosi:

$$\sigma^b = E^b \varepsilon^b \quad (2)$$

W zależności od kontekstu, równania (1) i (2) będą obowiązywały albo zarówno dla ściskania, jak i rozciągania (stal zbrojeniowa), albo tylko dla ściskania (beton), albo tylko dla rozciągania (kotwy).

Ograniczenie równania (1) lub (2) tylko do zakresu ściskania lub rozciągania wprowadza do zadania silną nieliniowość. Skutkuje to tym, że przestaje obowiązywać superpozycja. Nie można wtedy osobno obliczyć naprężeń od stanu osiowego i zginania, a następnie dodać tych wyników, aby uzyskać końcowy stan naprężenia.

Dla precyzji dalszych rozważań przyjmuje się, że ogólny termin „wkładki stalowe” będzie obejmował zarówno stal zbrojeniową, jak i kotwy.

### 2.1. Założenia

Założenia, zarówno dla NL, jak i zakotwień, można jednolicie sformułować w następujący sposób:

- 1) przekroje podlegają zasadzie płaskich przekrojów (Bernoulliego-Eulera),
- 2) beton w strefie ściskanej pracuje liniowo oraz nie przenosi naprężeń w strefie rozciągania,
- 3) stal pracuje liniowo, ale zbrojenie w strefie ściskanej przenosi naprężenia, a kotwy w strefie ściskanej nie przenoszą obciążeń,
- 4) stal jest traktowana jako wkładki miękkie.

W wypadku zakotwień, aby założenie 1 nie odbiegało od rzeczywistego charakteru pracy konstrukcji, niezbędna jest stalowa płyta podstawy, która jest nieskończenie sztywna na zginanie. To odróżnia zakotwienia od np. docisku elementu betonowego do innego elementu betonowego, dlatego przy zakotwieniach najczęściej podaje się to jako osobne założenie.

Pewne nieporozumienia może wprowadzać założenie 4. Będzie ono istotne w dalszej analizie, więc wymaga pewnego komentarza.

Należy zastrzec, że w przypadku NL nie jest to ograniczenie samej metody, a raczej założenie zawężające najczęściej przyjmowane dla przekroju żelbetowego. Czasami jest ono formułowane jawnie (np. [10]), czasami jednak jest pomijane i brak tego założenia prowadzi do błędnych wzorów (por. wzory 7 i 8 w [2]).

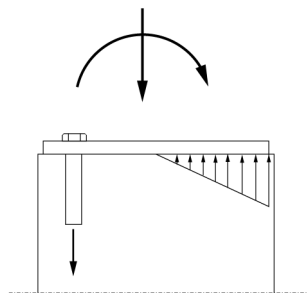
Założenie to może być alternatywnie sformułowane jako: naprężenia w stali zbrojeniowej redukują się do siły skupionej w środku ciężkości pręta. Oznacza to, że rozkład naprężeń w przecie stalowym musi być stały w obrębie pręta. Jest to niespójne z pozostałymi założeniami, gdzie przyjmujemy liniowy rozkład odkształceń (4) i proporcjonalność naprężeń w stali do odkształceń (1). Tak więc zestaw założeń jest wewnętrznie sprzeczny.

Jednak jeśli rozmiar pręta zbrojeniowego jest mały, to odstępstwa od liniowego rozkładu naprężeń są pomijane. Oznacza to też, że mimośród siły skupionej w stosunku do wymiarów pręta, czy też wymiarów przekroju, jest zupełnie zaniedbywalny. W dobrym przybliżeniu wszystkie założenia są więc spełnione.

Istotną konsekwencją takiego założenia jest brak sztywności na zginanie prętów zbrojenia. Ta cecha odróżnia zbrojenie sztywne od miękkiego.

Dla zakotwień nie analizuje się tego aspektu, jednak ponieważ kotwy są typowymi prętami stalowymi o podobnej średnicy jak pręty zbrojenia, więc wydaje się, że należałoby w identyczny sposób traktować ten aspekt dla zakotwień. Dla typowych kotew okrągłych należałoby zakładać zakotwienie miękkie, natomiast w przypadku użycia kształtownika stalowego mówić o zakotwieniu sztywnym.

Przy tych założeniach typowy schemat pracy przekroju żelbetowego jest pokazany na rys. 1, gdzie zaznaczona jest część przekroju z betonem ściskany. Naprężenia w betonie rosną liniowo od zera na osi obrotu przekroju do wartości maksymalnej w górnych włóknach. Często dla ilustracji pokazuje się rysę biegnącą od granicy strefy ściskanej do dolnych włókien, co jest bardzo sugestywne, ale jest uproszczeniem. Również zbrojenie jest narysowane schematycznie, gdyż zamiast zbrojenia rozłożonego w sposób ciągły wzdłuż linii, muszą być dyskretne pręty zbrojeniowe.



Rys. 2. Schemat pracy zakotwienia

Fig. 2. Anchorage to concrete

Schemat pracy zakotwień jest pokazany na rys. 2. Widać zachodzące podobieństwa, jak też pewne różnice, które są pomijane na etapie rozwiązywania statyki, ale zaczynają być istotne przy projektowaniu.

### 3. Układ współrzędnych i oznaczenia

Dosyć istotną kwestią dla spójności i przejrzystości dalszych wyprowadzeń jest używany układ współrzędnych i przyjęta konwencja znakowania.

#### 3.1. Układ współrzędnych

Przyjęto, że przekrój belki lub płyta podstawy (dla zakotwień) leży w płaszczyźnie  $Oxy$ , czyli oś belki lub słupa jest równoległa do osi  $z$  (por. rys. 3).

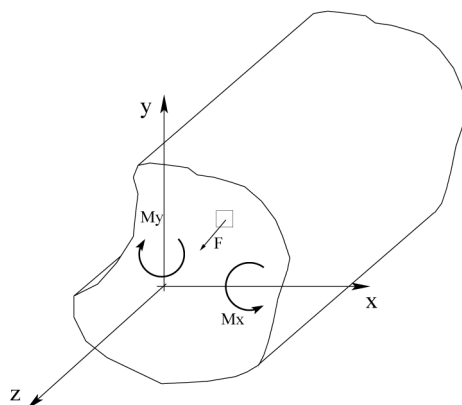
Poza kierunkiem osi pręta nie jest wyróżniany tu żaden punkt ani kierunek. Początek układu nie musi być w środku ciężkości, a osie układu nie muszą pokrywać się głównymi osiami bezwładności przekroju. Wszystkie zależności pozostają ważne w dowolnym układzie współrzędnych.

Obciążenie jest zadawane względem początku układu współrzędnych.

#### 3.2. Konwencje znakowania

Ponieważ zadanie będzie rozpatrywane w ramach teorii belek smukłych, analiza skupia się wyłącznie na naprężeniu normalnym w przekroju. Ignorowane są pozostałe składowe tensora naprężenia. Analogicznie traktowane są odkształcenia. Interesującymi wartościami są: naprężenie normalne  $\sigma_{zz}$ , oznaczane jako  $\sigma$ , oraz analogiczne odkształcenie  $\varepsilon_{zz}$ , oznaczane jako  $\varepsilon$ . Indeksami górnymi  $s$  lub  $b$  będą rozróżniane w razie potrzeby te wielkości odpowiednio dla stali i betonu.

Przyjęto, że dodatnie jest naprężenie rozciągające. W konsekwencji, dodatnia siła  $N$  jest rozciągająca i działa wzdłuż osi  $z$ . Pozostałe siły (poprzeczne) z uwagi na kontekst rozważań będą pomijane. Pomijany jest również moment skręcający działający wokół osi  $z$ .



Rys. 3. Układ współrzędnych i konwencja znakowania momentów

Fig. 3. Coordinate system for cross-section and positive bending moments

### 3.2.1. Momenty zginające

Bardziej kłopotliwe jest znakowanie momentów zginających i kątów obrotu. Można korzystać z iloczynu wektorowego lub wprowadzić inny sposób znakowania.

Do pokazania konwencji znakowania rozważmy elementarną siłę  $F$  będącą wynikiem działania naprężenia  $\sigma$  na wycinku  $\Delta x$  na  $\Delta y$ , położonym w pierwszej ćwiartce układu (por. rys. 3).

Stosowanie iloczynu wektorowego  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$  wprowadza spójne znakowanie pseudo-wektora momentów (i związanych z nimi kątów obrotu), jednak ich znaki są niezgodne z przyzwyczajeniami inżynierskimi. Dodatkowo, wprowadza pozorną asymetrię w równaniach, gdyż równanie względem  $x$  ma inne znaki niż równanie względem  $y$ . Z tego powodu zostanie użyta inna konwencja znakowania. Oznaczenia (indeksy) momentów będą związane z osią, wokół której działa moment. Moment  $M_x$  wywołuje obrót  $\phi_x$  wokół osi  $X$ , a moment  $M_y$  obrót  $\phi_y$  wokół osi  $Y$ . Znaki momentów są tak dobrane, że dodatnia siła  $F$  przy dodatnim  $x$  wywołuje dodatni moment  $M_y = F \cdot x$ . Analogicznie, przy dodatnim  $y$  mamy dodatni  $M_x = F \cdot y$ . Dodatnia siła w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych wywołuje dodatnie momenty.

Znakowanie obrotów musi być identyczne jak momentów. Dodatnie zwroty  $M_x$  i  $M_y$  są pokazane na rys. 3.

### 3.2.2. Krzywizny

Krzywizny definiowane będą jako pierwsze pochodne kątów obrotu:

$$\kappa_x = \frac{\partial \phi_x}{\partial z} \quad \kappa_y = \frac{\partial \phi_y}{\partial z} \quad (3)$$

co pozwoli uniknąć problemów ze znakiem, gdyż jest on uwzględniony w znakowaniu kąta obrotu.

Konsekwencją przyjęcia zasady płaskich przekrojów Bernoulliego-Eulera jest równanie odkształceń dla przekroju pręta:

$$\varepsilon(x, y) = \varepsilon_0 + \kappa_x y + \kappa_y x \quad (4)$$

gdzie  $\varepsilon_0$  jest odkształceniem w początku układu współrzędnych. Geometrycznie, pole odkształceń  $\varepsilon(x, y)$  tworzy płaszczyznę nad obszarem przekroju.

### 3.2.3. Energia

Przyjęta poprzednio konwencja znakowania gwarantuje niezmienniczość iloczynu skalarnego obliczanego dla wielkości ciągłych  $\sigma(x, y)$ ,  $\varepsilon(x, y)$  i odpowiadających im wielkości dyskretnych, w postaci wielkości przekrojowych. Zachodzi wtedy tożsamość:

$$\int_A \sigma(x, y) \cdot \varepsilon(x, y) = N\varepsilon_0 + M_x \kappa_x + M_y \kappa_y \quad (5)$$

W konsekwencji wielkości energetyczne, a więc niezmiennicze, można równoważnie obliczać na poziomie punktu bądź na poziomie przekroju, korzystając z lewej lub prawej strony równości (5).

### 3.2.4. Oś obrotu

Równanie (4) wyraża też położenie osi obrotu przekroju, gdyż dla znanych (obliczonych)  $\varepsilon_0$ ,  $\kappa_x$  i  $\kappa_y$  równanie

$$\varepsilon_0 + \kappa_x y + \kappa_y x = 0 \quad (6)$$

opisuje zbiór punktów (o współrzędnych  $x, y$ ), gdzie odkształcenie jest zerowe.

Oś obrotu często nazywa się osią obojętną, gdyż dla materiałów liniowo-sprężystych, przenoszących zarówno ściskanie, jak i rozciąganie, jest to położenie punktów, gdzie naprężenia są zerowe. W przypadku opisywanych zagadnień brak naprężeń niekoniecznie jest konsekwencją zerowych odkształceń, więc bardziej adekwatne jest kinematyczne pojęcie osi obrotu przekroju.

## 4. Sformułowanie kinematyczne

### 4.1. Wady podejścia statycznego

Analityczny sposób rozwiązania zadania zakotwień, podany w [7, 8], jest oparty na statyce. Rozwiązanie dla przekroju prostokątnego sprowadza się do wielomianu trzeciego stopnia określającego wysokość strefy ściskanej. Dla przekroju innego niż prostokątny analogiczne postępowanie nie prowadzi do wielomianu, ale do pewnej funkcji nieliniowej, zależnej od wielkości strefy ściskanej.

Dla znanej (założonej) części ściskanej przekroju można napisać równania określające siły wewnętrzne i obliczyć jakąś miarę niespełnienia warunków równowagi. Prowadzi to do równania nieliniowego wyrażającego równowagę czyli zadanie sprowadzane jest do poszukiwania miejsca zerowego funkcji nieliniowej. Używając jakiejś metody iteracyjnej rozwiązywania równania nieliniowego: bisekcji, *regula-falsi* czy siecznych, można uzyskać iteracyjny schemat znajdowania równowagi.



Najszybsza z metod poszukiwania pierwiastka, metoda stycznych, wymaga znajomości pochodnej funkcji, co na ogół nie jest łatwe do uzyskania, dlatego jest rzadko używana w tym zagadnieniu.

Naturalnym uogólnieniem iteracyjnego podejścia na przypadek zginania względem obu osi byłoby poszukiwanie równowagi w dwu kierunkach, czyli wyrażającej się przez dwie wielkości.

Przy realizacji programu do zakotwień [5] ta koncepcja doprowadziła początkowo do wersji procedury znajdującej strefę ściskaną w postaci bardzo zbliżonej do opisanej przez di Ludovico [1]. Procedura napisana według tej koncepcji działała, ale w trakcie testów stale pojawiały się nowe przypadki szczególne wymagające uwzględnienia. Procedura okazała się skomplikowana, niezbyt wydajna i nie dawała gwarancji niezawodności. Poszukiwano więc alternatywnego podejścia, które łatwiej prowadziłyby do wyniku.

Artykuł Żaka [9] dotyczy projektowania przekroju żelbetowego, przy daleko bardziej złożonych modelach konstytutywnych dla betonu i stali niż dla NL. Wiedząc już, że projektowanie przekroju żelbetowego i zakotwień w zasadzie sprowadza się do identycznych założeń, zaczerpnięto z tego artykułu koncepcję, aby metodę rozwiązania oprzeć na podejściu kinematycznym. Zasadniczą różnicą było sformułowanie zadania względem niewiadomych  $\epsilon_0$ ,  $\kappa_x$  i  $\kappa_y$ , a nie względem zestawu niewiadomych, opisujących geometrię strefy ściskanej.

To podejście okazało się być bardziej efektywne. Procedura wykorzystująca podejście kinematyczne okazała się być nie tylko zwarta, przejrzysta i niezawodna, ale również wykazywała zaskakująco szybką zbieżność. Jako efekt uboczny uzyskano możliwość obliczania przekroju wg NL.

## 5. Równania równowagi w podejściu kinematycznym

Dla kinematyki przekroju opisanej przez (4) musimy spełnić równania równowagi z uwzględnieniem związków konstytutywnych (1) i (2).

Pole powierzchni przekroju  $A$  składa się z pola powierzchni betonu  $A_b$  i pola powierzchni stali  $A - A_b$ . Pole betonu  $A_b$  jest dzielone myślowo na dwie części:  $A_d$  pole betonu ściskanego ( $\epsilon < 0$ ) i pozostałą część ( $A_b - A_d$ ). Stal nie jest dzielona na część ściskaną i rozciąganą; przez  $A_s$  oznaczana jest pole powierzchni stali przenoszącej naprężenia. Dla NL jest to przekrój wszystkich wkładek stalowych (wtedy  $A_b + A_s = A$ ), natomiast dla kotew  $A_s$  jest to przekrój kotew wyciąganych (wtedy  $A_b + A_s \leq A$ ).

Przy tych oznaczeniach można rozpisać szczegółowo warunki równowagi w początku układu współrzędnych.

### 5.1. Równania równowagi

#### 5.1.1. Suma sił

Suma rzutów sił na oś  $Z$ , czyli  $\sum Z = 0$ :

$$\int_{A_d} \sigma^b dA + \int_{A_s} \sigma^s dA - N = 0 \quad (7)$$



Na ogół druga całka w równaniu (7) jest zamieniana na sumę, przy milczącym założeniu, że  $\sigma^s$  jest stałe w obrębie jednej wkładki, co prowadzi do:

$$\int_{A_d} \sigma^b dA + \sum_{F_i^s \in A_s} \int_{A_s} \sigma^s F_i^s - N = 0 \quad (8)$$

Sumowanie przebiega po wszystkich wkładkach przenoszących naprężenia  $F_i^s \in A_s$ . W przypadku NL przebiega po wszystkich prętach, także ściskanych, a dla kotew jedynie w strefie rozciąganej. W dalszym ciągu pomijany jest jawny zapis zakresu sumowania.

Po podstawieniu założenia (1) dotyczącego naprężeń w stali  $\sigma^s$  oraz założenia (2) dotyczącego naprężenia ściskających na powierzchni betonu  $\sigma^b$ , równanie (8) można przepisać następująco:

$$\int_{A_d} E^b \varepsilon(x, y) + \sum E^s \varepsilon(x_i, y_i) F_i^s - N = 0 \quad (9)$$

Podstawiając równanie odkształceń (4) do obu członów równania, przy czym drugi człon w wersji dyskretnej, z (9) wynika:

$$\int_{A_d} E^b (\varepsilon_0 + \kappa_x y + \kappa_y x) + \sum E^s (\varepsilon_0 + \kappa_x y_i + \kappa_y x_i) F_i^s - N = 0 \quad (10)$$

Po otwarciu nawiasów (przy założeniu jednorodności zarówno stali, jak i betonu) i użyciu typowych oznaczeń:

$$\begin{aligned} \int_{A_d} 1 &= A_d & \int_{A_d} y &= S_x^b & \int_{A_d} x &= S_y^b \\ \sum F_i^s &= A_s & \sum F_i^s y_i &= S_x^s & \sum F_i^s x_i &= S_y^s \end{aligned}$$

a następnie po uporządkowaniu względem  $\varepsilon_0$ ,  $\kappa_x$  i  $\kappa_y$ , równanie przybiera postać:

$$(E^b A_d + E^s A^s) \varepsilon_0 + (E^b S_x^b + E^s S_x^s) \kappa_x + (E^b S_y^b + E^s S_y^s) \kappa_y - N = 0 \quad (11)$$

### 5.1.2. Suma momentów względem osi X

Drugim równaniem jest suma momentów względem osi X, czyli  $\sum M_{Ox} = 0$

$$\int_{A_d} \sigma^b y + \sum \sigma^s F_i^s y_i - M_x = 0 \quad (12)$$

Po podstawieniu do równania (12) równania wynikającego z założenia (1) dotyczącego naprężeń w stali  $\sigma^s$  oraz założenia (2) dotyczącego naprężeń ściskających na powierzchni betonu  $\sigma^b$ , uwzględnieniu typowych oznaczeń dla momentu bezwładności i momentu dewiacji

$$\int_{A_d} y^2 = J_x^b \quad \int_{A_d} xy = D_{xy}^b$$

$$\sum F_i^s y_i^2 = J_x^s \quad \sum F_i^s x_i y_i = D_{xy}^s$$

oraz uporządkowaniu, otrzymuje się:

$$(E^b S_x^b + E^s S_x^s) \varepsilon_0 + (E^b J_x^b + E^s J_x^s) \kappa_x + (E^b D_{xy}^b + E^s D_{xy}^s) \kappa_y - M_x = 0 \quad (13)$$

Warto w tym miejscu podkreślić, że zamiana całki na sumę w (7) i analogicznie w następnych, szczególnie w (12), odbywa się przy założeniu, że naprężenie w stali jest stałe. Dla małych powierzchni  $F_i^s$  odstępstwo rozkładu naprężenia od stałego jest niewielkie. Dokładniejsza analiza pokazuje, że jeśli wkładki stalowe mają przekrój bisymetryczny (np. kołowy), to wartości  $A_s$ ,  $S_x^s$ ,  $S_y^s$  i  $D_{xy}^s$  i obliczane jako sumy są dalej poprawne, czyli dla dowolnego liniowego rozkładu naprężeń we wkładkach wyrażenia związane z tymi członami będą dokładne.

Rozbieżność pojawia się dopiero przy momentach bezwładności. Poprawny wynik wymagałby uwzględnienia w  $J_x^s$  i  $J_y^s$  momentu bezwładności każdej wkładki stalowej względem jej środka ciężkości. Tradycyjnie pomija się te człony jako zaniedbywalne wobec całej sumy. Jednocześnie, jeśli te człony nie byłyby zaniedbywalne, czyli rozmiary wkładki stalowej były na tyle duże, że liniowy rozkład naprężeń byłby istotnie różny od stałego, to wkładka taka miałaby możliwość przenoszenia momentu.

#### 5.1.3. Suma momentów względem osi Y

Suma momentów względem osi Y:  $\sum M_{Oy} = 0$ :

$$\int_{A_d} \sigma^b x + \sum \sigma^s F^s x_i - M_y = 0 \quad (14)$$

Rozważając równanie sumy momentów względem osi Y (14) i dokonując podobnych przekształceń, można uzyskać analogiczny wynik. Prościej jednak, korzystając z postulowanej przy wyborze układu współrzędnych symetrii, uzyskać odpowiednie równanie, zamieniając w (13) indeksy  $x$  na  $y$ .

$$(E^b S_y^b + E^s S_y^s) \varepsilon_0 + (E^b D_{xy}^b + E^s D_{xy}^s) \kappa_x + (E^b J_y^b + E^s J_y^s) \kappa_y - M_y = 0 \quad (15)$$

#### 5.1.4 Układ równań

Zestawiając równania (11), (13) oraz (15) w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} E^b A_d + E^s A_s & E^b S_x^b + E^s S_x^s & E^b S_y^b + E^s S_y^s \\ E^b S_x^b + E^s S_x^s & E^b J_x^b + E^s J_x^s & E^b D_{xy}^b + E^s D_{xy}^s \\ E^b S_x^b + E^s S_x^s & E^b D_{xy}^b + E^s D_{xy}^s & E^b J_y^b + E^s J_y^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{bmatrix} \quad (16)$$

lub w krótkiej notacji:

$$\mathbf{KQ} = \mathbf{F} \quad (17)$$

Układ równań (16) jest identyczny z układem, który otrzymuje się dla przekroju pręta smukłego w teorii wytrzymałości. Jedyna, ale istotna różnica tkwi w definicji charakterystyk geometrycznych występujących w tym układzie. W przypadku materiału przenoszącego zarówno ściskanie, jak i rozciąganie, charakterystyki geometryczne liczone są dla całego przekroju. W równaniu (16) liczone są tylko dla ściskanej (dla betonu) bądź rozciąganej (dla kotew) części przekroju. Stąd dla materiału przenoszącego zarówno ściskanie, jak i rozciąganie, charakterystyki są niezależne od położenia osi obrotu, natomiast dla materiałów przenoszących tylko naprężenia jednego znaku wyrazy macierzy  $\mathbf{K}$  są zależne od położenia osi obrotu.

Z tej właściwości wynika nieco inna strategia rozwiązywania. Klasycznie takie równania są rozprzegane przy wykorzystaniu osi głównych, centralnych. Osie centralne powodują wyzerowanie wszystkich momentów statycznych, a więc rozprzęgnięcie pierwszego, i następnych. Następnie obrót układu do osi centralnych powoduje zerowanie momentu dewiacji, a więc rozprzężenie ostatnich dwu równań.

Kiedy wyrazy macierzy  $\mathbf{K}$  są niezależne od obciążenia (położenia osi obrotu), jest to bardzo efektywny sposób postępowania. Jednorazowa operacja poszukiwania osi głównych, centralnych daje niezależne równania, które można rozwiązywać dla dowolnego układu obciążenia, szczególnie z uwzględnieniem obowiązującej wtedy superpozycji.

Kiedy wyrazy macierzy  $\mathbf{K}$  są zależne od położenia osi obrotu, a superpozycja nie obowiązuje, rozprężanie układu równań dla każdego nowego położenia osi obrotu przestaje być efektywnym sposobem rozwiązywania układu równań (16).

#### 5.1.5. Dodatnia określoność

Macierz układu (17) jest symetryczna. Jest też dodatnio półokreślona. Dodatnia półokreśloność macierzy  $\mathbf{K}$  wynika z faktu, że wyrażenie:

$$\frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{K} \mathbf{Q} \geq 0$$

przedstawia energię sprężystą układu, por. (5).

Macierz układu jest tylko dodatnio półokreślona, gdyż mogą pojawić się przypadki szczególne, kiedy może być osobliwa. Przypadki osobliwości macierzy  $\mathbf{K}$  są związane z konkretnymi układami geometrii. Jest to analogia do metody przemieszczeń (lub MES), gdzie osobliwość macierzy sztywności może się pojawić jako skutek chwiejności układu.

## 6. Metoda rozwiązywania

### 6.1. Równania równowagi

Równanie (17) może być interpretowane jako nieliniowe równanie równowagi:

$$\mathbf{W}(\mathbf{Q}) = \mathbf{F} \quad (18)$$

gdzie  $\mathbf{W}(\mathbf{Q})$  to siły wewnętrzne wywołane stanem deformacji  $\mathbf{Q}$  natomiast  $\mathbf{F}$  to przyłożone obciążenie zewnętrzne. Poszukuje się takiego  $\mathbf{Q}$ , aby wywołane tą deformacją siły wewnętrzne  $\mathbf{W}(\mathbf{Q})$ , były równe zadanemu obciążeniu zewnętrznemu  $\mathbf{F}$ .

Równanie równowagi (18) określa jaki warunek ma spełniać rozwiązanie, jednak nie mówi, jak to rozwiązanie znaleźć. Aby praktycznie wykorzystać równanie równowagi, należy rozpatrzyć przejście między dwoma stanami równowagi.

Pierwszy, znany stan równowagi, opisany jest przez stan deformacji  $\mathbf{Q}_0$  i obciążenie  $\mathbf{F}_0$ , taki że  $\mathbf{K}\mathbf{Q}_0 = \mathbf{F}_0$ . Drugi, poszukiwany, gdzie zadana jest nowa wartość obciążenia  $\mathbf{F}$  lub równoważnie przyrost obciążenia  $\Delta\mathbf{F} = \mathbf{F} - \mathbf{F}_0$  oraz poszukiwany jest nowy stan deformacji  $\mathbf{Q}$  lub równoważnie, przyrost deformacji  $\Delta\mathbf{Q} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_0$ .

Rozwijając funkcję sił wewnętrznych  $\mathbf{W}(\mathbf{Q})$  w szereg Taylora, w otoczeniu położenia równowagi  $\mathbf{Q}_0$ , otrzymujemy:

$$\mathbf{W}(\mathbf{Q}_0 + \Delta\mathbf{Q}) = \mathbf{W}_0 + \left. \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{Q}} \right|_{\mathbf{Q}_0} \Delta\mathbf{Q} + \frac{1}{2} (\Delta\mathbf{Q})^T \left. \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial \mathbf{Q}^2} \right|_{\mathbf{Q}_0} \Delta\mathbf{Q} + \dots \quad (19)$$

oznaczając pierwszą pochodną sił wewnętrznych względem przemieszczeń przekrojowych, czyli tzw. macierz styczną, przez  $\mathbf{K}_T$ :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{Q}} \right|_{\mathbf{Q}_0} = \mathbf{K}_T(\mathbf{Q}_0) \quad (20)$$

wtedy, pomijając czony wyższego rzędu niż pierwszy w rozwinięciu (19), można zapisać jako

$$\mathbf{W}(\mathbf{Q}_0 + \Delta\mathbf{Q}) = \mathbf{W}_0 + \mathbf{K}_T(\mathbf{Q}_0)\Delta\mathbf{Q} + \dots$$

W konsekwencji przyrost sił wewnętrznych będzie się wyrażał jako:

$$\Delta\mathbf{W}(\Delta\mathbf{Q}) = \mathbf{K}_T(\mathbf{Q}_0)\Delta\mathbf{Q} + O(\Delta\mathbf{Q})$$

gdzie czony wyższego rzędu oznaczono jako  $O(\Delta\mathbf{Q})$ . Jest to typowe sformułowanie przyrostowe, powszechnie używane np. w nieliniowej analizie MES.

Przyrost sił wewnętrznych  $\Delta\mathbf{W}$  musi być równy przyrostowi obciążenia  $\Delta\mathbf{F}$ , więc:

$$\Delta\mathbf{F} = \mathbf{K}_T(\mathbf{Q}_0)\Delta\mathbf{Q} + O(\Delta\mathbf{Q}) \quad (21)$$

Jeżeli pominie się człon  $O(\Delta\mathbf{Q})$  i dla zadanego  $\Delta\mathbf{F}$  i znanego  $\mathbf{K}_T(\mathbf{Q}_0)$  rozwiąże równanie:

$$\Delta\mathbf{F} = \mathbf{K}_T(\mathbf{Q}_0)\Delta\tilde{\mathbf{Q}} \quad (22)$$

to otrzymuje się  $\Delta\tilde{\mathbf{Q}}$  jako przybliżenie  $\Delta\mathbf{Q}$ . Pominięte czony  $O(\Delta\mathbf{Q})$  są zależne od wyższych potęg  $\Delta\mathbf{Q}$ , więc im mniejszy jest przyrost  $\Delta\mathbf{Q}$ , tym mniejszy błąd powoduje ich pominięcie i tym bliżej jest rozwiązania dokładnego.

Dla rozpatrywanego tutaj zagadnienia zachodzi bardzo istotna właściwość: macierz styczna  $\mathbf{K}_T$  jest tożsamościowo równa macierzy  $\mathbf{K}$  z równania równowagi (17)

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K} \quad (23)$$

Uzasadnienie tej właściwości zostanie podane nieco później (w pkt. 6.2), obecnie skupimy uwagę na uproszczeniu sformułowania (21), które wnosi równanie (23). Rozwinięcie w szereg (19) można równoważnie zapisać jako:

$$\mathbf{F} = \mathbf{W}(\mathbf{Q}_0 + \Delta\mathbf{Q}) = \mathbf{K}(\mathbf{Q}_0)\mathbf{Q}_0 + \mathbf{K}_T(\mathbf{Q}_0)\Delta\mathbf{Q} + \dots \quad (24)$$

Uwzględniając (23) oraz wyłączając  $\mathbf{K}$ , dostajemy:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}(\mathbf{Q}_0)(\mathbf{Q}_0 + \Delta\mathbf{Q}) + \dots \quad (25)$$

czyli

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}(\mathbf{Q}_0)(\mathbf{Q}) + O(\Delta\mathbf{Q}) \quad (26)$$

W ten sposób otrzymuje się równoważne do (21) sformułowanie w wielkościach całkowitych, a nie w przyrostach.

Rzeczą wartą podkreślenia jest fakt, że błąd wynikający z pominięcia członów wyższego rzędu jest zależny od  $\Delta\mathbf{Q}$  a nie od  $\mathbf{Q}$ , gdyż jest to jedynie inaczej zapisane równanie przyrostowe (21). Zachowana zostaje więc właściwość, że błąd bardzo szybko maleje wraz ze zmniejszaniem się  $\Delta\mathbf{Q}$ , czyli wraz ze zbliżaniem się do położenia równowagi.

## 6.2. Macierz styczna

Wynik w postaci równania (26) został uzyskany przy założeniu, że macierz sztywności, określająca równowagę, jest jednocześnie macierzą styczną, czyli jest równa pochodnej sił wewnętrznych względem zmiennych stanu deformacji.

Wykazanie tego w formie ścisłego dowodu jest dosyć trudne i obfituje w subtelności natury matematycznej. Warto podać proste uzasadnienie takiej właściwości, używając argumentacji wynikającej z mechaniki. Pozwala to lepiej zrozumieć pracę takiego układu.

Pierwsza pochodna w (19) jest to liniowa część zmiany sił wewnętrznych  $\mathbf{W}$  wynikająca z małej zmiany  $\mathbf{Q}$ . Zmianę  $\mathbf{Q}$  można myślowo rozłożyć na część wynikającą z proporcjonalnej zmiany składowych  $\mathbf{Q}$  (zmiana skali) oraz ze zmiany proporcji między samymi składowymi  $\mathbf{Q}$ .

### 6.2.1. Skalowalność

Efekt zmiany skali odkształceń w każdym punkcie, bez przemieszczania osi obrotu, por. (4) jest liniowy:

$$\mathbf{W}(\lambda\mathbf{Q}) = \mathbf{K} \cdot \lambda\mathbf{Q} = \lambda\mathbf{K}\mathbf{Q} = \lambda\mathbf{W}(\mathbf{Q}) \quad (27)$$

czyli  $\lambda$ -krotnie większe składowe  $\mathbf{Q}$  wywołuje  $\lambda$ -krotnie większe odkształcenie w każdym punkcie (por. równ. (4)). To z kolei powoduje  $\lambda$ -krotnie większe siły wewnętrzne, z uwagi na budowę związków konstytutywnych (1) i (2), które nie tylko są liniowe dla ustalonego znaku, ale również jednorodne (bez członu stałego). Ta własność będzie nazywana skalowalnością sił wewnętrznych.

Taki efekt nie będzie zachodził ani dla nieliniowych związków konstytutywnych, ani nawet dla odcinkowo-liniowych.

Ze skalowalności sił wewnętrznych, czyli równania (27), bezpośrednio wynika, że dla proporcjonalnej zmiany  $\mathbf{Q}$  macierz  $\mathbf{K}$  jest macierzą stycznią gdyż

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{W}(\mathbf{Q})}{\partial \mathbf{Q}} = \frac{\partial (\mathbf{K}(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{Q})}{\partial \mathbf{Q}} = \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{Q})}{\partial \mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{1} \quad (28)$$

Jeśli położenie osi obrotu się nie zmienia, to charakterystyki geometryczne obszaru ściskanego też pozostają niezmiennione. To z kolei implikuje niezmiennosc macierzy  $\mathbf{K}$ , czyli człon  $\partial \mathbf{K} / \partial \mathbf{Q}$  jest zerowy i wtedy zachodzi  $\mathbf{K}_T = \mathbf{K}$ .

W przypadku zmiany proporcji składowych w  $\mathbf{Q}$ , czyli przesunięcia osi obrotu, człon  $\partial \mathbf{K} / \partial \mathbf{Q}$  daje o rzędy niższe wartości zmiany w macierzy układu. Można to uzasadnić w ten sposób, że jeśli w pewnym momencie cały przekrój jest ściskany i dane są charakterystyki tegoż przekroju, to gdyby policzyć charakterystyki przekroju bez małego fragmentu (oś obrotu przesunęła się z zewnątrz przekroju do wewnątrz i odcina niewielki fragment przekroju), to zmiana wartości charakterystyk byłaby znikoma. Z tego wynika, że macierz  $\mathbf{K}$  jest przynajmniej bardzo dobrym przybliżeniem macierzy styczniej.

Aby pokazać, że nie jest to tylko przybliżenie, ale również w tym wypadku zachodzi postulowana równość (20), należy odwołać się do formalnego wyprowadzenia.

### 6.2.2. Zmiana proporcji

Efekt zmiany proporcji najłatwiej prześledzić, obliczając wyraz  $K_{11}$ , czyli  $\partial W_1 / \partial Q_1 = \partial N / \partial \epsilon_0$ , gdyż sama zmiana odkształceń w początku układu, przy zachowanych krzywiznach, jest nieproporcjonalna, a łatwo poddaje się interpretacji mechanicznej. Taka zmiana opisuje przesunięcie osi obrotu bez zmiany nachylenia płaszczyzny odkształceń.

Macierz stycznią na przykładzie pierwszego wyrazu macierzy  $\mathbf{K}$ :

$$\frac{\partial N}{\partial \epsilon_0} = \int_A \frac{\partial \sigma(x, y)}{\partial \epsilon_0} dA = \int_A \frac{\partial \sigma(x, y)}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon(x, y)}{\partial \epsilon_0} dA = \int_A \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \cdot 1 dA \quad (29)$$

gdzie skorzystano z różniczkowania funkcji złożonej a następnie z równania płaszczyzny odkształceń (4), aby wyliczyć  $\frac{\partial \epsilon}{\partial \epsilon_0}$ .

Rozdzielono całkę na w obszarze całego przekroju  $A$  na trzy części: rozciągany beton  $A_b$  –  $A_s$  ściskany beton oraz stal  $A_s$ . Całka w pierwszym obszarze znika, gdyż pochodna funkcji zerowej jest też funkcją zerową. Pozostałe dwie części można zapisać jako:

$$\frac{\partial N}{\partial \epsilon_0} = \int_{A_d} \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} dA + \sum_i \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \cdot F_i^s \quad (30)$$

Dla betonu, z równania (2) wynika  $\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} = E^b$ , a dla stali z równania (1) wynika  $\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} = E^s$ , więc:

$$\frac{\partial N}{\partial \epsilon_0} = E^b \int_{A_d} 1 \cdot dA + E^s \sum_i F_i^s = E^b A_d + E^s A_s \quad (31)$$

gdzie natychmiast można rozpoznać wyraz  $K_{11}$  z równania (16).

W wyprowadzeniu równania (29) dokonano pewnych uproszczeń, gdyż funkcja  $\partial\sigma/\partial\varepsilon$  dla betonu nie jest różniczkowana w zerze, a ponadto obszar całkowania  $A_d$  się zmienia. Jednak dokładniejsza analiza tego wyrażenia prowadzi do takich samych wyników.

### 6.3. Ciąg przybliżeń

Korzystając ze wzoru (22) opisującego przybliżenie rozwiązania, bardzo łatwo skonstruować metodę iteracyjną znajdującą rozwiązanie dokładne.

Tworzony jest następujący ciąg przybliżeń: dla znanego początkowego stanu odkształcenia  $\mathbf{Q}_0$  – i wynikającego z niego początkowego położenia osi obrotu – obliczane są odpowiednie charakterystyki geometryczne ściskanej części przekroju i wynikającą z nich macierz  $\mathbf{K}(\mathbf{Q}_0)$ .

Następnie rozwiązywany jest układ równań:

$$\mathbf{K}(\mathbf{Q}_0)\mathbf{Q}_1 = \mathbf{F}$$

Znając  $\mathbf{Q}_1$ , można otrzymać z równania (6) nowe położenie osi obrotu. Dla nowego stanu deformacji (oraz nowej osi obrotu) można obliczyć  $\mathbf{K}(\mathbf{Q}_1)$ , a następnie rozwiązać

$$\mathbf{K}(\mathbf{Q}_1)\mathbf{Q}_2 = \mathbf{F}$$

Powtarzając ten cykl, rozwiązując ciąg równań liniowych:

$$\mathbf{K}(\mathbf{Q}_{n-1})\mathbf{Q}_n = \mathbf{F} \quad (32)$$

oblicza się ciąg przybliżeń rozwiązania:

$$\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_n \rightarrow \mathbf{Q}$$

jeśli ciąg ten jest zbieżny, to w granicy dostajemy równość:  $\mathbf{K}(\mathbf{Q})\mathbf{Q} = \mathbf{F}$ .

Wzór (32) jest wzorem tzw. iteracji prostej, a jednocześnie – ponieważ macierz  $\mathbf{K}$  jest macierzą styczną – dostaje się metodę Newtona-Raphsona (stycznych). Jako efekt uboczny sformułowania kinematycznego otrzymuje się jedną z najszybszych metod iteracyjnych.

Wzór (32) upraszcza implementację w porównaniu ze sformułowaniem przyrostowym (21). Daje to możliwość napisania przejrzystego i eleganckiego kodu programu.

Ogólnie znaną wadą metody NR jest to, że nie daje gwarancji zbieżności. Jest zbieżna, jeśli przybliżenie początkowe jest dostatecznie blisko rozwiązania. W nieliniowej analizie MES jest to powszechnie znane zjawisko, gdyż trzeba dobierać długość kroku przyrostowego. Z kolei w innych zagadnieniach, jak wzór iteracyjny na pierwiastek kwadratowy, metoda NR jest zbieżna niezależnie od początkowej wartości przybliżenia.

W rozpatrywanym zagadnieniu nie wiadomo, czy ciąg iteracji będzie zbieżny niezależnie od początkowego przybliżenia. W trakcie przeprowadzonych testów nie natrafiono na przypadek, kiedy ciąg iteracyjny byłby rozbieżny. Jednak nie ma dowodu, że takie przypadki nie istnieją. Również nie wiadomo, czy nie istnieje możliwość powstania pętli.



## 7. Algorytm

Metoda jest tutaj rozumiana jako ciąg operacji, które inżynier musi wykonać, aby uzyskać wynik. Jest to więc rozumienia bliskie (czy tożsame) z pojęciem metody analitycznej. Dla odróżnienia algorytm jest tutaj rozumiany jako ciąg operacji, które ma wykonać program.

Pozornie prosta, ale fundamentalna różnica sprowadza się do analizy przypadków szczególnych. Dokładniej do czasu, kiedy się je uwzględnia. Człowiek uwzględnia przypadki szczególne i inne odstępstwa od ogólnego schematu, kiedy się na nie natknie w trakcie rozwiązywania. Wtedy sprawdza, z jakim przypadkiem szczególnym ma do czynienia, i cofa się w obliczeniach, aby dostosować tok postępowania do tej sytuacji.

Komputer musi mieć z góry zaprogramowaną obsługę wszelkich sytuacji, które wymagają najdrobniejszej choćby modyfikacji ogólnego sposobu postępowania. Analiza wszelkich alternatywnych sposobów postępowania musi być przeprowadzona przed napisaniem programu. Dopiero po uwzględnieniu wszystkich możliwych wariantów, które mogą zaistnieć w trakcie rozwiązywania, z metody rozwiązywania można uzyskać algorytm.

Należy tu odróżnić przypadki szczególne od weryfikacji poprawności danych. Sprawdzanie danych jest tu całkowicie pomijane, gdyż zakres sprawdzeń bardzo zależy od kontekstu użycia algorytmu. Przykładowo, jeśli użytkownik nie wprowadza bezpośrednio wartości modułu Younga dla betonu, tylko wybiera klasę betonu z zadanej listy, to nie ma potrzeby, aby procedura znajdująca strefę ściskaną weryfikowała tę wartość. Zakłada się więc, że dane są poprawne. Należy określić kiedy – dla poprawnych danych – ciąg operacji określonych przez metodę rozwiązywania może wymagać innego schematu postępowania.

W przypadku opisywanej metody należy wziąć pod uwagę trzy potencjalne źródła problemów, które trzeba uwzględnić w algorytmie: pewne operacje związane geometrią, przypadki osobliwości macierzy sztywności oraz niektóre problemy implementacyjne.

### 7.1. Geometria

Problemy geometryczne wynikają głównie z relacji między płaszczyzną odkształceń a osią obrotu. Zostaną opisane w punkcie 7.1.1 i punkcie 7.1.2.

Kłopotliwy jest też algorytm obliczania charakterystyk części ściskanej przekroju, który jest istotną częścią algorytmu rozwiązywania statyki. Ponieważ jednak rozwiązywanie statyki nie odwołuje się w sposób jawny ani do sposobu wyznaczania części ściskanej przekroju, ani nawet do położenia osi obrotu czy też sposobu jej reprezentacji, więc obliczenia charakterystyk można (a nawet należy) realizować jako osobny algorytm.

Samo zagadnienie wyznaczania charakterystyk części ściskanej jest na tyle nietrywialne, a jednocześnie krytycznie ważne dla poprawności i niezawodności rozwiązania całego zadania, że wymaga osobnego potraktowania. Tutaj jedynie zostaną zasygnalizowane pewne problemy ogólne oraz w punkcie 7.1.2 pewne trudności mogące się pojawić na styku obu algorytmów.

Wyznaczanie charakterystyk części ściskanej przekroju logicznie składa się z dwu etapów: wyznaczenie części ściskanej oraz obliczenie dla niej charakterystyk.

Znajdowanie części ściskanej można potraktować jako zadanie czysto geometryczne. Dany jest obszar (przekrój) opisany przez jego brzeg (z reguły wielobok) oraz zadana jest prosta (oś obrotu), która dzieli obszar na dwie części. Należy wyznaczyć obszar ściskany, czyli znaleźć wielobok opisujący brzeg części ściskanej.

Wbrew pozorom jest to zadanie dość skomplikowane, znane z tzw. geometrii obliczeniowej. Dla przekroju, który nie jest wypukły, część ściskana może składać się kilku rozłącznych podobszarów (por. przykład z 9.2).

Należy tu zasygnalizować, że zagadnienie w wersji geometrycznej sprowadza się do zagadnienia położenia punktu względem prostej. Wydaje się, że w tym przypadku wyznaczenie części ściskanej przekroju może być osiągnięte za pomocą znacznie prostszych metod, jednak analiza i opis tego zagadnienia wykracza znacznie poza ramy tego artykułu.

### 7.1.1. Zerowe obciążenie

Jeśli obciążenie jest zerowe, układ równań (16) ma jednoznaczne (zerowe) rozwiązanie, ale deformacja jest również zerowa, więc położenie osi obrotu wynikające z (6) jest nieokreślone. Nie można wtedy wyznaczyć, która część przekroju jest ściskana, a która rozciągana, i obliczyć charakterystyk geometrycznych części ściskanej.

Konieczne jest sprawdzenie, czy obciążenie jest niezerowe. Wydaje się, że wystarczający jest najprostszy test typu:

$$\mathbf{F}^T \mathbf{F} > \rho_1$$

gdzie  $\rho_1$  jest małą liczbą rzędu zera maszynowego.

Gdy warunek jest niespełniony, to sposób potraktowania tego przypadku zależy od kontekstu użycia algorytmu, gdyż można obliczyć naprężenia, ale nie można narysować strefy ściskanej.

### 7.1.2. Siła w rdzeniu przekroju

Nieco podobne problemy, wynikające z odwzorowania płaszczyzny odkształceń na oś obrotu (6) pojawiają się przy sile w rdzeniu przekroju. Jeśli obciążenie zmierza do czystego ściskania lub rozciągania, to oś obrotu zmierza do nieskończoności. Formalnie ten problem nie dotyczy samej metody rozwiązywania, jednak może powodować błędy w procedurze wyznaczającej charakterystyki geometryczne. Ta nie zawsze jest przystosowana do operowania na zbyt dużych wartościach współrzędnych. Wyznaczanie punktu przecięcia boku przekroju nie tylko z prostą leżącą w „nieskończoności”, ale również z prostą bardzo odległą od przekroju może powodować błędy wynikające ze skończonej dokładności arytmetyki procesora.

Nie jest to cecha samego algorytmu rozwiązywania; raczej sposobu wyznaczania charakterystyk geometrycznych, należy jednak dostosować ten element algorytmu do sposobu obliczania charakterystyk.

Są trzy możliwości: można nie używać jawnie położenia osi obrotu – jeśli mamy dostosowaną do tego procedurę obliczania charakterystyk geometrycznych, można przełączać w algorytmie gałąź na siłę w rdzeniu (bo temu odpowiada oś obrotu poza przekrojem) albo po stwierdzeniu, że oś obrotu jest daleko, używać – tylko do obliczania charakterystyk – zamiast rzeczywistej osi, dowolnej osi fikcyjnej, która leży w umiarkowanej odległości, ale na zewnątrz przekroju.

## 7.2. Osobliwość macierzy

Ponieważ zadanie sprowadzono do ciągu równań liniowych (32), kluczowym problemem jest zagwarantowanie, że macierz układu  $\mathbf{K}$  jest nieosobliwa.

Możliwość pojawienia się osobliwości związanej z macierzą układu, przy obliczaniu przekroju żelbetowego, została dostrzeżona przez Pisaniego [6], ale autor raczej stawia pytanie, niż próbuje znaleźć odpowiedź.

Istotne jest więc poznanie i analiza możliwych źródeł osobliwości, kiedy jest to źle postawione zadanie, które nie posiada rozwiązania, a kiedy wynik jakiegoś szczególnego zachowania się konstrukcji.

Analiza możliwości pojawienia się osobliwej macierzy układu wydaje się być dosyć trudnym zadaniem, jednak wykorzystanie interpretacji mechanicznej wyrazów tej macierzy znacznie tę analizę upraszcza.

Należy zacząć od spostrzeżenia, że w układzie osi głównych, centralnych (dla przekroju złożonego stalowo-betonowego) macierz  $\mathbf{K}$  będzie miała postać diagonalną. Można więc zawsze znaleźć układ współrzędnych, który diagonalizuje macierz  $\mathbf{K}$ . W takim układzie osobliwość manifestuje się zerową wartością (lub wartościami) na diagonalu.

Odwrotnie, jeśli wszystkie wyrazy diagonalne są różne od zera w układzie osi głównych, centralnych, to macierz będzie nieosobliwa w każdym układzie współrzędnych.

Z tego rozumowania wynika, że wystarczy przeanalizować możliwość pojawienia się wyrazu zerowego na diagonalu dla układu głównego, centralnego, aby zidentyfikować wszystkie możliwe przypadki osobliwości macierzy  $\mathbf{K}$ .

### 7.2.1. Strefa ściskana

Jeśli istnieje strefa ściskana betonu, to macierz układu (16) jest ściśle dodatnio określona -czyli również nieosobliwa. Wynika to z właściwości charakterystyk dowolnego obszaru płaskiego. Precyzyjniej, zachodzi to wtedy, kiedy powierzchnia strefy ściskanej jest niezerowa. Kiedy obszar ściskany degeneruje się do linii lub punktu, to nie ma gwarancji nieosobliwości. Ten przypadek szczególny zostanie rozważony w punkcie 7.2.2.

Pozostają do rozważenia przypadki, kiedy  $A_d = 0$  a wtedy układ (16) przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} E^s A_s & E^s S_x^s & E^s S_y^s \\ E^s S_x^s & E^s J_x^s & E^s D_{xy}^s \\ E^s S_y^s & E^s D_{xy}^s & E^s J_y^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{bmatrix} \quad (33)$$

czyli w macierzy układu pozostają jedynie czony zależne od stali. Cechy macierzy tego układu (33) zależą wyłącznie od rozmieszczenia wkładek stalowych. Osobliwość układu (33) rzadko dotyczy zadania NL, gdyż stosowane w praktyce zasady rozmieszczenia prętów zbrojeniowych na ogół nie dopuszczają do powstania układu osobliwego. W przypadku zakotwień przepisy EOTA bardzo ograniczają możliwe sposoby rozmieszczania wkładek stalowych i dopuszczają – a wręcz narzucają – układy, które łatwo mogą wygenerować osobliwość w układzie (33). W szczególności dopuszczają układy z jedną kotwą i układy z jednym rzędem kotew.

Skupić się należy na znalezieniu takich układów geometrycznych, które dają osobliwą macierz w równaniach (33).

W dalszej analizie bardzo pomocne będzie spostrzeżenie, że w rzeczywistości wyrazy macierzy układu (33) są ważoną sumą (wagi  $E^s F_i^s$ ) wartościami charakterystyk geometrycznych dla układu punktów utworzonego przez wkładki stalowe.

### 7.2.2. Równanie stanu osiowego

Pierwsze równanie układu (16) lub (33) opisuje stan osiowy, a jego wyraz diagonalny jest zależny od powierzchni. Powierzchnia jest niezmiennikiem, więc w kontekście osobliwości można pominąć pozostałe człony równania, gdyż istnieje układ, w którym momenty statyczne się zerują, a powierzchnia pozostaje niezmienniona.

Pierwszy współczynnik w równaniu (33) zależy od powierzchni  $A_s$ . W przypadku NL wartość zerowa oznaczałaby brak zbrojenia, co oznacza błąd w danych. W przypadku zakotwień to powierzchnia kotew wyciąganych, przez co rozumowanie staje nieco bardziej złożone. Jeśli w strefie rozciąganej znajdują się kotwy, to  $A_s \neq 0$ . Jeśli wszystkie kotwy znajdują się w strefie ściskanej, to  $A_s = 0$ , ale wtedy istnieje strefa ściskana, czyli  $A_d \neq 0$ , a więc  $K_{11}$  w ogólnym równaniu (16) będzie niezerowe.

Pozostaje jeszcze przypadek graniczny, kiedy obszar ściskany degeneruje się do linii lub punktu. Wtedy  $A_d = 0$  a jeśli wszystkie kotwy są na linii czy w punkcie, do których degeneruje się strefa ściskana, to również możliwe jest  $A_s = 0$ .

Jednak przypadek zdegenerowanej strefy ściskanej oznacza, że linia lub punkt, gdzie występuje ściskanie, muszą być na brzegu przekroju. Zerowanie  $K_{11}$  byłoby możliwe tylko wtedy, gdyby kotwy mogły znajdować się na brzegu podstawy betonowej. Przepisy ETAG [3] nie zezwalają na umieszczanie kotew bliżej niż  $c_{\min}$  od krawędzi.

Pojawienie się zerowej wartości  $K_{11}$  należy traktować jako błąd w danych bądź błąd w algorytmie obliczania charakterystyk.

### 7.2.3. Równania stanu giętnego

Stan zginania jest opisany przez drugie i trzecie równanie w (16). Zakładając znowu centralny układ współrzędnych, pozostaje do analizy podukład o wymiarze  $2 \times 2$ , którego macierz jest blokiem macierzy  $\mathbf{K}$ .

Blok ten nie jest tensorem, gdyż ma niewłaściwe znaki. Wynika to z przyjętej konwencji znakowania kątów obrotu (a więc i krzywizn) oraz momentów. Gdyby przyjąć konwencję zgodną z iloczynem wektorowym (wtedy  $\kappa_x$  i  $M_y$  zmieniają znak na przeciwny), to blok przedstawiałby wprost tensor bezwładności. Z tego jednak wynika, że blok ten można, tak jak tensor, doprowadzić do postaci diagonalnej.

Ponieważ jest on związany z tensorem bezwładności układu punktów, więc zagadnienie sprowadza się do kwestii: kiedy układ punktów może dać zerowe momenty bezwładności? Przy takiej interpretacji odpowiedź jest znana: albo punkty leżą wzdłuż prostej i wtedy moment bezwładności względem tej prostej jest zerowy, albo jest dokładnie jeden punkt (kotew, pręt zbrojenia) i w układzie, którego początek będzie w tym punkcie, momenty bezwładności względem obu osi będą zerowe.

## 7.3. Układy punktów generujące osobliwość

W przypadku punktów (kotew, zbrojenia) leżących wzdłuż prostej – przyjmijmy, że wzdłuż osi  $y$  – układ równań (33) przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} E^s A_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E^s J_y^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{bmatrix} \quad (34)$$

Wszystkie współczynniki drugiego równania (34) się zerują, więc równanie albo jest spełnione tożsamościowo, gdy  $M_x = 0$ , albo jest sprzeczne, gdy  $M_x \neq 0$ .

Przypadek zerowania się drugiego wiersza z punktu widzenia mechaniki oznaczałby, że siły we wkładkach ułożonych wzdłuż osi  $y$  nie mogą wywołać (zrównoważyć) momentu  $M_x$ . Nawet jeśli  $M_x = 0$ , to pomimo że równanie jest spełnione tożsamościowo, układ jest osobliwy i nie da się go rozwiązać. Jeśli  $M_x \neq 0$ , to w stanie równowagi prowadzi to do sprzeczności. Jednak nie można wykluczyć, że taki stan pojawi się jako przejściowy w trakcie iteracji, kiedy równowaga jeszcze nie została osiągnięta; kiedy siły wewnętrzne i obciążenie zewnętrzne nie są jeszcze zgodne. Należy tu podkreślić znaczenie tego faktu: dla stanu końcowego macierz  $\mathbf{K}$  może być nieosobliwa, ale w trakcie procesu iteracyjnego może pojawić się osobliwość. Taki stan przejściowy uniemożliwia rozwiązanie układu równań. Oznacza to załamanie algorytmu.

Analogiczny problem pojawia się w przypadku pojedynczego punktu w centrum układu współrzędnych, ale wtedy oba momenty bezwładności w (34) są zerowe i oba równania opisujące stan giętny albo są spełnione tożsamościowo, albo sprzeczne. Bez względu na interpretację powoduje to załamanie algorytmu.

### 7.3.1. Regularyzacja

Pokazano, że osobliwość wynika z niemożności przeniesienia przez wkładki stalowe momentów. Jest to skutek założeń, gdzie tkwi zerowa sztywność giętą wkładek.

Takie założenie nie odpowiada rzeczywistości. Wkładki stalowe mają małą własną sztywność giętą w porównaniu ze sztywnością całego przekroju, ale nie jest to wartość zerowa. Jeśli nie pominie się własnej sztywności giętej stali, czyli momentów bezwładności prętów względem środka ciężkości pręta, to konstrukcja przestaje być chwiejna, nawet układ z jedną wkładką.

Sposobem na ewentualne pojawienie się osobliwości jest eliminowanie jej za pomocą członu uwzględniającego sztywność własną prętów. Tak więc do macierzy układu  $\mathbf{K}$  można dodać macierz  $\mathbf{K}_M$  zdefiniowaną następująco:

$$K_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E^s \sum J_{ox}^s & 0 \\ 0 & 0 & E^s \sum J_{oy}^s \end{bmatrix} \quad (35)$$

gdzie  $\sum J_{ox}^s$  jest sumą momentów bezwładności wkładek.

Dla każdej wkładki moment bezwładności  $J_{ox}^s$  jest liczony względem osi  $x'$  przechodzącej przez środek ciężkości wkładki. Analogicznie definiowane jest  $\sum J_{oy}^s$  i w przypadku przekroju kołowego obie wartości są sobie równe. W świetle poprzedniej analizy jest oczywiste, że  $\mathbf{K} + \mathbf{K}_M$  jest zawsze nieosobliwe. Zamiast równania (32) rozwiązywany będzie układ:

$$(\mathbf{K}(\mathbf{Q}_{n-1}) + \mathbf{K}_M(\mathbf{Q}_{n-1}))\mathbf{Q}_n = \mathbf{F} \quad (36)$$

W ten sposób rozwiązywane jest zadanie nieco ogólniejsze – i bliższe rzeczywistości – niż zakładane, gdyż uwzględniana jest sztywność giętą stali. W konsekwencji należy spodzie-

wać się nieco zmienionego rozwiązania. Jednak, jeśli rozmiary wkładek są pomijalne w stosunku do rozmiarów przekroju, to zmiana rozwiązania powinna być również pomijalna. Jeśli jednak rzeczywiście wystąpiła osobliwość, czyli znacząca część zginania jest przenoszona przez zginanie wkładek, to otrzymuje się rozwiązanie, które nie powinno być zaakceptowane, gdyż nie mieści się w ramach założeń. Oszacowanie na końcu różnicy między tymi dwoma rozwiązaniami daje informację, na ile zagadnienie mieści się w ramach przyjętych założeń.

Warto nadmienić, że w zagadnieniach numerycznych, gdzie pojawia się podobnej natury osobliwość, używa się tzw. regularyzacji Tichonowa. Polega ona na dodaniu do wyrazów diagonalnych małych wartości, tak że macierz przestaje być osobliwa. Wartość tę należy starannie dobrać, zbyt duża zmieni wartość rozwiązania, zbyt mała nie usunie osobliwości.

Dobór tej wartości nie jest łatwy, gdyż wielkości w macierzy mogą się zmieniać w szerokich granicach. Przykładowo, zmiana jednostek, w jakich zadawane są wymiary przekroju, z milimetrów na metry, zmienia wartość momentów bezwładności o mnożnik  $10^{-12}$ . Nie można więc umieścić w programie jakiejś ustalonej „małej” wartości. Wielkość strefy ściskanej może zmieniać się w trakcie iteracji od pełnego przekroju betonu do przekroju wkładek. Również proporcje między  $J_x$  a  $J_y$  mogą być bardzo różne w kolejnych krokach iteracyjnych. Należałoby więc dodawać wartości w odpowiedniej relacji do wyrazów macierzy  $\mathbf{K}$ .

Dodawanie macierzy  $\mathbf{K}_M$  może być postrzegane jako regularyzacja Tichonowa. Jednak w tym przypadku nie ma żadnych trudności z doбором wartości, gdyż dodawane wielkości wynikają ze spójnej teorii mechanicznej, a więc będą się one dostosowywać do np. zmiany jednostek.

Ze względu na użycie wartości  $J_{ox}^s$  i  $J_{oy}^s$  jedynie do regularyzacji nie jest konieczne obliczanie dokładnych wartości tych momentów. Każde spójne oszacowanie jest wystarczająco dobre. Jest to istotne dla np. wkładek gwintowanych, gdzie dane są wartości  $F_i^s$ , ale zazwyczaj nie jest dana wartość momentu bezwładności. Wystarczająco dokładne jest np. obliczenie momentu bezwładności na podstawie średnicy, gdzie średnicę można wyliczyć z  $F_j^s$  jak dla pręta okrągłego.

#### 7.4. Ocena błędu

Aby ocenić wpływ ewentualnej osobliwości, należy dla znalezionej  $\mathbf{Q}$  osobno obliczyć siły wewnętrzne, które generują obie macierze (36)

$$\mathbf{KQ} + \mathbf{K}_M \mathbf{Q} = \mathbf{F}_N + \mathbf{F}_M = \mathbf{F} \quad (37)$$

Warto tutaj zwrócić uwagę na znaczenie  $\mathbf{Q}$  w równaniu (37). Szukając przypadku osobliwej macierzy  $\mathbf{K}$ , dobierane było takie  $\mathbf{Q}$ , przy którym potencjalna osobliwość może się pojawić.

Natomiast przy weryfikacji rozwiązania końcowego dane jest  $\mathbf{Q}$ , które niekoniecznie jest tym najbardziej niekorzystnym przypadkiem. Przykładowo, układ z jedną wkładką generuje macierz  $\mathbf{K}$  z podwójną osobliwością, ale tylko dla takich  $\mathbf{Q}$ , dla których cały przekrój jest rozciągany. Wtedy w wektorze  $\mathbf{F}_N$  będzie całe obciążenie momentowe. Dla wszystkich innych przypadków (por. rys. 2) ten sam przekrój będzie dawał nieosobliwą macierz  $\mathbf{K}$ , a w wektorze  $\mathbf{F}_M$  będą zera numeryczne.

Po tej uwadze należy wrócić do pytania, czy dodanie pewnej wielkości do macierzy układu zmienia się rozwiązanie? A jeśli zmienia, to w jakim stopniu?



W wektorze  $\mathbf{F}_M$  pierwsza składowa z natury jest równa zero (przynajmniej numerycznie). Pozostaje ocenić składowe momentowe w obu wektorach  $\mathbf{F}_N$  i  $\mathbf{F}_M$ .

Składowe momentowe w pierwszym wektorze pokazują momenty przenoszone przez beton i momenty od siły skupionych we wkładkach. Składowe momentowe w drugim wektorze odzwierciedlają natomiast część momentu przeniesioną przez zginanie wkładek.

Jeśli ta druga część jest pomijalna w stosunku do pierwszej, to odzyskujemy rozwiązanie w ramach początkowych założeń. Wystarczy, aby sztywność własna prętów była pomijalna w stosunku do sztywności układu, gdyż momenty zewnętrzne będą przenoszone proporcjonalnie do tych sztywności. Proporcje obu tych wielkości w końcowym rozwiązaniu pozwalają ocenić, na ile otrzymane rozwiązanie odpowiada założeniom teorii. Jednak o ile sama koncepcja jest dosyć oczywista, to szczegóły porównania obu członów są o wiele bardziej skomplikowane.

Podstawowym źródłem trudności jest fakt, że wartości składowych momentów w obu wektorach są zależne od układu współrzędnych, a więc w zależności od wyboru układu będziemy mieli różne proporcje miar  $\mathbf{F}_N$  i  $\mathbf{F}_M$ .

Niezbędne jest więc znalezienie takiego sposobu oceny błędu rozwiązania, który będzie obiektywny; niezależny od przyjętego układu współrzędnych. Takim sposobem okazało się wykorzystanie energii sprężystej.

Energia sprężysta jest niezmiennikiem, więc z natury jest niezależna od wyboru układu współrzędnych.

#### 7.4.1. Energia sprężysta

Energia sprężysta układu wyraża się wzorem (por. równanie (5))

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{F} \quad (38)$$

Jeśli obie strony równania (37) zostaną pomnożone przez  $\frac{1}{2} \mathbf{Q}^T$ , to uzyska się zależność energetyczną:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_N + \mathcal{E}_M = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{F}_N + \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{F}_M \quad (39)$$

Wartość  $\mathcal{E}$  przedstawia pracę wykonaną przez obciążenie zewnętrzne i jednocześnie energię sprężystą zgromadzoną przez układ, która może być rozdzielona na część  $\mathcal{E}_N$  i  $\mathcal{E}_M$ .

Człon  $\mathcal{E}_N$  przedstawia część energii sprężystej związanej z naprężeniami normalnymi, ale bez energii związanej ze zginaniem wkładek stalowych. Tę ostatnią część energii reprezentuje człon  $\mathcal{E}_M$ .

Energia całości  $\mathcal{E}$  jest zawsze dodatnia (dla niezerowego obciążenia – zgodnie z 7.1.1), więc można obliczyć ułamek:

$$p = \frac{\mathcal{E}_M}{\mathcal{E}} = \frac{\mathbf{Q}^T \mathbf{F}_M}{\mathbf{Q}^T \mathbf{F}} \quad (40)$$

Ponieważ wartość  $p$  jest miarą względną, jest ona niewrażliwa na skalowanie, czyli zmianę jednostek.

Powstaje pytanie, jaka wartość  $p$  może być uznana za poprawną, a przy jakiej należy zakwestionować rozwiązanie? Autorowi nie są znane oszacowania, które określałyby, jakie nierównomierności naprężeń we wkładkach stalowych można uznać za dopuszczalne.



Dosyć złożone rozważania prowadzą do wstępnego wniosku, że dla poprawnego rozwiązania wartość  $p$  nie powinna przekraczać  $1 \cdot 10^{-3}$ . Nie jest to jednak zagadnienie rozstrzygnięte.

## 8. Implementacja

Wskazane jest, aby algorytm był w maksymalnym możliwym stopniu niezależny od implementacji. Jednak nigdy nie daje się go zupełnie wyrwać z kontekstu realizacji. Dlatego zostaną opisane pewne aspekty implementacyjne, które wydają się być istotne.

W tym i następnym punkcie będą rozważane dwa odmienne konteksty zastosowania algorytmu: do obliczeń analitycznych i do budowy oprogramowania. Każdy kontekst wnosi swoją specyfikę.

Obliczeń analitycznych nie należy rozumieć zbyt dosłownie, typowe rachunki są zbyt żmudne. W jednostkowych przypadkach może zaistnieć konieczność dokonania ręcznych obliczeń, choćby dla zweryfikowania wyników działania programu. Zastosowanie jakiejś formy wspomaganie programem (np. obliczanie charakterystyk geometrycznych programem typu CAD i rozwiązywanie układu równań arkuszem kalkulacyjnym) pozwala zrealizować obliczenia w sposób analogiczny do analitycznych.

### 8.1. Wybór przybliżenia początkowego

Wybór przybliżenia początkowego nie powinien wpływać na wynik końcowy. Jednak wpływa na ilość iteracji, których powinno być jak najmniej.

Dodatkowo w tym przypadku nie ma gwarancji, że proces iteracyjny jest zawsze zbieżny. Wiadomo natomiast, że będzie zbieżny w pobliżu rozwiązania. Jest więc rozsądne, aby starannie wybierać jak najlepsze przybliżenie początkowe.

#### 8.1.1. Analityczne

Ilość iteracji szczególnie odczuwalna w przypadku obliczeń analitycznych, gdzie każda dodatkowa iteracja to ciąg żmudnych rachunków, więc warto, korzystając z racjonalnych przesłanek, wybrać jak najlepsze przybliżenie początkowe. W tym zagadnieniu istnieją bardzo proste inżynierskie przesłanki do wyboru racjonalnego przybliżenia początkowego.

Najprostszym wyborem wydaje się oś obrotu przebiegająca przez środek ciężkości przekroju (zazwyczaj znany). Dodatkowo, można też dobrać kąt nachylenia tak, aby oś była prostopadła do wektora momentów. Tego typu kryteria nie wymagają liczenia żadnych charakterystyk geometrycznych na początku - zakładając, że zadane są charakterystyki całego przekroju, jak również środek ciężkości.

#### 8.1.2. Program

W przypadku obliczeń automatycznych, czyli kompletnego programu, nie ma konieczności starania się o każdą iterację, więc dowolny wybór, który będzie w miarę bliski rozwiązaniu, jest dobry, gdyż algorytm jest szybko zbieżny i – poza skrajnymi wypadkami (np. szukania obwiedni) – wymaga pomijalnych zasobów w stosunku do dostępnych mocy.

Specyfika polega tutaj na tym, że do obliczeń ręcznych typowo zadane są charakterystyki całego przekroju, natomiast zazwyczaj nie są one danymi dla programu. Program otrzymuje

dane o geometrii przekroju (np. punkty tworzące brzeg) i przed rozpoczęciem obliczeń należałoby obliczyć charakterystyki.

Ten sam schemat, jak dla obliczeń analitycznych, realizuje przyjęcie przybliżenia początkowego  $\mathbf{Q}^0 = [-10^{-3}, 0, 0]$  do obliczeń automatycznych. Wartość ta odpowiada  $\epsilon_0 = 10^{-3}$ , czyli 0,1%, i nie jest krytyczna. Taki wybór odpowiada stanowi osiowego ściskania, więc w pierwszym kroku zostaną obliczone charakterystyki dla całego przekroju.

Wybór początkowego przybliżenia jako całego przekroju ściskanego jest konserwatywny, ale bardzo bezpieczny. Jak to było pokazane w punkcie 7. wszystkie przypadki osobliwości macierzy  $\mathbf{K}$  występują w przypadku braku strefy ściskanej betonu. Niezależnie od rozmieszczenia wkładek stalowych w pierwszym kroku dostaje się bardzo dobrze uwarunkowany układ.

## 8.2. Kryterium zakończenia

Dyskusja o kryteriach zakończenia ma jedynie sens w odniesieniu do implementacji komputerowej. Przy obliczeniach analitycznych natychmiast widać, czy położenie osi obrotu się jeszcze zmienia czy praktycznie pozostaje w miejscu.

W przypadku programu komputerowego nie widać jawnie pośrednich położenia osi obrotu i niezbędne jest podanie kryterium zakończenia iteracji.

Naturalnym, numerycznym kryterium zakończenia procesu iteracyjnego (granicy ciągu) jest kryterium na przyrost wyrazu. W momencie, kiedy  $\Delta\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_n - \mathbf{Q}_{n-1}$  jest dostatecznie małe, można uznać, że proces osiągnął granicę – znaleziono rozwiązanie.

Znając wartość końcową  $\mathbf{Q}$  ze wzoru (6) można wyznaczyć położenie osi obrotu przekroju.

Norma matematyczna typu długość  $|\Delta\mathbf{Q}|$  nie jest zbyt naturalną miarą, wektor (macierzy)  $\mathbf{Q}$  zawiera bowiem odkształcenia i krzywizny, czyli wielkości o różnych mianach (jednostkach), teoretycznie mogłaby być dość zawodna.

Bardziej naturalna wydaje się miara oparta na długości w postaci odległości osi obrotu od wybranego punktu czy punktów. Z kolei nie zawsze jest ona łatwa do wyznaczenia z uwagi na kąt obrotu.

Jak to zostanie pokazane w przykładach, proces jest na tyle szybko zbieżny, że właściwie każda miara spełni swoje zadanie, a optymalizacja o jedną iterację więcej lub mniej nie wydaje się warta uwagi.

W praktyce stosowano zarówno miarę  $|\Delta\mathbf{Q}|$ , jak i najprostszą miarę odległości w postaci odległości osi obrotu od środka przekroju, z dodatkowym warunkiem, że ilość iteracji nie może być mniejsza niż trzy. To ostatnie ograniczenie wynika z faktu, że oś obrotu jest definiowana nie tylko przez punkty, ale istotna jest orientacja, czyli np. kolejność punktów. Teoretycznie może się więc zdarzyć, że oś obrotu, jako prosta, przy dwu kolejnych iteracjach nie zmieni położenia, ale zmieni orientację – czyli obszar, który był ściskany, będzie rozciągany i odwrotnie. Odległości się nie zmieniają, ale rozwiązanie jeszcze nie osiągnęło stanu końcowego.

W praktyce ograniczenia, jakie narzucano na dokładność rozwiązania, mogą być bardzo rygorystyczne, gdyż przy szybkiej zbieżności nawet żądanie obliczania położenia osi obrotu z dokładnością do tysięcznych części milimetra (co jest zupełnie bezużyteczne z punktu widzenia praktyki), nie powodowało zwiększenia ilości iteracji o więcej niż jedna lub dwie.

```

if  $F^T \mathbf{F} < \rho$  then
 $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$  wyjście (por. 7.1.1)
end if
 $\mathbf{Q} = 10^{-3} \times [-1, 0, 0]$ 
repeat
 $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}$ 
  Znajdź strefę ściskaną
  Oblicz charakterystyki geometryczne dla obszaru ściskanego
  Zbuduj  $\mathbf{K}$  i  $\mathbf{K}_M$ 
  Rozwiąż  $\mathbf{Q} \leftarrow (\mathbf{K} + \mathbf{K}_M)\mathbf{Q} = \mathbf{F}$ 
 $\Delta\mathbf{Q} = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_0$ 
until  $|\Delta\mathbf{Q}| < \text{tol}$ 
Oblicz  $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{F}$ 
Oblicz  $\mathcal{E}_M = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \mathbf{K}_M \mathbf{Q}$ 
Oblicz  $p = \frac{\mathcal{E}_M}{\mathcal{E}}$ 
if  $p > 10^{-3}$  then
  Błąd, wyjście – por. 7.4.
end if

```

Rys. 4. Algorytm rozwiązania (pseudokod)

Fig. 4.

### 8.2.1. Testowanie

Warto odnotować, że zadanie jest bardzo wrażliwe na błędy we współczynnikach. Omyłkowo wpisany błędny mnożnik do momentu dewiacji skutkowałoł zbieżnością do innej granicy, czyli do innego położenia strefy ściskanej. Pomocne jest to, że w tym zagadnieniu łatwo sprawdzić, bądź oszacować, poprawność wyniku końcowego.

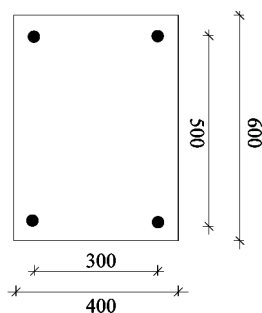
Absolutnym minimum testów jest sprawdzenie przykładu w przesuniętym układzie współrzędnych. Wtedy momenty statyczne i moment dewiacji są niezerowe, więc jakiegokolwiek niespójności we współczynnikach spowodują zbieżność do innej granicy.

## 9. Przykłady

### 9.1. Przekrój prostokątny

Pokazany zostanie przykład zaczerpnięty z podręcznika [8, s. 371]. Geometria układu jest podana na rys. 5. Beton o  $E^b = 20,5$  GPa, stal o  $E^s = 205$  GPa, obciążenie: siła podłużna  $N = -320$  kN (ściskanie) i moment (w środku ciężkości)  $M_x = 128$  kNm.

Jako kotwy przyjęto stal o przekroju  $F_s = 3,53 \text{ cm}^2$ , co odpowiada okrągłym prętom o średnicy  $\phi = 21,2 \text{ mm}$  (w [8] jest omyłkowo  $F_s = 3,415 \text{ cm}^2$ , ale do obliczeń jest przyjmowana wartość jak powyżej).



Rys. 5. Geometria przekroju prostokątnego, wymiary w *mm*

Fig. 5. Geometry of rectangular cross-section, dimensions in *mm*

Początek układu współrzędnych został przyjęty w środku ciężkości przekroju.

Ponieważ przekrój jest symetryczny i zginany względem jednej osi, więc oś obrotu jest zawsze równoległa do osi *x* układu współrzędnych. Położenie osi obrotu jest jednoznacznie określone przez wartość *y*, dla której przecina ona oś *y*.

Na rysunku 6 pokazane są krzywe ilustrujące przebieg iteracji w zależności od początkowego przybliżenia. Obliczenia prowadzono dla wartości  $tol = 10^{-7}$ .

Dla lepszej czytelności na osi pionowej rysunku, zamiast położenia osi obrotu, pokazano granicę strefy ściskanej (wartość w *mm*).

Pierwsza krzywa pokazuje przebieg iteracji, kiedy początkowo granica strefy ściskanej jest na górnej krawędzi przekroju, więc cały przekrój jest równomiernie ściskany. Druga krzywa pokazuje przebieg iteracji, kiedy oś obrotu i granica strefy ściskanej początkowo jest w połowie przekroju (górną część jest ściskana). Czwarta krzywa pokazuje przebieg iteracji, kiedy początkowa granica strefy ściskanej jest na dolnej krawędzi przekroju, czyli na początku cały przekrój jest rozciągany. Wreszcie trzecia, kiedy oś obrotu jest w połowie wysokości przekroju, ale dolna część jest ściskana, a górna rozciągana.

Warto zwrócić uwagę, że krzywa trzecia i czwarta mają niemal ten sam punkt w pierwszej iteracji. Potem te krzywe się pokrywają. Widać też, że nawet w najgorszym przypadku, około czwartego, piątego kroku w obu przypadkach osiągnięte jest rozwiązanie dokładne.

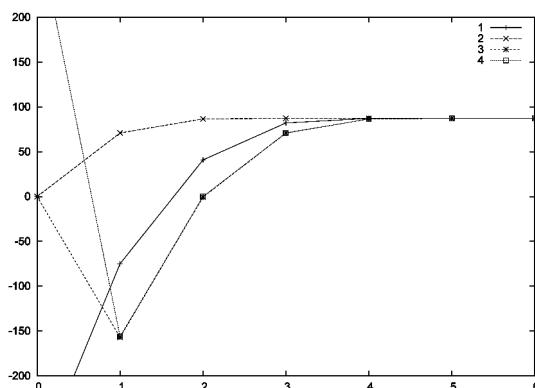
Jeśli prawidłowo zostanie oszacowane przybliżenie początkowe, jak dla drugiej krzywej, to już drugi krok daje niemal dokładne rozwiązanie ( $y = 86,522 \text{ mm}$  wobec dokładnego  $y = 87,233 \text{ mm}$ ).

Uzasadnia to wszystko, co napisano w części dotyczącej zbieżności i stabilności oraz strategii wyboru przybliżenia początkowego.

Końcowa wartość błędu energetycznego wyniosła  $p = 9,5 \cdot 10^{-5}$ .

Pokazane rozwiązanie dotyczy zadania kotew, które jako wykazujące silniejszą nieliniowość jest tutaj istotniejsze. Warto przytoczenia jest porównanie rozwiązania tego samego zadania dla NL, czyli zamiast kotew są to pręty zbrojenia, których powierzchnię i moduł Younga przyjęto identyczną jak dla kotew.

W przypadku NL pręty ściskane dodatkowo stabilizują algorytm, natomiast ze względu na to, że przekrój jest słabo zbrojony, algorytm nie wykazywał istotnych różnic w charakterze zbieżności. Nieco różne jest końcowe położenie granicy strefy ściskanej, które wyniosło  $y = 94,072$  mm.



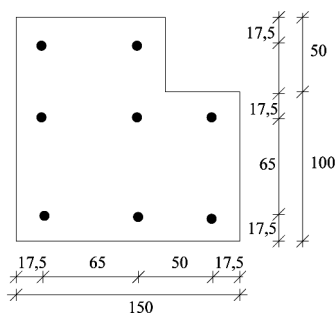
Rys. 6. Wykres położenia granicy strefy ściskanej w kolejnych iteracjach dla różnych przybliżeń początkowych granicy strefy ściskanej (opis w tekście)

Fig. 6. Function of compressed zone range dependent of iteration number for different initial compressed zone

## 9.2. Przekrój niesymetryczny (kątowy)

Mniej trywialnym przykładem jest przekrój niesymetryczny pokazany na rys. 7, którego wymiary są zaczerpnięte z artykułu [2]. W zasadzie taki przekrój nie jest stosowany dla zakotwień, więc obliczenia zostały przeprowadzone dla NL. Z artykułu zaczerpnięto geometrię przekroju, położenie oraz rozmiar  $\phi 6$  prętów zbrojenia.

Przyjęto, że beton o module Younga 20,5 GPa jest zbrojony stalą o module Younga 205 GPa.



Rys. 7. Przekrój niesymetryczny, wymiary i położenie prętów zbrojeniowych

Fig. 7. L-section, size of section and location of reinforcement bars

Ten przykład daje możliwość dokonania interesującego porównania wpływu niesymetrycznego zbrojenia na rozwiązanie.

Jeśli obciążenie zostanie dobrane w ten sposób, aby strefa ściskana miała kształt prostokąta o wysokości 2,5 cm znajdującego się w górnej części przekroju – czyli była powyżej bocznej półki przekroju – oraz pominię się pręty zbrojenia znajdujące się w bocznej półce, jak na rys. 8 (z lewej), to otrzymamy rozwiązanie identyczne jak dla przekroju prostokątnego o wymiarach 10×15 cm zbrojonego symetrycznie sześcioma prętami.

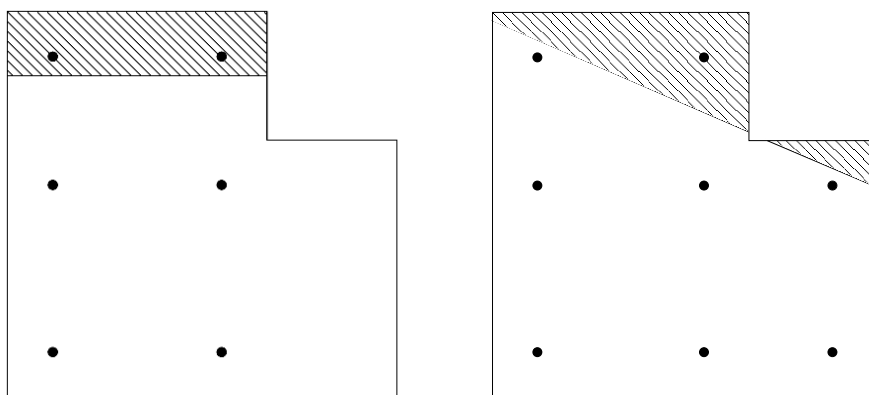
Rozwiązując zadany przekrój z tak dobranym obciążeniem można zobaczyć wpływ dodatkowych dwóch prętów z prawej strony przekroju oraz betonu w półce na rozmiary i kształt strefy ściskanej – rys. 8 (z prawej).

Ze względu na to, że układ osi głównych, centralnych nie jest w tym przypadku naturalny ani wygodny, obliczenia są prowadzone w układzie, gdzie osie są równoległe do krawędzi, a początek układu jest w lewym dolnym rogu przekroju. Względem tego punktu wyznaczone w podany sposób obciążenie wynosi:  $N = 40,8$  kN,  $M_x = -1550,9$  Nm i  $M_y = 2040,0$  Nm.

Dla całego przekroju, jeśli dwa pręty z prawej strony nie zostaną pominięte, oś obrotu nie jest już równoległa do osi  $x$ , jak to jest pokazane na rys. 8 (z prawej). Pokazuje to, jaki może być ilościowy wpływ asymetrii zbrojenia, co jest nieco zaskakujące. Podobnego, chociaż w mniejszej skali, skutku należy się spodziewać dla przekroju prostokątnego, gdzie zbrojenie z jednej strony jest mniejsze niż z drugiej.

Wart odnotowania jest kształt strefy ściskanej. Strefa staje się dwoma rozłącznymi obszarami, co ilustruje trudności mogące się pojawić z algorytmem wyznaczania charakterystyk strefy ściskanej.

Rozwiązanie uzyskuje się znowu w 6 iteracjach. W tabeli 1 podano położenia osi obrotu dla kolejnych iteracji, poczynając od przekroju równomiernie ściskanego. Jest to iteracja zeroowa, dla której oś obrotu składa się wyłącznie z punktów niewłaściwych, dlatego w tabeli nie ma tego kroku. Położenia osi obrotu podano w tzw. notacji odcinkowej. Każdy wiersz tabeli podaje dwa punkty na płaszczyźnie  $xy$ :  $(x,0)$  oraz  $(0,y)$ . Widać wyraźnie, że już po trzech iteracjach uzyskuje się wyniki z błędem mniejszym niż 1 mm.



Rys. 8. Porównanie rozwiązania dla przekroju niesymetrycznego z różnym zbrojeniem dla tego samego obciążenia

Fig. 8. Comparison of compressed zone shape for two different reinforcement and the same load

Tabela 1

**Współrzędne odcinkowe położenia osi obrotu  
w kolejnych iteracjach**

Iteracja	x [mm]	y [mm]
1	298,30328	109,51215
2	331,67385	138,18206
3	339,13142	146,09201
4	339,74742	146,88763
5	339,73878	146,89775
6	339,73877	146,89775

Warto przy okazji skomentować wpływ sztywności giętej zbrojenia. Obciążenie, które można wyliczyć analitycznie dla zadanej wysokości strefy ściskanej i znanych położen (i pola przekroju) sześciu prętów zbrojenia, różni się o wartość  $-4,17329$  Nm w stosunku do obciążenia, które daje rzeczywistą wysokość strefy ściskanej. Różnica wynika właśnie z uwzględnienia momentów przenoszonych przez zginanie prętów zbrojenia. Jest to wartość wynosząca ok. 4 Nm przy całości 1500 Nm, więc jest pomijalna. Jednak dla wartości  $M_x = -1546,8$  Nm nie można odtworzyć rozwiązania z wysokością strefy ściskanej równej dokładnie 2,5 cm.

Ze względu na małą wartość poprawki momentowej obliczony błąd energetyczny jest niewielki i wynosi  $p = 4,3 \cdot 10^{-4}$ .

## 10. Wnioski

Sformułowano prosty, stabilny i efektywny algorytm obliczeniowy wyznaczania strefy ściskanej dla zakotwień. Algorytm ten może być równocześnie używany do obliczania strefy ściskanej dla NL.

Pokazano, że macierz sztywności układu jest jednocześnie macierzą styczną, przez co zbieżność podanego algorytmu jest kwadratowa. Jednocześnie powoduje to, że obliczenia daje się realizować jako tzw. iterację prostą, co bardzo upraszcza programowanie. Brakuje jednak dowodu, że zbieżność algorytmu jest niezależna od wyboru przybliżenia początkowego oraz że nie jest możliwy cykl.

Niezawodność algorytmu osiągnięto poprzez rozwiązanie bardziej ogólnego zadania, niż wymagają tego założenia zadania. Uwzględnienie skończonych rozmiarów wkładek stalowych, czyli niezerowej sztywności giętej, daje gwarancję braku osobliwości macierzy w rozwiązywanym układzie równań. Takie podejście jest nie tylko sposobem na regularyzację zagadnienia dla przypadków analizowanych w artykule. Może być też sposobem na niezawodny algorytm przekrojowy dla innych związków konstytutywnych betonu i stali.

Sformułowano obiektywną miarę błędu rozwiązania rozumianego jako błąd niespełnienia założenia zadania. Jednak nie ma dokładnych kryteriów liczbowych, w jakim zakresie rozwiązanie należy uznać za poprawne, a kiedy należałoby je odrzucić.

Na tym dość prostym, z punktu widzenia mechaniki, przykładzie pokazano różnice między metodą zorientowaną na obliczenia ręczne i metodą zorientowaną na obliczenia automa-



tyczne. Wyeksponowano też, jak długa droga wiedzie od metody rozwiązywania do algorytmu. Chociaż prezentowany przypadek nie jest typowy, to jednak pokazuje, że formułowanie algorytmu często wymaga gruntownego rozumienia mechaniki i często nie może być pozostawione informatykom. Powinni oni dostać algorytm, a nie metodę.

#### Literatura

- [1] Ludovico Di M., Lignola G.P., Prota A., Cosenza E., *Nonlinear Analysis of Cross Sections under Axial Load and Biaxial Bending*, *ACI Structural Journal*, 107(4): 390-399, 7/8 2010.
- [2] Dundar C., Tokgoz S., Tanrikulu A.K., Baran T., *Behaviour of reinforced and concrete-encased composite columns subjected to biaxial bending and axial load*, *Building and Environment*, 43 (6): 1109-1120, 2008.
- [3] *ETAG 001 European Technical Approval Guidelines, Annex C.*, EOTA, wydanie 2006, 1997.
- [4] Matuszak A., *Związek między statyką zakotwień oraz statyką przekroju żelbetowego według metody naprężeń liniowych*, *Czasopismo Techniczne 4-B/2010*, Kraków 2010, s. 75-86.
- [5] Matuszak A., Słoński M., *Projektowanie zakotwień do betonu według przepisów EOTA: ETAG i TR29, Nowoczesne rozwiązania konstrukcyjno-materialowo-technologiczne*, wolumen IV, 243-264, PZITB w Gliwicach, 2010. XXV Ogólnopolskie Warsztaty Pracy Projektanta Konstrukcji, Szczyrk 10–13 marca 2010.
- [6] Pisani M.A., *A numerical method to analyse compact cross-sections*, *Computers & Structures*, 59 (6): 1063-1072, 1996.
- [7] Łubiński M., Filipowicz A., Żółtowski W., *Konstrukcje metalowe. Część I Podstawy projektowania*, Arkady, Warszawa 1986.
- [8] Łubiński M., Filipowicz A., Żółtowski W., *Konstrukcje metalowe. Część I Podstawy projektowania*, Arkady, Warszawa 2000.
- [9] Zak M.L., *Computer analysis of reinforced concrete sections under biaxial bending and longitudinal load*, *ACI Structural Journal*, 90 (2): 163-169, 1993.
- [10] Zupan D., Saje M., *Analytical integration of stress field and tangent material modulus over concrete cross-sections*, *Computers & Structures*, 83 (28-30): 2368-2380, 2005.