

PRZEMYSŁAW WÓJCICKI, ANDRZEJ WINNICKI*

NUMERYCZNY TEST ROZCIĄGANIA ZE ŚCINANIEM WEDŁUG WILLAMA DLA MODELU PLASTYCZNEGO BETONU

NUMERICAL WILLAM'S TEST OF TENSION WITH SHEAR FOR PLASTICITY CONCRETE MODEL

Streszczenie

Artykuł przedstawia badania będące kontynuacją testów numerycznych zaprezentowanych w artykule „Numeryczny test rozciągania ze ścinaniem według Willama dla modeli betonu rys rozmytych dostępnych w programie DIANA”¹. W prezentowanym artykule, w nawiązaniu do poprzedniej publikacji, przedstawiono skrótkowo modele rys rozmytych o ustalonych kierunkach rys oraz z rysami obracającymi się. Następnie przedstawiono podstawy teoretyczne modelu plastyczności z osłabieniem z powierzchnią plastyczności Rankine’a i stowarzyszonym prawem płynięcia, który może być wykorzystany dla opisu właściwości betonu zarysowanego przy rozciąganiu. Podobnie jak we wcześniejszym artykule przeanalizowano zachowanie się modelu plastycznego i porównano je z wcześniej otrzymanymi wynikami dla modeli rys rozmytych na szczelbu punktu materialnego w dwóch testach: rozciągania przy wymuszeniu odkształceniowym i testu rozciągania ze ścinaniem (tzw. test Willama). W teście Willama model materiału jest poddany programowi obciążenia, w którym kierunki odkształceń głównych obracają się.

Słowa kluczowe: beton, plastyczność, rozciąganie, test Willama, symulacje numeryczne, MES

Abstract

The paper presents research results which are follow-up of tests introduced in the article “Numerical Willam’s test of tension with shear for smeared crack concrete models available in DIANA code”¹. In the present paper following the previous publication smeared crack models (both fixed and rotating cracks) are briefly presented. Next, the theoretical background of softening plasticity model with Rankine’s yield function, which can be used for description of concrete cracked in tension, is given. Analogically to the previous publication behaviour of this model is analysed and compared with results obtained earlier for smeared crack models in two tests at the material point level: strain driven tension test and tension – shear test (the so called Willam’s test). In Willam’s test a material model is subjected to a loading programme, in which directions of the principal strains rotate.

Keywords: concrete, smeared cracks, tension, Willam’s test, numerical simulations, FEM

* Mgr inż. Przemysław Wójcicki, dr hab. inż. Andrzej Winnicki, prof. PK, Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska.

¹ Czasopismo Techniczne, 4-B/2010, Wydawnictwo PK, Kraków 2010.

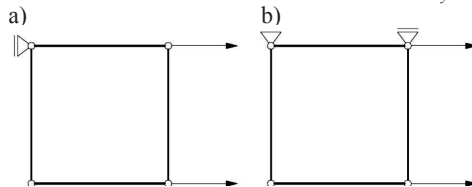
Oznaczenia

ε^e	– odkształcenia sprężyste w układzie globalnym
ε^{cr}	– odkształcenia pochodzące od zarysowania w układzie globalnym
\mathbf{e}_1^{cr}	– wektor odkształceń pochodzących od zarysowania w pierwszej rysie
ε_{nn1}^{cr}	– odkształcenie normalne pochodzące od zarysowania w pierwszej rysie
γ_{nt1}^{cr}	– odkształcenie styczne pochodzące od zarysowania w pierwszej rysie
σ^{pr}	– naprężenie główne dla modelu z rysami obracającymi się
ε^{pr}	– odkształcenia główne dla modelu z rysami obracającymi się
\mathbf{D}_{sec}^{pr}	– macierz sieczna dla modelu z rysami obracającymi się w układzie naprężeń głównych
E_1, E_2	– moduły sieczne dla modelu z rysami obracającymi się
ε^p	– odkształcenia plastyczne (trwale) w układzie globalnym
κ	– wewnętrzny parametr stanu
g_j	– funkcje potencjału plastycznego
$\dot{\lambda}_j$	– mnożniki plastyczne
E_p	– plastyczny moduł wzmocnienia
E	– moduł Younga
ν	– współczynnik Poissona
f_t	– wytrzymałość na rozciąganie
G_f	– energia pęknięcia
G	– moduł Kirchoffa
ε_0	– odkształcenia odpowiadającego naprężeniu $\sigma = f_t$
ε_u^{cr}	– odkształcenia odpowiadającego naprężeniu $\sigma = 0$
σ_1	– wytrzymałość na jednoosiowe rozciąganie (zmniejsza się w procesie odkształceń plastycznych)

1. Wstęp

Celem artykułu jest kontynuacja badań przedstawionych w [1], z zastosowaniem innego modelu materiałowego dostępnego w programie DIANA. Podobnie jak w [1] do badań wykorzystano dwa testy numeryczne:

1. Test jednoosiowego rozciągania przy wymuszeniu kinematycznym (rys. 1) przeprowadzony w dwóch wariantach:
 - a) Jednokierunkowe rozciąganie w kierunku osi x przy zadanym przemieszczeniu u_x i jednoczesnym umożliwieniu swobodnego przesuwu w kierunku osi y (rys. 1a);
 - b) Jednokierunkowe rozciąganie w kierunku osi x przy zadanym przemieszczeniu u_x i zablokowaniu możliwości przesuwu w kierunku osi y , $u_y = 0$ (rys. 1b).



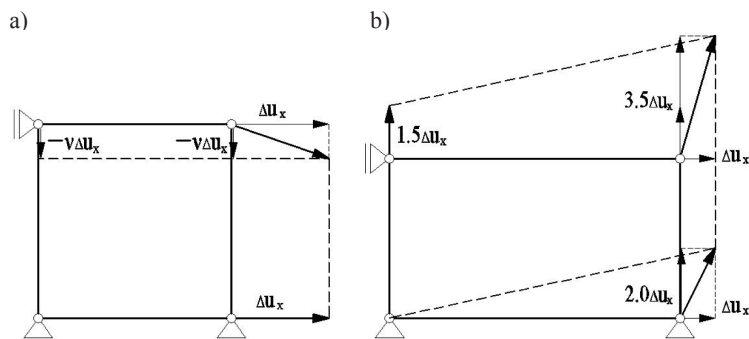
Rys. 1. Warianty testu rozciągania

Fig. 1. Cases of tension test

2. Numeryczny test Willama (rys. 2) przeprowadzany na pojedynczym, 4-węzłowym elemencie skończonym z czterema punktami całkowania (typu Q8MEM [3]), który poddawany jest wymuszeniu kinematycznemu w dwóch fazach:

- Faza jednoosiowego rozciągania w kierunku poziomym z pionową kontrakcją związaną z efektem Poissona (rys. 2a);
- Faza dwuosiowego rozciągania ze ścinaniem (rys. 2b).

Zainteresowanych dokładniejszym opisem wyżej wymienionych testów autorzy odsyłają do [1], natomiast podstawy teoretyczne numerycznego testu Willama można znaleźć w [2].



Rys. 2. Numeryczny test Willama: a) faza I – jednoosiowe rozciąganie, b) faza II – dwuosiowe rozciąganie ze ścinaniem

Fig. 2. Willam's test: a) phase I – uniaxial tension, b) phase II – biaxial tension and shearing

2. Wykorzystane modele betonu

W przeprowadzonych analizach numerycznych wykorzystano model plastyczności z osłabieniem z powierzchnią plastyczności Rankine'a zaimplementowany w programie DIANA [3]. We wcześniejszych badaniach, których wyniki również zostaną przytoczone w tym artykule (dla porównania), posłużono się dwoma modelami rys rozmytych: modelem rys rozmytych o ustalonych kierunkach oraz modelem rys rozmytych z rysami obracającymi się. Dla kompletności opisu poniżej przedstawiono skrótowo oba te modele. Szczegółowy opis można znaleźć w [1].

Model rys rozmytych o ustalonych kierunkach charakteryzuje się możliwością opisanie wielu rys rozmytych w danym punkcie materialnym. Jego podstawowym założeniem jest dekompozycja odkształceń całkowitych w punkcie materialnym na część sprężystą ($\boldsymbol{\epsilon}^e$) i część pochodzącą od zarysowania ($\boldsymbol{\epsilon}^{cr}$):

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^{cr} \quad (1)$$

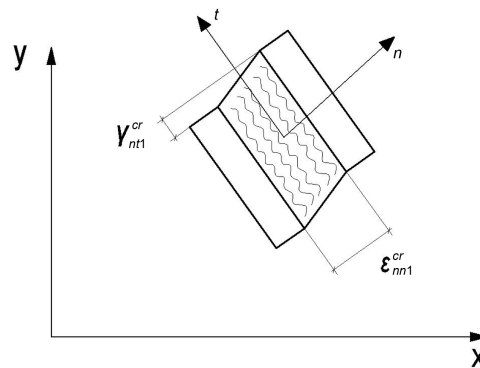
Część pochodząca od zarysowania ($\boldsymbol{\epsilon}^{cr}$) jest sumą w globalnym układzie odniesienia odkształceń normalnych i stycznych, istniejących we wszystkich rysach. Wektor odkształceń \mathbf{e}_1^{cr} w pierwszej rysie w układzie lokalnym związanym z tą rysą ma postać:

$$\mathbf{e}_1^{cr} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_{nn1}^{cr} \\ \boldsymbol{\gamma}_{nt1}^{cr} \end{bmatrix} \quad (2)$$

gdzie:

ϵ_{nn1}^{cr} – odkształcenie normalne w rysie,

γ_{nt1}^{cr} – odkształcenie styczne w rysie.



Rys. 3. Układ lokalny rysy

Fig. 3. Crack local coordinate frame

Model rys rozmytych z rysami obracającymi się zakłada współosiowość kierunków głównych naprężenia i odkształcenia, a osłabienie materiału następuje wyłącznie współosiowo z tymi kierunkami. W sformułowaniu użytym w programie DIANA nie wprowadza się rozbięcia odkształceń na część sprężystą i związaną z zarysowaniem, tylko formułuje się wprost zależność całkowite naprężenie – całkowite odkształcenie zarówno w zakresie wzmocnienia, jak i osłabienia materiału. Zależność naprężenie–odkształcenie w układzie kierunków głównych może być zapisana:

$$\boldsymbol{\sigma}^{pr} = \mathbf{D}_{sec}^{pr} \boldsymbol{\epsilon}^{pr} \quad (3)$$

gdzie:

$$\boldsymbol{\sigma}^{pr} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} \quad \text{– naprężenia główne;}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^{pr} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{bmatrix} \quad \text{– odkształcenia główne.}$$

Macierz sieczna jest dana wzorem:

$$\mathbf{D}_{sec}^{pr} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Moduły sieczne E_1 i E_2 opisują zarówno zachowanie się liniowe do zarysowania, jak i osłabienie materiału.

Jak już wspomniano, podstawowym modelem wykorzystanym do badań w niniejszym artykule jest model plastyczności z osłabieniem z powierzchnią plastyczności Rankine'a. Jest to szczególnie przypadek modelu plastycznego, którego podstawy teoretyczne zostaną zaprezentowane poniżej.

Zgodnie z teorią plastyczności w modelu plastycznym mogą wystąpić trwałe deformacje elementu. Dlatego też zakłada się dekompozycję całkowitych odkształceń w punkcie materialnym na część sprężystą ($\boldsymbol{\varepsilon}^e$) i część plastyczną, związaną z odkształceniem plastycznym (trwałym) ($\boldsymbol{\varepsilon}^p$):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (5)$$

Materiał sprężysto-plastyczny można opisać za pomocą tego modelu jedynie przy przyjęciu następujących założeń:

1. Naprężenia są funkcją wyłącznie części sprężystej odkształceń:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (6)$$

gdzie:

\mathbf{D} – sprężysta macierz sztywności.

2. Przyjmuje się funkcję plastyczności określającą wartość naprężenia, dla której rozpoczyna się plastyczne płynięcie materiału. Funkcja plastyczności zależy od stanu naprężenia i wewnętrznego parametru stanu κ (który opisuje historię naprężeń i odkształceń materiału):

$$f_j(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = 0 \quad (7)$$

gdzie:

$j = 1, 2$ dla płaskiego stanu naprężeń lub

$j = 1, 2, 3$ dla płaskiego stanu odkształceń oraz dla przypadku trójwymiarowego.

Jeśli wartość funkcji plastyczności jest mniejsza od zera, to zakłada się sprężysty stan naprężenia bez wystąpienia plastycznego płynięcia. Dla wartości funkcji plastyczności równej zero następuje plastyczne płynięcie. Dodatnie wartości funkcji plastyczności nie są dopuszczone.

3. Prawo płynięcia plastycznego, które określa wektor plastycznego odkształcenia jako funkcję stanu naprężenia. Według teorii plastyczności (wykorzystującej regułę Koitera [4]) wektor odkształcenia plastycznego jest dany w postaci:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \sum_{j=1}^n \dot{\lambda}_j \frac{\partial g_j}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (8)$$

gdzie dane jest n funkcji potencjału plastycznego g_j , które są funkcjami stanu naprężenia i wewnętrznego parametru stanu: $g_j(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = 0$ ($n = 2$ dla płaskiego stanu naprężeń lub $n = 3$ dla płaskiego stanu odkształceń oraz dla przypadku trójwymiarowego). Plastyczne mnożniki $\dot{\lambda}_j$ są ograniczone przez warunki Kuhna-Tuckera:

$$\begin{cases} f_j \leq 0 \\ \dot{\lambda}_j \geq 0 \\ \dot{\lambda}_j f_j = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Te warunki są w rzeczywistości inną postacią wzorów na dopuszczalne stany plastycznego płynięcia, tzn. zakłada się, że nie wystąpi plastyczne płynięcie ($\dot{\lambda}_j = 0$), jeżeli funkcja plastyczności jest mniejsza od 0 (patrz: punkt 2).

4. Przyjmuje się hipotezę wzmocnienia, która określa ewolucję wewnętrznego parametru stanu. W ogólności proces ten opisuje się jako funkcję wektora naprężeń i wektora plastycznego odkształcenia: $\dot{\kappa} = h(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)$.

Addytywna dekompozycja wektora odkształcenia jest pierwszym etapem różniczkowania relacji sztywności. Wektor naprężenia w formie przyrostowej jest określony przez sprężystą część wektora odkształceń (co wynika z różniczkowania zależności (6)):

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D} \left\{ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \right\} = \mathbf{D} \left\{ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \sum_{j=1}^n \dot{\lambda}_j \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} \quad (10)$$

Warunek konsystencji, gdy aktywna jest tylko jedna powierzchnia plastyczności (np.: f_1 , co powoduje $\dot{\lambda}_1 > 0, \dot{\lambda}_2 = \dot{\lambda}_3 = 0$ zgodnie z warunkami (9)) oraz przy przyjęciu odpowiednich oznaczeń (w tym wypadku $f = f_1$ i $\dot{\lambda} = \dot{\lambda}_1$), dla procesu plastycznego jest dany w formie:

$$\dot{f} = \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \lambda} \dot{\lambda} = 0 \quad (11)$$

Z przekształcenia wzoru (11) otrzymuje się wyrażenie na mnożnik płynięcia plastycznego $\dot{\lambda}$:

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{E_p} \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (12)$$

w którym E_p – plastyczny moduł wzmocnienia dany wzorem:

$$E_p = \frac{\partial f}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \lambda} \quad (13)$$

Podstawiając wyrażenie (12) do wzoru na wektor naprężenia, można otrzymać styczną macierz podatności, a następnie stosując wzór Shermana-Morrisona, uzyskujemy wzór na styczną macierz sztywności:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left[\frac{\mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{D}}{E_p + \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \right] \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (14)$$

Warto zauważyć, że styczna macierz sztywności jest asymetryczna, gdy funkcja potencjału plastycznego nie jest tożsama z funkcją plastyczności, tzn. $f \neq g$. Powyższe sformułowanie nie obejmuje przypadku, gdy w płaskim stanie naprężeń są aktywne dwie powierzchnie plastyczności $f_1 = 0$ i $f_2 = 0$ (tzw. naroże plastyczne). W takim przypadku styczna macierz sztywności ma znacznie bardziej złożoną budowę. Szczegółową postać wraz z wyprowadzeniem można znaleźć na przykład w [7].

Wzory podane powyżej mogą być uznane jako odkształceniowe w tym sensie, że wektor odkształceń całkowitych, niesprężysty wektor odkształceń i wewnętrzny parametr stanu są wszystkie określone w czasie t , a przyrost naprężeń $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ jest otrzymywany dla znanego (narzuczonego) przyrostu odkształceń $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ według wzoru (14).

Jak już wspomniano wcześniej, model plastyczności Rankine'a jest szczególnym przypadkiem modelu plastycznego. Określa on maksymalne dopuszczalne naprężenie główne dla materiału, dzięki czemu może być wykorzystywany do symulacji zarysowania materiałów quasi-kruchych, takich jak beton lub skała. Funkcja plastyczności w sformułowaniu Rankine'a ma postać:

$$f_1(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = \sigma_1 - \bar{\sigma}_1(\kappa_1) = \sqrt{\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\pi}_1^T \boldsymbol{\sigma} - \bar{\sigma}_1(\kappa_1), \quad \sigma_2 \leq \sigma_1 \quad (15)$$

w którym macierz \mathbf{P} ma postać:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

natomiast wektor $\boldsymbol{\pi}_1$ definiuje się jako:

$$\boldsymbol{\pi}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

To sformułowanie prezentuje podstawowe założenie tego modelu, tzn. funkcja plastyczności jest określona tylko dla płaskiego stanu naprężenia. Dla płaskiego stanu odkształcenia i osiowo symetrycznego stanu naprężenia funkcja plastyczności według Rankine'a jest uzupełniona o kryterium *tension cut-off* w kierunku prostopadłym, które można zapisać jako:

$$f_3(\boldsymbol{\sigma}, \kappa_3) = \sigma_3 - \bar{\sigma}_3(\kappa_3) = \boldsymbol{\pi}_3^T \boldsymbol{\sigma} - \bar{\sigma}_3(\kappa_3) \quad (18)$$

z wektorem $\boldsymbol{\pi}_3$ danym jako:

$$\boldsymbol{\pi}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Reguła płynięcia jest na ogół sformułowana za pomocą stowarzyszonych praw płynięcia $g_1 \equiv f_1$ oraz $g_3 \equiv f_3$. Dzięki użyciu reguły Koitera [4] wektor plastycznego odkształcenia można zdefiniować według wzoru (8) jako:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}_1 \left\{ \frac{\mathbf{P}\boldsymbol{\sigma}}{2\Psi} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}_1 \right\} + \dot{\lambda}_3 \boldsymbol{\pi}_3 \quad (20)$$

gdzie Ψ jest określone jako:

$$\Psi = \sqrt{\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}} \quad (21)$$

Wzmocnienie, czyli w tym wypadku relacja między zmiennymi κ_1 i κ_3 oraz procesem plastycznym, jest sformułowane za pomocą hipotezy wzmocnienia plastycznego. Dla powierzchni płynięcia Rankine'a przyjęto stosowanie dwóch różnych odmian tej hipotezy:

1. Hipoteza wzmocnienia odkształceniowego, w której wcześniej wspomniana relacja przyjmuje postać:

$$\begin{cases} \dot{\kappa}_1 = \sqrt{\dot{\varepsilon}_1^p \dot{\varepsilon}_1^p} \\ \dot{\kappa}_3 = \sqrt{\dot{\varepsilon}_3^p \dot{\varepsilon}_3^p} \end{cases} \quad (22)$$

którą następnie można doprowadzić do postaci:

$$\begin{cases} \dot{\kappa}_1 = \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\kappa}_3 = \dot{\lambda}_3 \end{cases} \quad (23)$$

2. Hipoteza pracy plastycznej, w której poszukiwana relacja określona jest jako:

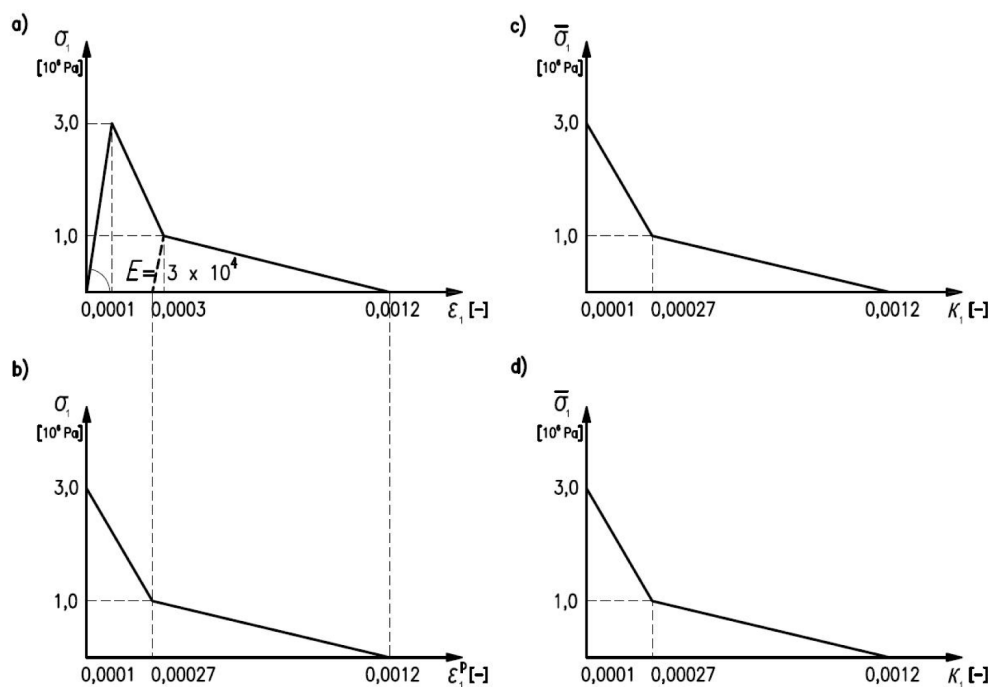
$$\begin{cases} \dot{W}_1^p = \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\lambda}_1 \frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \equiv \bar{\sigma}_1(\kappa_1) \dot{\kappa}_1 \\ \dot{W}_3^p = \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\lambda}_3 \frac{\partial f_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \equiv \bar{\sigma}_3(\kappa_3) \dot{\kappa}_3 \end{cases} \quad (24)$$

którą również można ostatecznie doprowadzić do postaci:

$$\begin{cases} \dot{\kappa}_1 = \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\kappa}_3 = \dot{\lambda}_3 \end{cases} \quad (25)$$

Jak widać z powyższego sformułowania, w zaproponowanym opisie wprowadza się niezależne parametry stanu (κ_1, κ_3) dla pierwszej i trzeciej powierzchni plastycznej. W symulacjach numerycznych prezentowanych w artykule autorzy przyjęli hipotezę odkształceniową.

Relacja $\sigma - \kappa$ dla powierzchni płynięcia Rankine'a nie jest zależna od przyjętej hipotezy wzmocnienia plastycznego, co wynika z identyczności wzorów (23) i (25). Potwierdza to eksperyment zaczerpnięty z [3], zaprezentowany na rys. 4. Wykres 4a) prezentuje zależność $\sigma - \varepsilon$. W tym przypadku plastyczne odkształcenie ε_1^p jest określone jako $\varepsilon_1 - \varepsilon_1^e$. Wykres 4b) prezentuje zależność naprężenie–odkształcenie plastyczne.



Rys. 4. Wykres funkcji wzmocnienia – osłabienia dla modelu plastyczności Rankine'a: a) wykres naprężenie całkowite – odkształcenie całkowite, b) wykres naprężenie całkowite – odkształcenie plastyczne, c) wykres granica plastyczności – wewnętrzny parametr stanu dla hipotezy wzmocnienia odkształceniowego, d) Wykres granica plastyczności – wewnętrzny parametr stanu dla hipotezy pracy plastycznej

Fig. 4. Rankine's plasticity hardening diagram: a) total stress – total strain diagram, b) total stress – plastic strain diagram, c) yield limit – internal state parameter diagram for strain hardening, d) yield limit – internal state parameter diagram for work hardening

Wartość plastycznego odkształcenia zgodnie ze wzorem (20) wynosi:

$$\dot{\epsilon}_1^p = \dot{\lambda}_1 \quad (26)$$

Dla jednoosiowego rozciągania zależność między naprężeniem całkowitym oraz odpowiadającą mu granicą plastyczności wg wzoru (15) ma postać:

$$\bar{\sigma}_1 = \sigma_1 \quad (27)$$

Jak pokazano wcześniej, dla obu hipotez wzmocnienia (odkształceniowego i pracy plastycznej) zachodzi związek (patrz: wzory 23 i 25):

$$\dot{\kappa}_1 = \dot{\lambda}_1 \quad (28)$$

Porównując wzory (26) i (28), otrzymuje się zależność:

$$\kappa_1 = \dot{\epsilon}_1^p \quad (29)$$

Ze wzorów (27) i (29) wynika wprost, że wykres funkcji $\sigma_1 - \epsilon_1^p$ (rys. 4b) jest tożsamy z wykresami funkcji $\bar{\sigma}_1 - \kappa_1$ (dla obu przyjętych hipotez wzmocnienia, rys. 4c i 4d), które są niezbędne dla pełnego sformułowania modelu.

Identyczną procedurę należy zastosować do wyznaczenia zależności $\bar{\sigma}_3 - \kappa_3$.

3. Dane materiałowe

Do symulacji numerycznych podobnie jak w testach w [1] przyjęto element skończony o wymiarach 10×10 cm oraz grubości $h = 10$ cm.

Dane materiałowe ustalono jak dla betonu C25/30 według normy EN 1992-1-1 [8], tj.:

- $E = 31 \cdot 10^9$ Pa;
- $\nu = 0,2$;
- $f_t = 1,8 \cdot 10^6$ Pa.

Dla tak przyjętych wartości E i f_t przy założeniu liniowo sprężystych właściwości materiału otrzymuje się odkształcenie w chwili zarysowania równe: $\epsilon_0 = f_t/E = 0,058 \cdot 10^{-3}$.

W przyjętym modelu plastycznym betonu nie jest możliwe zadeklarowanie przez użytkownika bezpośrednio wartości granicznego odkształcenia ϵ_u . Program (podobnie jak w przypadku modelu rys rozmytych z rysami obracającymi się) wymaga bezpośrednio podania wartości energii pęknięcia G_f . W teście analogicznie jak w [1] graniczne odkształcenie ϵ_u^{cr} odpowiadające spadkowi naprężeń do 0 na ścieżce podkrytycznej przyjęto jako $\epsilon_u^{cr} = 5\epsilon_0 = 0,290 \cdot 10^{-3}$. Opierając się na zasadach przyjętych w programie DIANA (które szerzej objaśniono w [1]) oraz wcześniejszych badaniach, przyjęto $G_f = 37,3$ N/m.

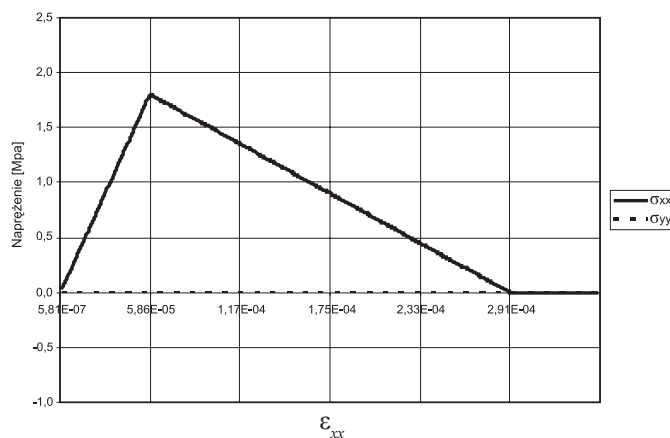
4. Symulacje numeryczne

4.1. Próba rozciągania

Próbie rozciągania przeprowadzono w dwóch wariantach wymuszenia kinematycznego (patrz: rys. 1). Rysunek 5 przedstawia wyniki testu rozciągania w wariantach 1a dla modelu rys rozmytych o ustalonych kierunkach i modelu rys rozmytych z rysami obracającymi się (w trakcie eksperymentu uzyskano identyczne wyniki dla obu modeli). W obu przypadkach założono liniową funkcję osłabienia. Jak pokazuje wynik próby, dla jednoosiowego (w przestrzeni naprężeń) rozciągania – wariant 1a, model materiału zachowuje się zgodnie z przyjętymi założeniami. Początkowo naprężenie σ_{xx} stale rośnie, osiągając wartość f_t , po czym dochodzi do zarysowania i spada ono stopniowo do zera. W tym czasie naprężenie σ_{yy} pozostaje równe zero.

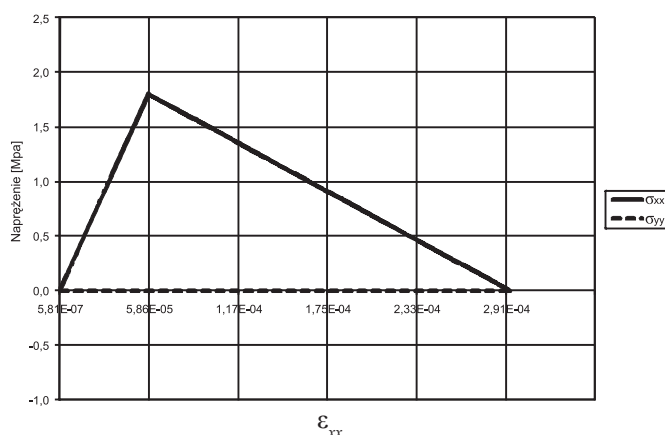
Dla modelu plastyczności Rankine'a z liniową funkcją osłabienia przebieg naprężeń σ_{xx} i σ_{yy} dla przypadku 1a jest identyczny jak dla obu modeli rys rozmytych – rys. 6, jednak program DIANA przerwał obliczenia po osiągnięciu przez odkształcenie wartości $\epsilon_u^{cr} = 0,293 \cdot 10^{-3}$. Wykres dla plastyczności Rankine'a z funkcją osłabienia wg Hordijka i współpracowników (rys. 7) jest podobny do pozostałych, jeśli chodzi o zasadniczy przebieg, jednak przyjmuje wykładniczy kształt oraz naprężenia σ_{xx} osiągają wartość 0 dopiero dla odkształceń na poziomie $\epsilon_u^{cr} = 0,752 \cdot 10^{-3}$.

Dla wariantu 1b osiowego rozciągania uzyskano takie same wykresy naprężeń dla modelu rys rozmytych o ustalonych kierunkach i modelu plastyczności Rankine'a z liniową funkcją osłabienia (rys. 8 i 10). Można zaobserwować identyczny jak w wypadku wariantu 1a wykres naprężeń σ_{xx} , natomiast wykres naprężeń σ_{yy} najpierw wzrasta do wartości $f_y = 3,6 \cdot 10^5$ Pa, po czym podobnie jak σ_{xx} spada do 0. Istotnie różny jest przebieg naprężeń dla modelu rys obracających się (rys. 9). Brak rozseparowania odpowiedzi w kierunkach x i y w zakresie pokrytym prowadzi do narastania naprężeń σ_{yy} aż do osiągnięcia wartości f_t i poprzecznego wtórnego zarysowania. Zjawisko to jest w pełni zgodne z przyjętym modelem, ale trudno je uznać za poprawnie opisujące rzeczywistość.



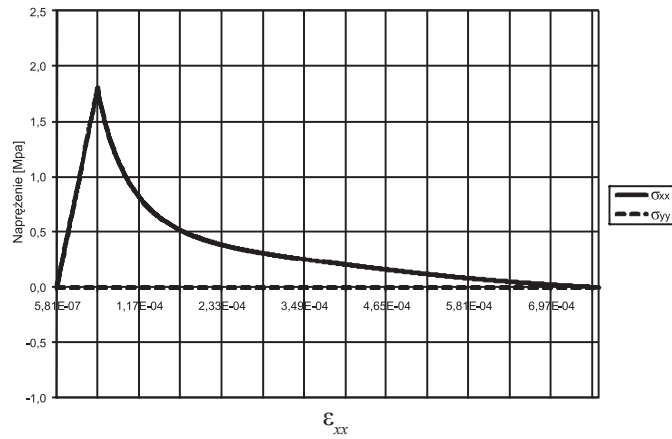
Rys. 5. Rozciąganie, wariant 1a, naprężenia – model rys rozmytych o ustalonych kierunkach oraz z rysami obracającymi się

Fig. 5. Tension, case 1a, stresses – model with strain decomposition and rotating crack model



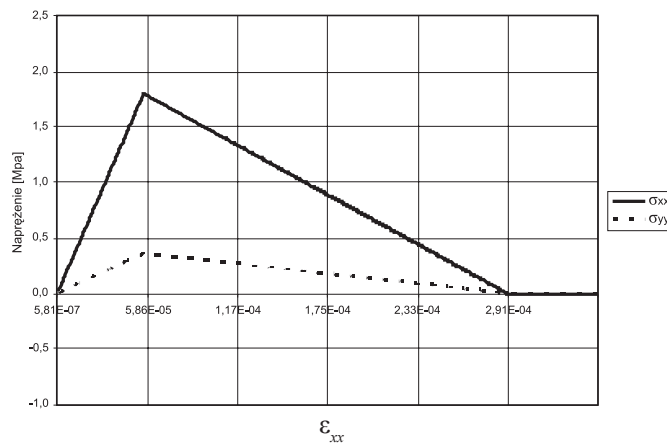
Rys. 6. Rozciąganie, wariant 1a, naprężenia – model plastyczności Rankine'a, liniowa funkcja osłabienia

Fig. 6. Tension, case 1a, stresses – Rankine's plasticity model, linear softening function



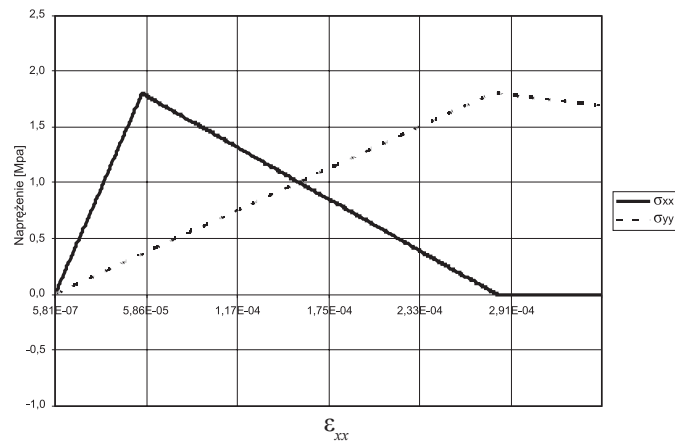
Rys. 7. Rozciąganie, wariant 1a, naprężenia – model plastyczności Rankine'a, funkcja osłabienia wg Hordijka i współpracowników

Fig. 7. Tension, case 1a, stresses – Rankine's plasticity model, softening function according to Hordijk et al



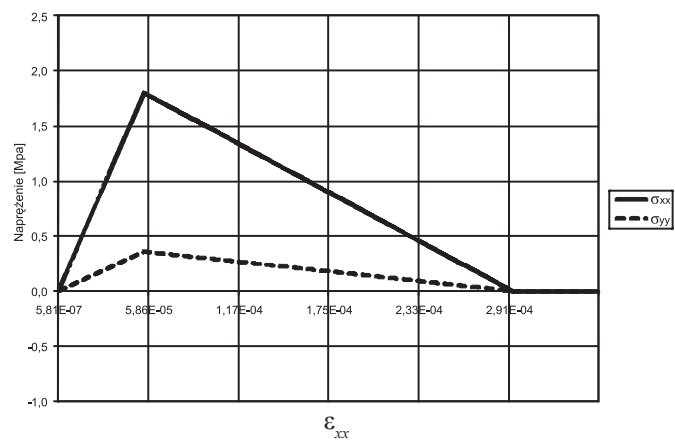
Rys. 8. Rozciąganie, wariant 1b, naprężenia – model rys rozmytych o ustalonych kierunkach

Fig. 8. Tension, case 1b, stresses – model with strain decomposition



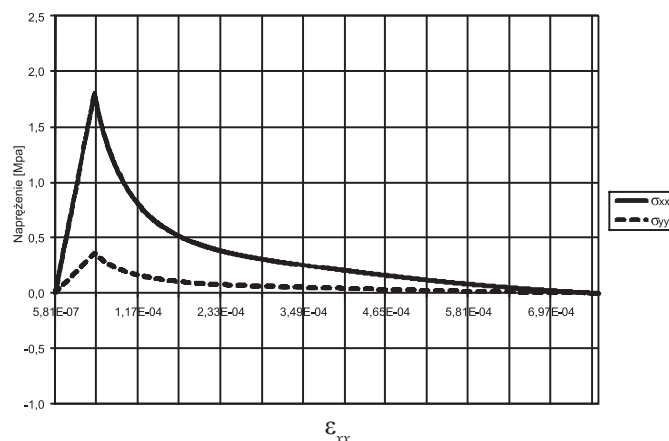
Rys. 9. Rozciąganie, wariant 1b, naprężenia – model rys obracających się

Fig. 9. Tension, case 1b, stresses – rotating crack model



Rys. 10. Rozciąganie, wariant 1b, naprężenia – model plastyczności Rankine'a, liniowa funkcja osłabienia

Fig. 10. Tension, case 1b, stresses – Rankine's plasticity model, linear softening function



Rys. 11. Rozciąganie, wariant 1b, napężenia – model plastyczności Rankine’a, funkcja osłabienia wg Hordijka i współczynników

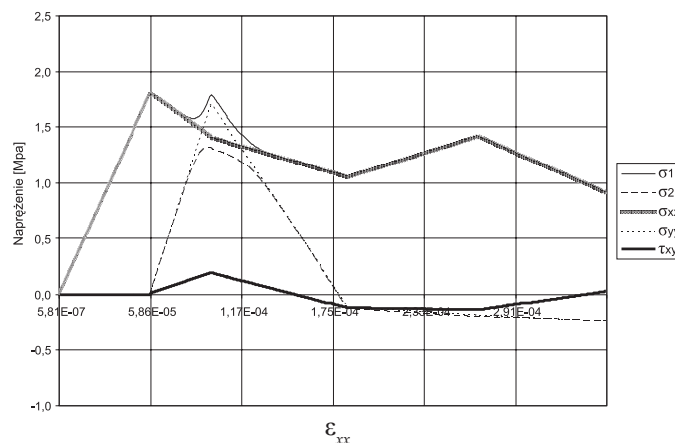
Fig. 11. Tension, case 1b, stresses – Rankine’s plasticity model, softening function according to Hordijk at al

Rysunek 11 prezentuje wyniki dla modelu plastyczności Rankine’a z funkcją osłabienia wg Hordijka i współczynników. Analogicznie jak w przypadku 1a można zaobserwować podobieństwo do wykresów modeli rys rozmytych z wyjątkiem wykładniczego kształtu wykresu oraz dużo wyższej wartości ϵ_u^{cr} .

4.2. Test Willama

Test Willama przedstawiony w punkcie 1 (rys. 2) zrealizowano we wcześniejszych badaniach [1] dla modelu z rysami o ustalonych kierunkach przy kilku różnych wartościach współczynnika β . W każdym przypadku analizowano również wpływ kąta progowego θ pomiędzy ostatnim zaistniałym zarysowaniem a nową tworzącą się rysą. Dla tego modelu zarysowania przyjęto też liniową funkcję osłabienia. Z uzyskanych wtedy wyników za warty zaprezentowania uznano przypadek dla dość niskiej wartości $\beta = 0,2$ oraz kąta $\theta = 45^\circ$ lub $\theta = 30^\circ$ (dla obu przypadków uzyskano identyczne wyniki). Dla modelu rys obracających się wykonano obliczenia w dwóch wariantach – dla liniowej oraz przyjętej według Hordijka i współczynników funkcji osłabienia. Na wszystkich rysunkach przedstawiono napężenia w układzie globalnym σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} oraz napężenia główne σ_1 , σ_2 w funkcji stale rosnących odkształceń ϵ_{xx} .

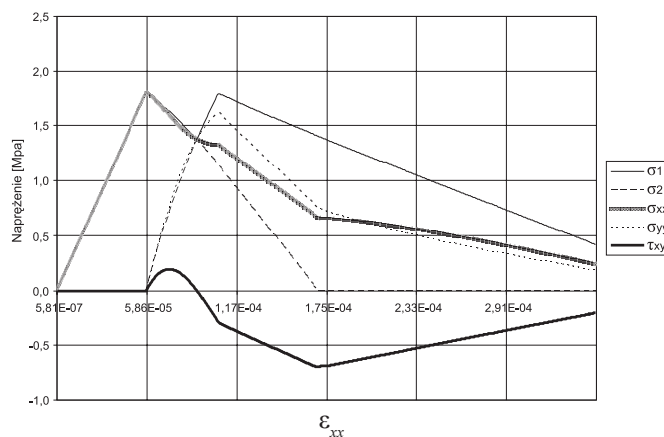
Rysunek 12 przedstawia wyniki dla parametru $\beta = 0,2$ i wartości θ równych 45° i 30° . Obserwuje się tworzenie kolejno trzech rys, po utworzeniu się drugiej rysy następuje zamknięcie się pierwszej rysy (co jest widoczne na wykresie σ_{xx}). W końcowej fazie obciążenia napężenia główne σ_1 i σ_2 dalekie są od zera.



Rys. 12. Test Willama, model rys rozmytych o ustalonych kierunkach, $\beta = 0,2$, $\theta = 45^\circ$ lub $\theta = 30^\circ$

Fig. 12. Willam's test, model with strain decomposition $\beta = 0,2$, $\theta = 45^\circ$ and $\theta = 30^\circ$

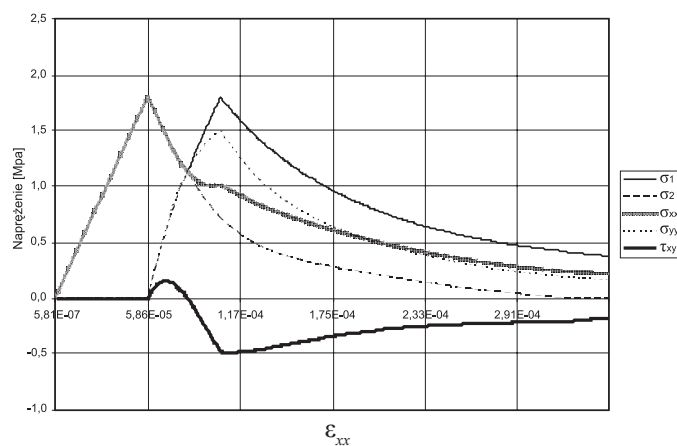
Rysunki 13 i 14 przedstawiają wyniki dla modelu rys obracających z rysami obracającymi się z odpowiednio liniową oraz przyjętą wg Hordijka i współpracowników funkcją osłabienia [8]. W obu przypadkach obserwuje się najpierw powstanie pierwszej rysy (która zmienia swój kierunek w procesie obciążenia), a następnie drugiej prostopadłej rysy. Powstanie drugiej rysy jest związane z efektem sprzężenia obserwowanym na rys. 9, ponieważ odkształcenia ϵ_2 w procesie obciążenia przybierają znacznie mniejsze wartości niż ϵ_1 . Przez cały czas w procesie obciążenia zachodzi $\sigma_1 \leq f_p$, $\sigma_2 \leq f_t$. Wykresy σ_1 i σ_2 w procesie obciążenia w zakresie pokrytycznym mają charakter odpowiadający przyjętej krzywej osłabienia. W obu przypadkach na końcu procesu obciążenia naprężenia główne σ_1 i σ_2 zmiierają do zera.



Rys. 13. Test Willama, model rys obracających się, liniowa funkcja osłabienia

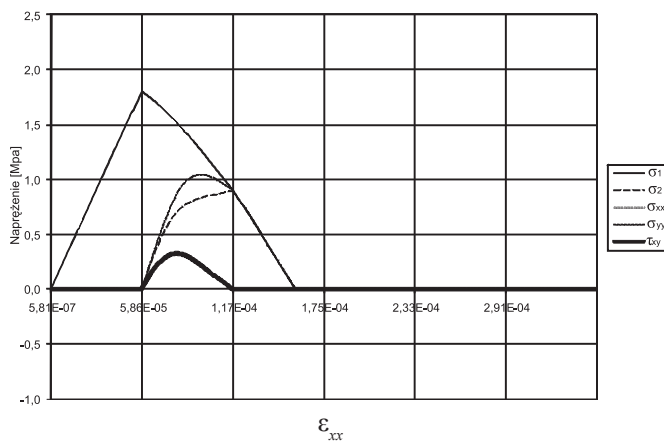
Fig. 13. Willam's test, rotating crack model, linear softening function

Rysunki 15 i 16 prezentują wyniki testu dla modelu plastyczności Rankine'a z różnymi krzywymi wzmocnienia. Obserwujemy tu wzrost naprężeń głównych σ_1 oraz σ_{xx} do wartości f_p , po czym następuje wykres o kształcie zależnym od wybranego typu krzywej wzmocnienia. Naprężenia w kierunku y oraz styczne początkowo, do chwili osiągnięcia przez σ_1 wartości f_p , utrzymują się na poziomie zerowym, po czym obserwuje się wzrost ich wartości do pewnego poziomu, a następnie spadek do wartości zerowej współliniowo z wykresem σ_{xx} .



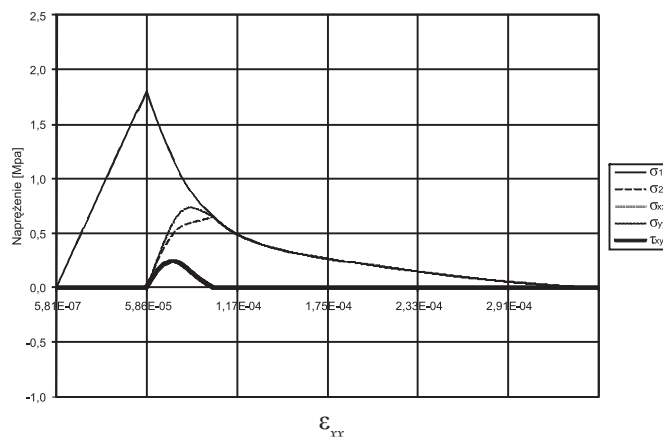
Rys. 14. Test Willama, model rys obracających się, funkcja osłabienia wg Hordijka i współpracowników

Fig. 14. Willam's test, rotating crack model, softening function according to Hordijk et al



Rys. 15. Test Willama, model plastyczności Rankine'a, liniowa funkcja osłabienia

Fig. 15. Willam's test, Rankine's plasticity model, linear softening function



Rys. 16. Test Willama, model plastyczności Rankine'a, funkcja osłabienia wg Hordijka i współpracowników

Fig. 16. Willam's test, Rankine's plasticity model, softening function according to Hordijk et al

5. Wnioski

Praca prezentuje wyniki dla modelu plastycznego z osłabieniem z krzywą płynięcia według Rankine'a poddanego dwóm elementarnym testom numerycznym opisującym zachowanie się materiału na szczelbu punktu materialnego, porównując je jednocześnie z wynikami uzyskanymi we wcześniejszych badaniach dla modeli rys rozmytych [1].

W wyniku wyżej wymienionych testów stwierdzono, że model plastyczności Rankine'a spełnia oba warunki numerycznego testu Willama podane w [5] i [6]:

1. Naprężenia główne w procesie obciążenia nie przekraczają wartości f_t ($\sigma_1 \leq f_t$, $\sigma_2 \leq f_t$);
2. Naprężenia główne w procesie obciążenia w zakresie pokrytycznym zmierzają stopniowo do zera.

Warto przypomnieć, że w [1] stwierdzono, iż model rys rozmytych z rysami o ustalonych kierunkach spełnił tylko pierwszy z tych warunków. Model rys rozmytych z rysami obracającymi się spełnił oba warunki, jednak w modelu tym tworzy się wtórna rysa prostopadła do rysy pierwotnej, co jest wynikiem niepoprawnego opisanie sprzężenia pomiędzy kierunkiem maksymalnego naprężenia rozciągającego σ_1 a kierunkiem poprzecznym σ_2 .

Ostatni z testowanych modeli – model plastyczności Rankine'a, wydaje się być najlepiej opisującym rzeczywistość, gdyż poprawnie spełnia oba warunki numerycznego testu Willama. Naprężenie główne nigdy nie przekracza wartości f_t , a w zakresie pokrytycznym wyraźnie dąży do zera, co widać na rys. 15 i 16.

Literatura

- [1] Wójcicki P., Winnicki A., *Numeryczny test rozciągania ze ścinaniem według Willama dla modeli betonu rys rozmytych dostępnych w programie DIANA*, Czasopismo Techniczne 4-B/2010, Wydawnictwo PK, Kraków 2010.
- [2] Willam K., Pramono E., Sture S., *Fundamental issues of smeared crack models*, Proc. SEM-RILEM Int. Conf. On Fracture of Concrete and Rock, S. Shah and S. Swartz, Eds., Society of Engineering Mechanics, Bethel Connecticut 1987, 142-153.
- [3] TNO Diana-8.1 Manual, Second ed., May 16, 2003.
- [4] Koiter W.T., *Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with singular yield surface*, Q. Appl. Mech. 11, 1953, 350-354.
- [5] Wosatko A., *Finite-element analysis of cracking in concrete using gradient damage-plasticity*, praca doktorska, Politechnika Krakowska, Kraków 2008.
- [6] Reinhardt H.W., *Fracture mechanics of an elastic softening material like concrete*, Heron 29, z. 2/1984.
- [7] Jirásek M., Bažant Z.P., *Inelastic Analysis of structures*, John Wiley & Sons LTD, 2002, 339.
- [8] Eurocode 2 Design of concrete structures – Part 1-1: General – Common rules for building and civil engineering structures.