

MONIKA GWADERA, KRZYSZTOF KUPIEC, TADEUSZ KOMOROWICZ*

ZASTOSOWANIE PRZYBLIŻONYCH RÓWNAŃ NIEUSTALONEGO PRZENOSZENIA CIEPŁA DLA CIAŁ O RÓŻNYCH KSZTAŁTACH

APPLICATION OF APPROXIMATE EQUATIONS OF TRANSIENT HEAT TRANSFER FOR BODIES OF VARIOUS SHAPES

Streszczenie

Zaprezentowano przybliżone równanie kinetyki nieustalonego przenoszenia ciepła (lub masy), mające postać równania różniczkowego zwyczajnego. Proponowana zależność może być stosowana dla ciał o kształcie płyty, cylindra lub kuli. Równanie przetestowano numerycznie dla przypadku chłodzenia promieniowego, otrzymując dobrą zgodność z wynikami modelu ścisłego.

Słowa kluczowe: przybliżone równanie kinetyczne, nieustalone przenoszenie ciepła, chłodzenie promieniowe

Abstract

An approximate kinetic equation for transient heat (or mass) transfer processes has been presented. It has the form of an ordinary differential equation so it can be easily integrated. The proposed relation may be applied to bodies in the shape of a plate, cylinder or sphere. The equation has been tested numerically for the case of radiative cooling and a good agreement with results of an exact model has been obtained.

Keywords: approximate kinetic equation, transient heat transfer, radiative cooling

* Mgr inż. Monika Gwadera, doktorantka, dr hab. inż. Krzysztof Kupiec, prof. PK, dr inż. Tadeusz Komorowicz, Instytut Inżynierii Chemicznej i Procesowej, Wydział Inżynierii Chemicznej i Procesowej, Politechnika Krakowska.

Oznaczenia

- A – bezwymiarowa temperatura
 c_p – ciepło właściwe [J/(kg·K)]
 k – współczynnik przewodzenia ciepła [W/(m·K)]
 m – parametr geometryczny
 N_{rc} – parametr promienisto-przewodnościowy
 s – wymiar charakterystyczny [m]
 t – czas [s]
 T – temperatura [K]
 T_b – temperatura upustu [K]
 x – współrzędna położenia [m]

Symbole greckie

- α – dyfuzyjność cieplna (= $k/(c_p \cdot \rho)$) [m²/s]
 ε – współczynnik emisji
 η – bezwymiarowa współrzędna położenia
 ρ – gęstość [kg/m³]
 σ – stała Stefana-Boltzmana (= $5,67 \cdot 10^{-8}$ [W/(mK⁴)])
 τ – czas bezwymiarowy

Indeksy

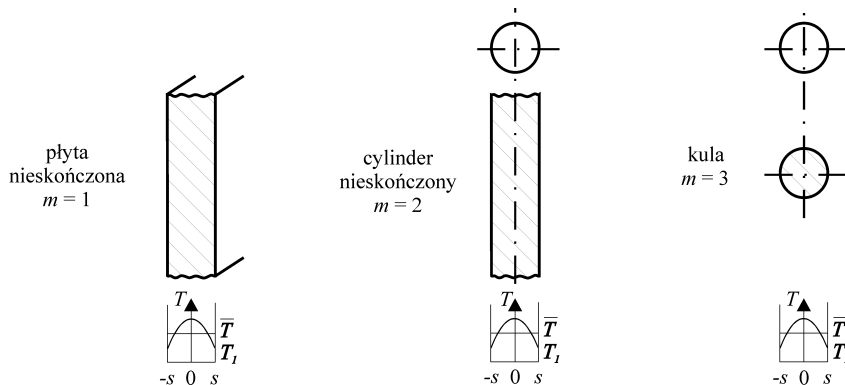
- l – powierzchnia ciała
 i – wartość początkowa
 $\bar{\quad}$ – wartość średnia

1. Wstęp

W modelach niustalonych procesów przenoszenia ciepła i masy występują równania różniczkowe cząstkowe, w których zmienne niezależne to współrzędne położenia i czas. Rozwiązywanie tego typu zależności jest czasochłonne. Uproszczenie modelu można uzyskać przez wyeliminowanie zmiennej położenia i zastosowanie przybliżonych równań kinetycznych, mających postać równań różniczkowych zwyczajnych.

Przybliżone równania kinetyczne są stosowane m.in. w modelowaniu kinetyki adsorpcji [1–4]. Określają one szybkość procesu w funkcji jego siły napędowej. Z uwagi na analogię pomiędzy transportem ciepła i masy mogą być również wykorzystane do modelowania procesów związanych z niustalonym przewodzeniem ciepła [5–8].

Ze względu na warunki, w jakich zachodzą procesy przenoszenia, można wyróżnić układy, w których zewnętrzne opory przenoszenia są znaczące lub też mogą być pominięte. Zewnętrzne opory przenoszenia mogą wynikać z konwekcji bądź promieniowania (pierwszy przypadek dotyczy zarówno procesów cieplnych, jak i dyfuzyjnych). Artykuł ten dotyczy przypadku, gdy zewnętrzne opory przenoszenia są związane z promieniowaniem cieplnym. Rozważono proces chłodzenia radiacyjnego. Taki proces zachodzi w przypadku chłodzenia ciał znajdujących się w próżni. Warto podkreślić, że był on już analizowany w pracach [5–6]



Rys. 1. Kształty podstawowe wraz z rozkładami temperatury podczas chłodzenia

Fig. 1. Basic shapes and temperature profiles during cooling

dla ciał o kształcie kulistym. W pracy [7] zaproponowano uogólnione uproszczone równanie kinetyczne słuszne dla ciał o różnych kształtach: dla płyty nieskończonej, cylindra nieskończonego oraz dla kuli (rys. 1).

Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie ścisłych oraz przybliżonych zależności kinetycznych w uogólnionej postaci, z wykorzystaniem parametru geometrycznego m charakteryzującego poszczególne kształty ciał. Przybliżone równanie zaproponowane w pracy [7] przetestowano numerycznie, porównując wyniki otrzymane poprzez jego rozwiązanie z wynikami modelu ścisłego oraz wynikami otrzymanymi w oparciu o klasyczne przybliżone równanie kinetyczne LDF (*Linear Driving Force* [1, 9–12]). Ponadto przedstawiono przykład obliczeniowy ilustrujący sposób korzystania z uproszczonych równań.

2. Model ścisły

Do dokładnego opisu niestabilnych procesów przenoszenia ciepła i masy służą odpowiednio równanie przewodzenia ciepła Fouriera oraz równanie dyfuzji Ficka. Równania te mają dla poszczególnych kształtów ciał postaci bezwymiarowe przedstawione w trzecim wierszu tabeli 1 [13]. Po wprowadzeniu parametru geometrycznego m , równania można sprowadzić do postaci ogólnej:

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} = \frac{1}{\eta^{m-1}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta^{m-1} \frac{\partial A}{\partial \eta} \right) \quad (1)$$

przy czym η jest bezwymiarową współrzędną położenia:

$$\eta = \frac{x}{s} \quad (2)$$

natomiast τ jest bezwymiarowym czasem:

$$\tau = \frac{\alpha t}{s^2} \quad (3)$$

Zmienna A to bezwymiarowa temperatura ciała stanowiąca stosunek lokalnej ilości przekazanego ciepła do całkowitej ilości ciepła możliwej do przekazania. Na początku procesu wielkość A zawsze wynosi 0. Definiowana jest ona wzorem:

$$A = \frac{T_i - T}{T_i - T_b} \quad (4)$$

Tabela 1

Zależności dla płyty niekończącej, cylindra nieskończonego i kuli

Wielkość/ Wyrażenie	Kształt ciała			Nr zależności w tekście
	Płyta	Cylinder	Kula	
$m =$	1	2	3	
$s =$	połowa grubości	promień	promień	
$\frac{\partial A}{\partial \tau} =$	$\frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2}$	$\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial A}{\partial \eta} \right)$	$\frac{1}{\eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta^2 \frac{\partial A}{\partial \eta} \right)$	(1)
$A_x =$	$2A_{\text{płyta}}^*$	$2\pi xL$	$4\pi x^2$	
$V_{\text{ciała}} =$	$2A_{\text{płyta}}S$	πs^2L	$\frac{4}{3}\pi s^3$	
$A_x/V_{\text{ciała}} =$	$1/s$	$2x/s^2$	$3x^2/s^3$	(8)
$\bar{T} =$	$\frac{1}{s} \int_0^s T dx$	$\frac{2}{s^2} \int_0^s xT dx$	$\frac{3}{s^3} \int_0^s x^2T dx$	(9)
$\bar{A} =$	$\int_0^1 A d\eta$	$2 \int_0^1 \eta A d\eta$	$3 \int_0^1 \eta^2 A d\eta$	(10)
$\frac{\partial \bar{A}}{\partial \tau} =$	$\left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial \eta} \right)_{\eta=1}$	$2 \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial \eta} \right)_{\eta=1}$	$3 \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial \eta} \right)_{\eta=1}$	(17)
$\left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial \tau} \right)_{LDF} =$	$3(A_1 - \bar{A})$	$8(A_1 - \bar{A})$	$15(A_1 - \bar{A})$	(18)
$N_{rc} (1 - A_1)^4 =$	$3(A_1 - \bar{A})$	$4(A_1 - \bar{A})$	$5(A_1 - \bar{A})$	(23)

* $A_{\text{płyta}}$ – powierzchnia jednej strony płyty, L – długość cylindra

Wprowadzając do wzoru (4) średnią temperaturę ciała \bar{T} , można zdefiniować średnią temperaturę bezwymiarową \bar{A} , charakteryzującą stosunek ilości ciepła przekazanego przez ciało od początku procesu do całkowitej ilości ciepła możliwej do przekazania:

$$\bar{A} = \frac{T_i - \bar{T}}{T_i - T_b} \quad (5)$$

Wartość średniej temperatury wynika z następującego równania bilansu cieplnego:

$$V_{\text{ciała}} \rho c_p (\bar{T} - T_{\text{ref}}) = \int_0^s A_x \rho c_p (T - T_{\text{ref}}) dr \quad (6)$$

gdzie:

- $V_{\text{ciała}}$ – objętość ciała,
- A_x – powierzchnia prostopadła do kierunku przepływu ciepła,
- T_{ref} – dowolna temperatura odniesienia.

Po przekształceniu otrzymuje się:

$$\bar{T} = \frac{1}{V_{\text{ciała}}} \int_0^s A_x T dr \quad (7)$$

Wartości $V_{\text{ciała}}$, A_x oraz $A_x/V_{\text{ciała}}$ dla rozważanych kształtów ciał przedstawiono w tabeli 1. Po uogólnieniu otrzymuje się:

$$\frac{A_x}{V_{\text{ciała}}} = \frac{mx^{m-1}}{s^m} \quad (8)$$

skąd wynika uogólniona zależność na temperaturę średnią (tabela 1):

$$\bar{T} = \frac{m}{s^m} \int_0^s x^{m-1} T dx \quad (9)$$

Bezwymiarową temperaturę dla różnych kształtów ciał przedstawiono w wierszu ósmym tabeli 1. Uogólniona zależność ma postać:

$$\bar{A} = m \int_0^1 \eta^{m-1} A d\eta \quad (10)$$

Analogicznie do zmiennych A i \bar{A} można zdefiniować bezwymiarową temperaturę powierzchni ciała A_1 :

$$A_1 = \frac{T_i - T_1}{T_i - T_b} \quad (11)$$

Do ścisłego rozwiązania równania (1) konieczne jest przyjęcie warunków początkowych i brzegowych. Warunek początkowy ma postać:

$$A = 0 \quad \text{dla} \quad \tau = 0 \quad (12)$$

Warunek brzegowy dla środka ciała wynika z symetrii profilu temperatury (rys. 1):

$$\frac{\partial A}{\partial \eta} = 0 \quad \text{dla } \eta = 0 \quad (13)$$

Warunek brzegowy dla powierzchni ciała zależy od warunków, w jakich następuje przenoszenie ciepła pomiędzy powierzchnią ciała a otoczeniem i związanych z tym oporów zewnętrznymi. Jeśli opory zewnętrzne nie występują, to temperatura powierzchni T_1 równa jest temperaturze upustu T_b . Zgodnie z wzorem (11) dla $T_1 = T_b$ temperatura powierzchni A_1 przyjmuje wartość 1 i warunek brzegowy dla powierzchni ma postać:

$$A_1 = 1 \quad \text{dla } \eta = 1 \quad (14)$$

Dla radiacyjnych oporów zewnętrznych i zerowej temperatury upustu T_b warunek brzegowy dla powierzchni przyjmuje postać [5, 6]:

$$\frac{\partial A}{\partial \eta} = N_{rc} (1 - A_1)^4 \quad (15)$$

przy czym parametr promienisto-przewodnościowy N_{rc} jest definiowany wzorem:

$$N_{rc} = \frac{\epsilon \sigma_s T_i^3}{k} \quad (16)$$

Parametr N_{rc} to stosunek oporu cieplnego przewodzenia do oporu promieniowania, który pełni analogiczną rolę jak liczba Biota w przypadku konwekcyjnych oporów zewnętrznych. Przyjmuje on wysokie wartości dla ciał będących złymi przewodnikami, a niskie dla ciał dobrze przewodzących ciepło. Gdy ciało jest doskonałym przewodnikiem, tzn. opór przewodzenia jest zerowy, to o szybkości procesu przenoszenia ciepła decyduje jedynie opór promieniowania, a $N_{rc} = 0$. W drugim skrajnym przypadku N_{rc} dąży do nieskończoności, opór promieniowania jest zerowy, a szybkość transportu ciepła zależy wyłącznie od oporu przewodzenia. Dla $N_{rc} \rightarrow \infty$ zamiast warunku brzegowego (15) obowiązuje warunek (14).

Różniczkując równanie (10) po czasie oraz uwzględniając wzór (1), można wyprowadzić zależność pomiędzy szybkością przenoszenia ciepła lub masy a gradientem bezwymiarowej temperatury A na powierzchni. Dla poszczególnych kształtów ciał zależność ta jest przedstawiona w wierszu dziewiątym tabeli 1. Po uogólnieniu ma ona postać:

$$\frac{d\bar{A}}{d\tau} = m \left(\frac{dA}{d\eta} \right)_{\eta=1} \quad (17)$$

3. Modele oparte na przybliżonych równaniach kinetycznych

Pierwszym przybliżonym równaniem kinetycznym było opracowane przez Glueckaufa równanie LDF dla ciał kulistych [1]. Równanie LDF można również przedstawić dla ciał o innych kształtach. Odpowiednie zależności zestawiono w dziesiątym wierszu tabeli 1. Uogólniona zależność LDF słuszna dla płyty, cylindra i kuli ma postać [4]:

$$\frac{d\bar{A}}{d\tau} = m(m+2) \cdot (A_1 - \bar{A}) \quad (18)$$

Równanie (18) zostało wyprowadzone dla dyfuzji w ciałach stałych przy założeniu parabolicznego profilu stężenia w ziarnie. Dzięki swej prostocie jest nadal szeroko stosowane, np. w modelowaniu adsorpcji lub procesów cieplnych opartych na przewodzeniu [5–8]. Jednakże w wielu przypadkach równanie LDF daje wyniki niezgodne z rozwiązaniem ścisłym, co potwierdzono w niniejszej pracy.

W oparciu o równanie kinetyczne dla kuli przedstawione w pracy [6], opracowana została ogólna postać przybliżonego równania kinetycznego, która może być stosowana także w przypadku ciał o kształcie płyty i cylindra [7]:

$$\frac{d\bar{A}}{d\tau} = \left[\beta_1^2 + \frac{1}{A_1 \bar{A}} \sum_{i=1}^3 c_i A_1^{2-i} (A_1 - \bar{A})^i \right] \cdot (A_1 - \bar{A}) \quad (19)$$

Wartości stałych c_i ($i = 1, 2, 3$) oraz parametru β_1 podano w tabeli 2.

Tabela 2

Wartości stałych we wzorze (19)

Kształt	c_1	c_2	c_3	β_1
Płyta	-0,0523	-0,0849	0,7738	1,5708
Cylinder	-0,5449	3,6558	-0,5644	2,4048
Kula	-0,3259	9,2260	-3,1705	3,1416

Zależności (18) i (19) dotyczą przypadków, w których występują zewnętrzne opory przenoszenia ($A_1 \neq 1$). W przypadku zanedbywalnie małych oporów zewnętrznych, czyli dla $N_{rc} \rightarrow \infty$, należy przyjąć, że $A_1 = 1$. Równanie LDF przyjmuje wtedy postać:

$$\frac{d\bar{A}}{d\tau} = m(m+2) \cdot (1 - \bar{A}) \quad (20)$$

natomiast równanie (19) należy zapisać w formie:

$$\frac{d\bar{A}}{d\tau} = \left[\beta_1^2 + \frac{1}{\bar{A}} \sum_{i=1}^3 c_i (1 - \bar{A})^i \right] \cdot (1 - \bar{A}) \quad (21)$$

4. Weryfikacja zaproponowanego modelu przybliżonego (algorytmy obliczeń)

Wyniki obliczeń dla modelu opartego na równaniu (19) porównano z wynikami modelu ścisłego oraz modelu LDF. Weryfikację równania (19) przeprowadzono dla procesu chłodzenia radiacyjnego.

Model ścisły

Równanie (1) z warunkiem początkowym (12) i warunkami brzegowymi (13) i (15) dla chłodzenia radiacyjnego rozwiązano przy użyciu procedury opartej na schemacie Cranka-Nicolson, otrzymując przebiegi zależności zmiennej A od czasu τ . Korzystając z wzoru (10), wyznaczano wartości \bar{A} . Całkowanie wykonano metodą Simpsona. Wartości funkcji obliczono z wzoru interpolacyjnego Lagrange'a.

Model oparty na proponowanym przybliżonym równaniu kinetycznym

Do rozwiązania równania (19) wykorzystano metodę Runge-Kutta, przy czym konieczne było wyznaczenie wartości A_1 . W tym celu porównano prawe strony równań (17) i (19) oraz uwzględniono warunek brzegowy (15). Otrzymano zależność:

$$\left[\beta_1^2 + \frac{1}{A_1 \bar{A}} \sum_{i=1}^3 c_i A_1^{2-i} (A_1 - \bar{A})^i \right] \cdot (A_1 - \bar{A}) = m N_{rc} (1 - A_1)^4 \quad (22)$$

Równanie algebraiczne (22) rozwiązywano względem A_1 metodą Newtona.

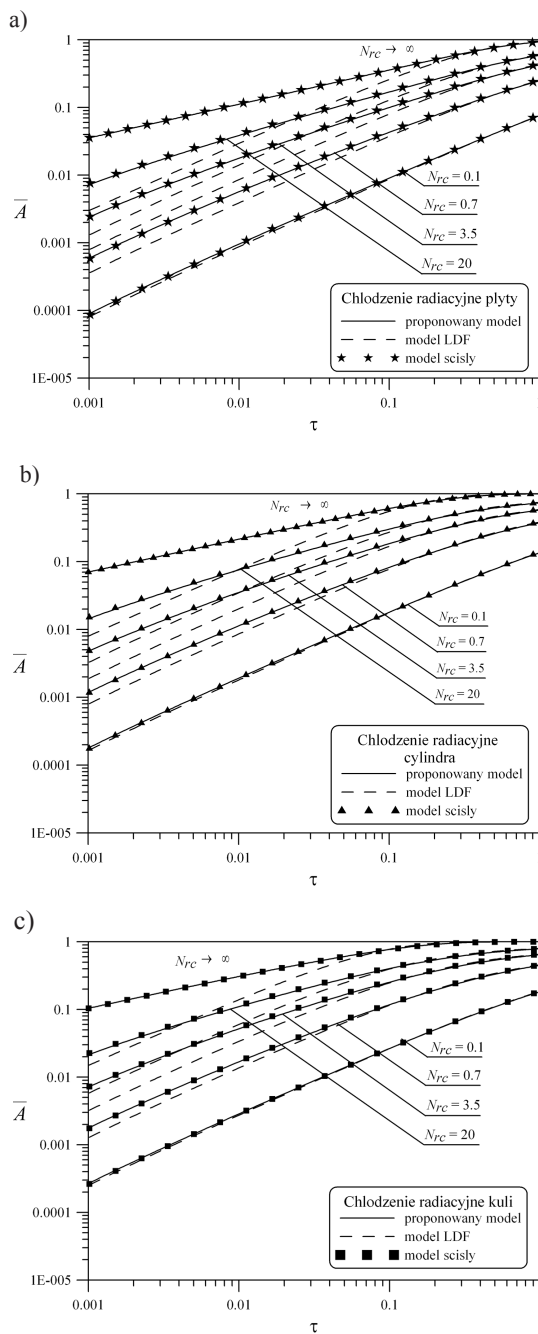
Model LDF

Równanie (18) scałkowano numerycznie metodą Runge-Kutta, przy czym do wyznaczenia A_1 wykorzystano zależność otrzymaną z równań (15), (17) i (18):

$$(m + 2) \cdot (A_1 - \bar{A}) = N_{rc} (1 - A_1)^4 \quad (23)$$

Na rysunku 2a, 2b i 2c przedstawiono wyniki dotyczące chłodzenia radiacyjnego płyty, cylindra i kuli. Można zauważyć, że wraz ze wzrostem wartości N_{rc} rośnie wartość \bar{A} , czyli ciało jest szybciej chłodzone. Jest to związane ze wzrostem siły napędowej procesu, tj. różnicy pomiędzy bezwymiarową temperaturą powierzchni A_1 a temperaturą średnią \bar{A} . W przypadku dużych wartości N_{rc} opór przewodzenia jest duży, a opór promieniowania mały. Mały opór promieniowania powoduje, że temperatura powierzchni zmienia się szybko. Znaczny opór przewodzenia przyczynia się do powolnej zmiany temperatury średniej. Z tych względów różnica pomiędzy A_1 i \bar{A} jest znaczna. Dla niskich wartości N_{rc} ta różnica jest mniejsza. Opór przewodzenia jest mały, a opór promieniowania duży, dzięki czemu temperatura średnia zmienia się szybko, a temperatura powierzchni – powoli.

W oparciu o rys. 2 można stwierdzić, że zgodność wyników uzyskanych na podstawie proponowanego równania i wyników modelu ścisłego jest dobra w całym zakresie czasu i w całym zakresie zmienności parametru N_{rc} , a więc zaproponowana zależność może być stosowana zarówno dla ciał dobrze, jak i źle przewodzących ciepło. Równanie LDF daje mało dokładne wyniki, szczególnie dla krótkich czasów i wysokich wartości N_{rc} . Zastosowanie modelu LDF ograniczone jest zatem do dobrych przewodników ciepła czyli niskich wartości N_{rc} .



Rys. 2. Zależność pomiędzy \bar{A} i τ dla chłodzenia radiacyjnego: a) płyta, b) cylinder, c) kula

Fig. 2. Relation between \bar{A} and τ for radiative cooling: a) slab, b) cylinder, c) sphere

5. Przykład obliczeniowy

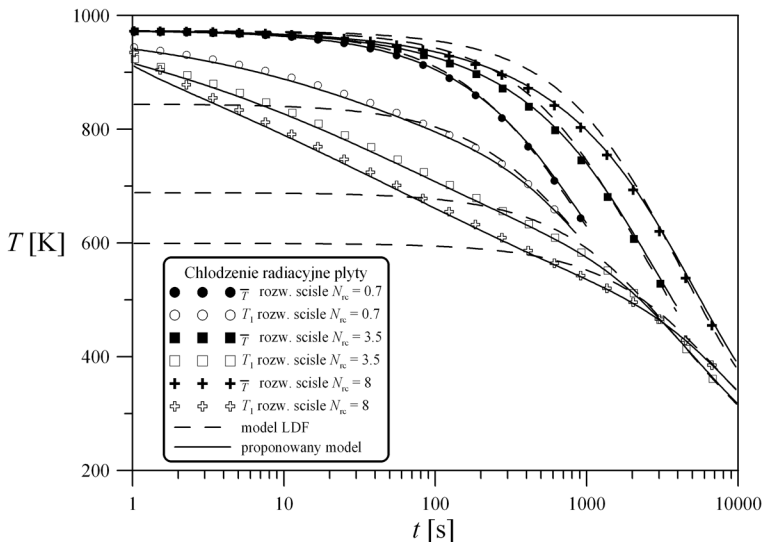
Ilustracją zaprezentowanego materiału jest następujący przykład obliczeniowy:

Wyznaczyć krzywe chłodzenia płyty nieskończonej umieszczonej w próżni. Obliczenia przeprowadzić dla trzech różnych materiałów o następujących współczynnikach przewodzenia ciepła: $k_1 = 0,0784 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$, $k_2 = 0,179 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$, $k_3 = 0,896 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$. Przyjąć następujące wartości liczbowe:

- współczynnik emisji: $\varepsilon = 0,8$,
- temperatura początkowa: $T_i = 973 \text{ K}$,
- grubość płyty: $2s = 0,030 \text{ m}$.

Wykorzystując zależność (16), obliczono wartości parametru N_{rc} , odpowiadające poszczególnym współczynnikom przewodzenia ciepła: $N_{rc1} = 8$, $N_{rc2} = 3,5$, $N_{rc3} = 0,7$. Wyniki obliczeń przedstawiono graficznie we współrzędnych wymiarowych: temperatura – czas. Krzywe chłodzenia, stanowiące czasowe zmiany średniej temperatury ciała \bar{T} oraz temperatury jego powierzchni T_1 , zobrazowano na rys. 3. Ze względu na to, że rozpatrywane jest chłodzenie ciała, temperatura średnia jest wyższa od temperatury powierzchni. Zgodnie z przewidywaniami różnica pomiędzy nimi, stanowiąca siłę napędową procesu chłodzenia, rośnie wraz ze wzrostem wartości parametru N_{rc} .

Przebiegi krzywych chłodzenia, wyznaczone w oparciu o równanie (19), wykazują bardzo dobrą zgodność z przebiegami ścisłymi. Przebiegi przybliżone i ścisłe są niemal nierozróżnialne. Równanie LDF wykazuje większe odstępstwa od rozwiązania ścisłego, szczególnie dla temperatur powierzchni i krótkich czasów trwania procesu.



Rys. 3. Zależność temperatury średniej płyty i temperatury jej powierzchni od czasu

Fig. 3. Temporal variation of average temperature and surface temperature for a slab

6. Wnioski

1. Stosowanie przybliżonych równań kinetycznych niestabilnego przenoszenia ciepła (i masy) znacznie skraca czas obliczeń numerycznych związanych z rozwiązywaniem równań modelu procesu w stosunku do rozwiązania modelu ścisłego. W zaproponowanym równaniu obniżenie dokładności otrzymywanych wyników, związane z uproszczeniem, jest minimalne. Skrócenie czasu obliczeń ma szczególne znaczenie w przypadkach, gdy rozwiązywanie równań modelu jest wykonywane wielokrotnie w ramach złożonej procedury.
2. Przybliżone równania kinetyczne mają zastosowanie zarówno w procesach przenoszenia ciepła, jak i przenoszenia masy. Mogą być stosowane w każdym przypadku niestabilnego transportu: zarówno przy istnieniu, jak również przy braku oporów zewnętrznych.
3. Przybliżone równania kinetyczne można stosować dla ciał o różnych kształtach.
4. W radiacyjnym chłodzeniu płyty, cylindra i kuli stwierdzono, że przybliżone równanie kinetyczne (19) daje wyniki zgodne z rozwiązaniem ścisłym i znacznie dokładniejsze od wyników otrzymanych przy zastosowaniu równania LDF, szczególnie dla krótkich czasów trwania procesu i ciał źle przewodzących ciepło.

Literatura

- [1] Glueckauf A., *Theory of chromatography 10: formula for diffusion into spheres and their application to chromatography*, Trans. Faraday Soc., 1955, Vol. 51, 1540-1551.
- [2] Zhang R., Ritter J.A., *New approximate model for nonlinear adsorption and diffusion in a single particle*, Chemical Engineering Science, No. 18, Vol. 52, 1997, 3161-3172.
- [3] Alvarez-Ramirez J., Fernandez-Anaya G., Vales-Parada F., Ochoa-Tapia J.A., *Physical Consistency of Generalized Linear Driving Force Models for Adsorption in a Particle*, Ind. Eng. Chem. Res., 2005, Vol. 44 (17), 6776-6783.
- [4] Georgiou A., Kupiec K., *Nonlinear driving force approximations of intraparticle mass transfer in adsorption processes*, International Communications in Heat and Mass Transfer, 1996, Vol. 23, 367-376.
- [5] Su J., *Improved lumped models for transient radiative cooling of a spherical body*, International Communication in Heat and Mass Transfer, 2004, Vol. 31, 85-94.
- [6] Kupiec K., Komorowicz T., *Simplified model of transient radiative cooling of spherical body*, International Journal of Thermal Sciences, 2010, Vol. 49, 1175-1182.
- [7] Kupiec K., Gwadera M., *On the application of an approximate kinetic equation of heat and mass transfer processes: the effect of body shape*, Heat and Mass Transfer, DOI: 10.1007/s00231-011-0905-6.
- [8] Kupiec K., *Przybliżone równania kinetyczne w procesach przenoszenia ciepła i masy*, Monografia „Postępy w Inżynierii i Technologii Chemicznej”, Wydawnictwo PK, Kraków 2011, 109-119.
- [9] Kim D.H., *Linear driving force formulas for diffusion and reaction in porous catalyst*, AIChE Journal, 1989, Vol. 35, 343-346.

- [10] Kim D.H., *Approximations for unsteady-state diffusion and reaction in porous catalyst and their application to packed-bed reactor*, AIChE Journal, 2008, Vol. 54, 2423-2431.
- [11] Cruz P., Mendes A., Magalhaes F.D., *High-order approximations for intra-particle mass transfer*, Chemical Engineering Science, 2004, Vol. 59, 4393-4399.
- [12] Szukiewicz M. K., *Approximate model for diffusion and reaction in a porous catalyst with mass-transfer resistances*, AIChE Journal, 2001, Vol. 47, 2131-2135.
- [13] Crank J., *The mathematics of diffusion*, Clarendon Press, Oxford 1975.
- [14] Marciniak A., Gregulec D., Kaczmarek J., *Basic Numerical Procedures in Turbo Pascal for your PC*, Nakom, Poznań 1992.