NAUKI PODSTAWOWE
CZASOPISMO TECHNICZNE
TECHNICAL TRANSACTIONS
FUNDAMENTAL SCIENCES
WYDAWNICTWO POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ
1-NP/2010
ZESZYT 1
ROK 107
ISSUE 1
YEAR 107

JAN KOROŃSKI*, RENATA BUJAKIEWICZ-KOROŃSKA**

MATEMATYCZNE IDEE TADEUSZA BANACHIEWICZA W KONTEKŚCIE ICH ZASTOSOWAŃ[1]

THE TADEUSZ BANACHIEWICZ IDEAS IN CONTEXT OF ITS APPLICATIONS

S t r e s z c z e n i e

Opracowanie zawiera pewne informacje o rachunku krakowianowym i o innych matematycznych ideach Tadeusza Banachiewicza w kontekście ich zastosowań.

Słowa kluczowe: *rachunek krakowianowy, zastosowania rachunku krakowianowego, biografia Tadeusza Banachiewicza*

A b s t r a c t

This elaboration concerns some information about cracovian's calculus and on others Tadeusz Banachiewicz mathematical ideas in context of its applications.

Keywords: *cracovian's calculus, applications of cracovian's calculus, biography of Tadeusz Banachiewicz*

* Jan Koroński, Instytut Matematyki, Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki Stosowanej, Politechnika Krakowska.

** Renata Bujakiewicz-Korońska, Instytut Fizyki, Wydział Matematyczno-Fizyczno-Techniczny, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie.

[1] W pewnej mierze niniejsze opracowanie odpowiada odczytom jakie autorzy wygłaszali w czasie Posiedzenia Naukowego PAU w Krakowie w dn. 29.10.2004 r. z okazji 50 rocznicy śmierci Tadeusza Banachiewicza oraz w czasie XIX Ogólnopolskiej Konferencji Historii Matematyki w Zamościu w dn. 6–10.06.2005 r., a także w czasie XXXIV Ogólnopolskiej Konferencji Zastosowań Matematyki, która odbyła się w dn. 12–20.09.2005 r. w Zakopanem-Kościelisku.

1. Wstęp

Współcześnie matematykę można określić jako zbiór definicji, twierdzeń, dowodów twierdzeń i wzajemnych relacji, jakie zachodzą pomiędzy wyżej wyszczególnionymi kategoriami matematycznymi. Jest rzeczą od dawna wiadomą, że nauki fizyczne i techniczne korzystają z metod matematyki w istotny sposób. Z czasem przekonujemy się, że rola matematyki nieustannie wzrasta i swymi ideami przenika inne jeszcze dziedziny nauki. Obecnie jesteśmy świadkami gwałtownego procesu przenikania metod matematycznych do nauk biologicznych, medycznych i nauk społeczno-ekonomicznych. Daje się również zauważyć stosowanie matematyki w naukach humanistycznych.

Tymczasem jeszcze niewiele ponad trzysta pięćdziesiąt lat temu geometria, uprawiana jeszcze w starożytności, stanowiła główny trzon matematyki. Geometria euklidesowa, modyfikowana tylko w niewielkim stopniu, dominowała przez dwadzieścia wieków. Z czasem jej surowy, aksjomatyczny i ściśle dedukcyjny styl rozumowania został wyparty przez rozumowania indukcyjne i niekiedy intuicyjne, a pojęcia czysto geometryczne zostały zastąpione przez liczbę i operacje algebraiczne. W ten sposób powstały geometria analityczna, analiza matematyczna i mechanika.

Matematyka klasyczna, która powstawała w XVII w., zachowała swe znaczenie do dziś. Fundamentem matematyki klasycznej jest pojęcie funkcji i granicy. W XIX wieku dokonano uściślenia wielu pojęć matematyki klasycznej. W dwóch ostatnich wiekach nastąpił gwałtowny rozwój matematyki, co zaowocowało zjawiskiem specjalizacji i – niestety – izolacji, szczególnie ze środowiskiem stosującym metody matematyczne w praktyce. Wzajemne zrozumienie nawet pomiędzy przedstawicielami różnych dziedzin matematyki zostało utrudnione. Zaobserwowano lawinowy wzrost liczby czynnych naukowo matematyków, a wraz z tym ogromny wzrost liczby publikacji, zebrań, seminariów naukowych, konferencji itp. W takiej sytuacji należy zapytać o znaczenie matematyki. Wymaga to wniknięcia w jej istotę.

Jak się wydaje, celem matematyki jest postępująca abstrakcja, logicznie ścisła dedukcja oparta na układach aksjomatycznych i coraz to szersze uogólnienia. Jednakże matematyka nie ma monopolu na abstrakcję. Przecież pojęcia fizyki, takie jak np. masa, prędkość, siła, napięcie i natężenie, są to abstrakcyjne idealizacje rzeczywistości fizycznej. Pojęcia matematyczne, takie jak np. punkt, przestrzeń, liczba czy funkcja, są tylko nieco bardziej abstrakcyjne.

Istotą matematyki jest badanie i porządkowanie treści matematycznych oraz uwidacznianie struktury nowych teorii matematycznych. Nowe treści matematyczne wchodzą do matematyki poprzez nowe definicje. Twierdzenia przetwarzają treści zawarte w definicjach i ewentualnie porządkują je. Każda teoria matematyczna rozpoczyna się od konkretnej i szczególnej podstawy, a następnie poprzez abstrahowanie staje się abstrakcyjna. W matematyce właściwy proces rozwoju, od indywidualnej i konkretnej treści, poprzez abstrakcję, z powrotem do tego co konkretne i szczególne, nadaje treściom matematycznym sens i praktyczne znaczenie. Aksjomatyzacja poprzez oderwanie się od konkretnej, szczegółowej i jednostkowej sytuacji ukazuje istotę struktury rozważanych obiektów i pozwala dokonywać porównań z innymi obiektami, gdyż ukazanie struktury ujawnia cały ładunek informacji o obiektach, które w połączeniu z odpowiednimi aksjomatami tworzą daną strukturę matematyczną.

Od jakiegoś czasu utrzymuje się podział na matematykę „czystą” i „stosowaną”. W odróżnieniu od matematyki czystej, gdzie można dowolnie manewrować założeniami, tak aby coś tam wyszło, w badaniach związanych z zastosowaniami matematyki rozważanego problemu nie można swobodnie modyfikować lub pomijać. Należy uzyskać wiarygodne rozwiązanie. Jednakże niejednokrotnie zanim do tego dojdzie, bywa tak, że trzeba zastosować wyrafinowany abstrakcyjnie aparat matematyczny z czystej matematyki (pozornie niestosowalny w praktyce), który ukaże jak rozważany problem postawić (przeformułować), aby uzyskać model matematyczny odpowiadający opisywanej rzeczywistości lub by otrzymany model był lepszy w kontekście trudności związanych z otrzymaniem rozwiązania rozważanego problemu. Niekiedy nawet należy zdefiniować nowe obiekty matematyczne, aby osiągnąć wyżej sformułowany cel. Przykładem takiej sytuacji jest rachunek krakowianowy Tadeusza Banachiewicza, po raz pierwszy sformułowany w 1922 r.

Idea tego rachunku dla matematyków reprezentujących nurt matematyki czystej – teoretycznej początkowo wydawała się dziwaczna, a same krakowiany niepotrzebne. Niektórzy uważali nawet, że idea ta wręcz przeczy zdrowemu rozsądkowi. Jednak czas, który wszystko weryfikuje, pokazał, że idea ta pozwoliła odpowiednio sformułować i rozwiązać wiele szczegółowych problemów astronomii teoretycznej, mechaniki teoretycznej, geodezji i geofizyki, a więc tych dziedzin, w których Tadeusz Banachiewicz miał szczególne osiągnięcia.

Zatem idea rachunku krakowianowego niosła coś więcej poza teoretycznym sformułowaniem. Był to czas, gdy do obliczeń naukowych masowo używano suwaków logarytmicznych. Podobnie jak Krüger przystosował pewne wzory Gaussa do rachunków logarytmicznych wykonywanych na suwakach, tak też Banachiewicz zdefiniował krakowiany (protokół zebrania naukowego z dn. 28.03.1947 r.) przystosowane do obliczeń na arytmometrach. Tadeusz Banachiewicz bardzo lubił rachować i mógł to robić wiele godzin. Dbając o elegancję rozumowania, zawsze starał się korzystać z jak najkrótszej drogi, co niejednokrotnie doprowadzało go do ulepszeń wzorów już istniejących lub wyprowadzania nowych. Banachiewicz przewidywał rozwój technik obliczeniowych. Był zwolennikiem liczenia za pomocą „mózgu stalowego” i propagował tę ideę w Polsce. Słusznie widział w rozwoju technik obliczeniowych warunek rozwoju nauki.

Pod koniec swego życia, w dniu 15.03.1954 r., a więc nieco ponad pół roku przed śmiercią (zmarł 17.11.1954 r.), Banachiewicz, odpowiadając mówcom na uroczystym zebraniu Wydziału III PAN poświęconym 50-leciu jego działalności naukowej, wypowiedział następujące słowa [17]: „Fakt, że w ciągu 50-ciu lat pracowałem naukowo, nie stanowi specjalnej zasługi, gdyż pracowałem dlatego, że podobała mi się ta praca, która wydawała mi się użyteczną dla nauki, narodu i państwa; co się zaś tyczy znaczenia mych prac, to dopiero przyszłość wypowie o nich ostatnie słowo”.

Tadeusz Banachiewicz opublikował 240 prac o charakterze naukowym [18]. W pracy [11] jest zamieszczona pełna bibliografia Tadeusza Banachiewicza, do której dołączono krótkie doniesienia naukowe, komunikaty, wyniki obserwacji, polemiki, recenzje, sprawozdania oraz informacje o pracach swoich uczniów i współpracowników. Bibliografia ta liczy 598 pozycji. W wyniku ogromnej pracy, jaką wykonali autorzy artykułu [11], stwierdzono, że Tadeusz Banachiewicz napisał 110 oryginalnych prac naukowych, 185 prac i komunikatów o charakterze popularnonaukowym, 174 krótkie doniesienia naukowe, komunikaty, telegramy i informacje o wynikach przeprowadzonych obserwacji. Banachiewicz jest także autorem opublikowanych 89 polemik, recenzji i sprawozdań oraz 33 informacji o pracach swoich uczniów i współpracowników. W dorobku Banachiewicza znajdują się również dwie książki, a mianowicie: „Metody rachunków astronomicznych” wydanej przez

PWN w Krakowie w 1952 r. i „Rachunek krakowianowy" wydany przez PWN w Warszawie w 1959 r. Jego prace napisane są jasnym stylem, choć często dotyczą bardzo trudnych zagadnień astronomii, mechaniki, geodezji, geofizyki, a nawet matematyki. Oprócz prac naukowych Banachiewicz pisał od 1931 r. do maja 1954 r. pamiętniki, które nazywał „Notatami codziennymi". „Notaty codzienne" ukazują bardzo bogatą osobowość i codzienne życie tego wybitnego człowieka. Jawi się w nich [5, 16] Banachiewicz jako człowiek szlachetny, którego życie wypełnione było systematyczną i dokładną pracą. Ukazują one również człowieka, który interesował się aktualną sytuacją polityczną i sprawami kultury. Banachiewicz wytrwale słuchał wiadomości radiowych, spędzał dłuższe chwile na słuchaniu muzyki lub deklamowaniu wierszy ulubionych poetów. Odwiedzał teatr i filharmonię. Bardzo często brał udział w posiedzeniach Rad Wydziału UJ, Politechniki Krakowskiej i w konferencjach w PAN.

2. Matematyczne pomysły Tadeusza Banachiewicza

Tadeusz Banachiewicz często wypowiadał się na zebraniach naukowych na temat matematyki. Niejednokrotnie wyrażał swoje poglądy odnoszące się do istoty twierdzeń i dowodów matematycznych. Jednocześnie jako praktyk podkreślał, że przesadnie wymagana ścisłość dowodów jest niewłaściwa, bo studenci zatracają przez to zdolność do matematycznego i przybliżonego opisu realnej rzeczywistości, co jest nieodzownym warunkiem rozwiązania wielu konkretnych i trudnych problemów (prot. zebr. nauk. z dn. 3.11.1950 r.). Zauważał także relatywność treści matematycznych, jakby przeczuwając idee matematyki konstruktywnej, która rozwinęła się kilkadziesiąt lat później. Obrazują to następujące słowa Banachiewicza wypowiedziane na zebraniu naukowym w dn. 8.11.1941 r.: „Gdyby na Ziemi pojawił się matematyk z Marsa, to pewnych naszych twierdzeń nie mógłby wcale zrozumieć, dla większości zaś udowodniłby ich błędność już z tego powodu, że zwyczajnie twierdzenia matematyczne wymagają całego szeregu założeń" [20]. Matematyka konstruktywna rozwinęła się długo po śmierci Banachiewicza. Dziś ma wielu zwolenników. W matematyce pojęcia są względne, co dostrzegał Banachiewicz. Świadczy to o nieprzeciętności jego umysłu.

Na temat matematyki Tadeusz Banachiewicz wygłaszał wiele różnorodnych opinii. Jak czytamy w ww. protokole zebrania naukowego z dn. 8.11.1941 r., Banachiewicz uważał, że podstawowe twierdzenie algebry jest aksjomatem i że wiele dowodów matematycznych jest fałszywych (np. prot. zebr. nauk. z dn. 18.10.1941 r., 25.10.1941 r. i 8.11.1941 r.) [20]. Istotnym spostrzeżeniem dla matematyki było wykazanie w 1909 r. przez Banachiewicza, że jedno z tzw. twierdzeń chińskich, które dotyczy arytmetyki liczb naturalnych (nie mylić z twierdzeniem chińskim o resztach), nie jest spełnione dla siedmiu liczb nieparzystych mniejszych od liczby 2000. Na tej podstawie znany polski matematyk Wacław Sierpiński w czterdzieści lat później wykazał, że takich liczb jest nieskończenie wiele (prot. zebr. nauk. z dn. 14.11.1947 r.) [20]. Banachiewicz udowodnił, że gdyby rozważane przez niego twierdzenie chińskie było prawdziwe, to byłoby również słuszne nieprawdziwe jedno z twierdzeń Fermata, które mówi, że liczba $2^{2^n}+1$ jest liczbą pierwszą.

Banachiewicz wielokrotnie postulował utworzenie Międzynarodowej Unii Matematycznej. Projekt ten został urzeczywistniony w 1950 r. Wcześniej na zjeździe UNESCO w Kopenhadze pod wpływem Banachiewicza mówił o tym Sierpiński (prot. zebr. nauk.

z dn. 11.11.1949 r.). Profesor Tadeusz Banachiewicz, prowadząc przez wiele lat bardzo intensywną działalność naukową, precyzował warunki, jakim powinna odpowiadać matematyka w zastosowaniach w astronomii i fizyce (prot. zebr. nauk. z dn. 3.11.1950, 18.01.1952, 25.11.1949, 11.10.1940 i in. [20]).

Wcześniej, z początkiem lat 20. XX w., w celu swoistego uproszczenia wielu rachunków prowadzonych na bazie macierzy oraz aby uprościć wiele algorytmów obliczeniowych, Banachiewicz wprowadził rachunek krakowianowy, który dodatkowo ogromnie ułatwił i usprawnił pracę obliczeniową na arytmometrach (prot. zebr. nauk. z dn. 23.05.1952 r.). Podczas wielu zebrań naukowych (prot. zebr. nauk. z dn. 5.05.1950, 25.12.1945, 12.05.1950, 13.09.1940 r. i in.) omawiano zalety rachunku krakowianowego w zastosowaniach praktycznych.

2.1. Krakowiany Banachiewicza w kontekście macierzy Caleya–Hamiltona

Po upływie ponad połowy wieku od śmierci twórcy krakowianów Tadeusza Banachiewicza nastąpił już najwyższy czas, aby skomentować rachunek krakowianowy w kontekście rachunku macierzowego. Macierze odkryli Hamilton w 1854 r. i Caley w 1853 r. Banachiewicz wprowadził rachunek krakowianowy w 1922 roku. Przed laty, za życia Tadeusza Banachiewicza, w środowisku naukowym krakowskim żywo dyskutowano wzajemne relacje między macierzami i krakowianami. Dyskusja ta odbywała się na posiedzeniach Polskiego Towarzystwa Matematycznego i posiedzeniach seminaryjnych Instytutu Matematycznego PAN oraz w innych miejscach. Niekonwencjonalna czasem forma dyskusji i żywiołowość dyskutantów ściągały szerokie rzesze słuchaczy niekoniecznie zainteresowanych matematyką. Niektórzy wspomniane dyskusje traktowali jak darmowy program kabaretowy. Z jednej strony, przeciwnicy krakowianów na czele z Tadeuszem Ważewskim atakowali sensowność krakowianów, a z drugiej – zwolennicy krakowianów pod przewodnictwem ich twórcy wykazywali zalety krakowianów w porównaniu z macierzami.

Matematycy forsowali pogląd, że teoretycznie krakowiany nie wnoszą niczego nowego, gdyż wszystko, co uzyskuje się krakowianowo, można otrzymać poprzez macierze. Z kolei zwolennicy krakowianów uważali je za lepsze narzędzie od macierzy. Wydaje się, że niedostatecznie ściśle doprecyzowano pojęcia tak macierzy, jak i krakowianu. Było to przyczyną licznych nieporozumień.

Zresztą definiowanie macierzy we współczesnych podręcznikach nadal pozostawia wiele do życzenia. Otóż do tej pory w prawie wszystkich podręcznikach akademickich definiuje się macierze jako odwzorowanie przyporządkowujące parom liczb naturalnych liczby rzeczywiste, czyli macierze traktowane są w definicji jako tabliczki liczb. Następnie osobno wprowadza się definicje działań na macierzach (tak samo traktowano krakowiany – jako tabliczki liczb). Jest to ewidentny błąd dydaktyczny o głębokich konsekwencjach merytorycznych, gdyż zbiór samych prostokątnych tabliczek liczb nie stanowi macierzy (ani nie stanowi krakowianu). Zbiór macierzy ma określoną strukturę działań (również określoną strukturę działań ma zbiór krakowianów). Dlatego w definicji macierzy należy zawrzeć definicje (aksjomaty) działań na macierzach, czyli trzeba podać definicję aksjomatyczną macierzy, z której wynikną wszystkie jej podstawowe własności.

Postaramy się uzasadnić tezę, że macierze i krakowiany wprawdzie częściowo zazębiają się, jednak ani jedne, ani drugie nie są lepsze i nie obejmują się wzajemnie jako teoria o określonej strukturze w tym sensie, że jedne są ogólniejsze od drugich (jak to niektórzy uważali w przeszłości). Aby osiągnąć zamierzony cel, sformułujemy aksjomatyczną definicję macierzy i aksjomatyczną definicję krakowianu i porównując te definicje, wyciągniemy stosowne wnioski.

2.2. Aksjomatyczna definicja macierzy

Definicja

Niech $N_m = \{1, 2, ..., m\}$, $N_n = \{1, 2, ..., n\}$.

Macierzą o m wierszach i n kolumnach nazywamy każde odwzorowanie $\mathbf{A} : N_m \times N_n \to R$ traktowane jako element zbioru $M = \bigcup_{m,n \in N} M(m,n)$, gdzie $M(m,n)$ oznacza zbiór wszystkich odwzorowań $N_m \times N_n \to R$, rozpatrywanego ze strukturą algebraiczną wynikającą z następujących aksjomatów określających działania na macierzach:

1) Aksjomat równości macierzy.

Dla dowolnych $m, n \in N$ zachodzi warunek

$$[a_{ij}]_{m\times n} = [b_{ij}]_{m\times n} \underset{df}{\Leftrightarrow} \forall\ i \in \{1, 2, ..., m\},\ \forall\ j \in \{1, 2, ..., n\}\quad a_{ij} = b_{ij}$$

2) Aksjomat dodawania macierzy.

Dla dowolnych $m, n \in N$ działanie $+ : M(m,n) \times M(m,n) \to M(m,n)$ (dodawanie macierzy) jest określone wzorem

$$[a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n} \underset{df}{=} [c_{ij}]_{m\times n} \underset{df}{\Leftrightarrow} \forall\ i \in \{1, 2, ..., m\},\ \forall\ j \in \{1, 2, ..., n\}\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

3) Aksjomat mnożenia macierzy przez liczbę.

Dla dowolnych $m, n \in N$ działanie $\cdot : R \times M(m,n) \to M(m,n)$ (mnożenie macierzy przez liczbę) jest określone wzorem

$$\lambda \cdot [a_{ij}]_{m\times n} = [c_{ij}]_{m\times n} \underset{df}{\Leftrightarrow} \forall\ i \in \{1, 2, ..., m\},\ \forall\ j \in \{1, 2, ..., n\}\quad c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$$

4) Aksjomat mnożenia macierzy przez macierz.

Dla dowolnych $m, n, p \in N$ działanie $\cdot : M(m,n) \times M(m,n) \to M(m,n)$ (mnożenie macierzy) jest określone wzorem

$$[a_{ij}]_{m\times n} \cdot [b_{ij}]_{n\times p} \underset{df}{=} [c_{ij}]_{m\times p} \underset{df}{\Leftrightarrow} \forall\ i \in \{1, 2, ..., m\},\ \forall\ j \in \{1, 2, ..., n\}\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Uwaga

Mnożenie macierzy jest wykonalne tylko wtedy, gdy liczba kolumn mnożnej, czyli pierwszej z mnożonych macierzy, jest równa liczbie wierszy mnożnika, czyli drugiej z mnożonych macierzy.

2.2.1. Tradycyjne oznaczenie macierzy

Odwzorowanie $\mathbf{A} : N_m \times N_n \to R,$ czyli macierz prostokątną, oznaczamy symbolicznie jak następuje

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

Często oszczędzając zapis, macierz zapisujemy skrótowo tak

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$$

2.2.2. Odejmowanie macierzy

Odejmowanie macierzy definiuje się za pomocą dodawania i mnożenia przez liczbę (–1) w następujący sposób

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} \underset{df}{=} \mathbf{A} + \underbrace{(-1 \cdot \mathbf{B})}_{-B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}).$$

2.2.3. Podstawowe wybrane własności działań na macierzach

Zachodzą następujące własności działań na macierzach:

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.
2. $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$.
3. $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$.
4. $\forall\ \mathbf{A}\ \exists(-\mathbf{A}) : \mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.
5. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.
6. $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$.

2.3. Aksjomatyczna definicja krakowianów

2.3.1. Konwencja dotycząca znaczenia wskaźników krakowianów

Poszczególne elementy krakowianu oznaczane są symbolem a_{ij} z dwoma wskaźnikami, z których pierwszy oznacza numer kolumny, w której znajduje się dany element, a drugi numer wiersza. W macierzach przyjmuje się odwrotną konwencję, tj. pierwszy wskaźnik oznacza numer wiersza, w którym znajduje się dany element, a drugi numer kolumny (krakowiany w odróżnieniu od macierzy na ogół (choć nie zawsze) oznacza się małymi pogrubionymi literami).

Definicja

Niech: $N_m = \{1, 2, ..., m\}, \quad N_n = \{1, 2, ..., n\}$.

Krakowianem o m kolumnach i n wierszach nazywamy każde odwzorowanie $\mathbf{a} : N_m \times N_n \to R$ traktowane jako element zbioru $K = \bigcup_{m,n \in N} K(m,n),$ gdzie $K(m,n)$

oznacza zbiór wszystkich odwzorowań $N_m \times N_n \to R,$ rozpatrywanego ze strukturą algebraiczną wynikającą z następujących aksjomatów określających działania na krakowianach:

1) Aksjomat równości krakowianów.

Dla dowolnych $m, n \in N$ zachodzi warunek

$$\{a_{ij}\}_{m\times n} = \{b_{ij}\}_{m\times n} \underset{df}{\Leftrightarrow} \forall\ i \in \{1, 2, ..., m\},\ \forall\ j \in \{1, 2, ..., n\}\ \ a_{ij} = b_{ij}$$

2) Aksjomat dodawania krakowianów.

Dla dowolnych $m, n \in N$ działanie $+: K(m,n)\times K(m,n) \to K(m,n)$ (dodawanie krakowianów) jest określone wzorem

$$\{a_{ij}\}_{m\times n} + \{b_{ij}\}_{m\times n} \underset{df}{=} \{c_{ij}\}_{m\times n} \underset{df}{\Leftrightarrow} \forall\ i \in \{1, 2, ..., m\},\ \forall\ j \in \{1, 2, ..., n\}\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

3) Aksjomat mnożenia krakowianu przez liczbę.

Dla dowolnych $m, n \in N$ działanie $\cdot: R\times K(m,n) \to K(m,n)$ (mnożenie krakowianu przez liczbę) jest określone wzorem

$$\lambda\cdot\{a_{ij}\}_{m\times n} = \{c_{ij}\}_{m\times n} \underset{df}{\Leftrightarrow} \forall\ i \in \{1, 2, ..., m\},\ \forall\ j \in \{1, 2, ..., n\}\ \ c_{ij} = \lambda\cdot a_{ij}$$

4) Aksjomat mnożenia krakowianu przez krakowian.

Dla dowolnych $m, n, p \in N$ działanie $\cdot: K(m,n)\times K(m,n) \to K(m,n)$ (mnożenie krakowianów) jest określone wzorem

$$\{a_{ij}\}_{m\times n} \cdot \{b_{ij}\}_{m\times p} \underset{df}{=} \{c_{ij}\}_{p\times n} \underset{df}{\Leftrightarrow} \forall\ i \in \{1, 2, ..., m\},\ \forall\ j \in \{1, 2, ..., n\}\ \ c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk}\cdot b_{ik}.$$

(Pamiętamy, że w wypadku krakowianów wskaźniki oznaczają: pierwszy numer kolumny, drugi numer wiersza! Gdyby zrezygnować z tej umowy, to wtedy warunek na mnożenie byłby nieco inny). Wtedy $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{kj}\cdot b_{ki}$, tj. wtedy gdy pierwszy wskaźnik oznacza numer wiersza, a drugi numer kolumny.

Komentarz

Mnożenie krakowianów jest wykonalne tylko wtedy, gdy liczba wierszy mnożnej, czyli pierwszego z mnożonych krakowianów, jest równa liczbie wierszy mnożnika, czyli drugiego z mnożonych krakowianów (można więc mnożyć dwa krakowiany o tej samej liczbie wierszy). Mnożenie dwóch krakowianów polega na mnożeniu każdej kolumny pierwszego krakowianu przez każdą kolumnę drugiego krakowianu (tak jak skalarnie mnoży się dwa wektory), przy czym wskaźnik kolumny pierwszego krakowianu wskazuje, w jakiej kolumnie ma być zapisany wynik (odpowiedni „sumoiloczyn”), a wskaźnik kolumny drugiego krakowianu wskazuje, w jakim wierszu ma być zapisany wynik mnożenia kolumn tych krakowianów. Zatem w wyniku mnożenia dwóch krakowianów otrzymuje się krakowian o tylu kolumnach, ile miał pierwszy krakowian i o tylu wierszach, ile kolumn miał drugi krakowian.

Dla krakowianów definiuje się jeszcze inne operacje określane za pomocą mnożenia krakowianowego, a mianowicie dzielenie krakowianów, kwadrat i pierwiastek krakowianów oraz odwrotność krakowianu. Operacje te mają ściśle praktyczne uzasadnienie, o czym będzie jeszcze mowa dalej. Odejmowanie krakowianów definiuje się za pomocą dodawania. Sformułujemy te operacje w dalszym ciągu.

2.3.2. Tradycyjne oznaczenie krakowianu

Odwzorowanie $\mathbf{a} : N_m \times N_n \to R$, czyli krakowian prostokątny, oznaczamy symbolicznie następująco

$$\mathbf{a} = \left\{ \begin{matrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \right\}_{m \times n}$$

Często oszczędzając zapis, krakowian zapisujemy skrótowo tak

$$\mathbf{a} = \{a_{ij}\}_{m \times n}$$

2.3.3. Odejmowanie krakowianów

Odejmowanie krakowianów definiuje się za pomocą dodawania i mnożenia przez liczbę (–1) w następujący sposób

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} \underset{df}{=} \mathbf{a} + \underbrace{(-1 \cdot \mathbf{b})}_{-\mathbf{b}} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$$

2.3.4. Podstawowe wybrane własności działań na krakowianach

Zachodzą następujące własności działań na krakowianach:

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.
2. $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$.
3. $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$.
4. $\forall \mathbf{a}\ \exists (-\mathbf{a}) : \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.
5. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$.
6. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

Porównując podstawowe własności działań na macierzach i krakowianach, zauważmy, że mnożenie macierzy jest łączne, a mnożenie krakowianów nie jest łączne. Powoduje to, że krakowiany z działaniem mnożenia nie stanowią tzw. grupy algebraicznej, natomiast macierze z mnożeniem macierzy stanowią półgrupę. Widać więc, że krakowiany mają inną strukturę niż macierze. Z podstaw algebry wiadomo, że macierze są izomorficzne z odwzorowaniami liniowymi, czyli macierze algebraicznie są nierozróżnialne od odwzorowań liniowych, a izomorfizm przenosi strukturę. Można by, oczywiście, szukać izomorficznych odpowiedników krakowianów, które na pewno nie mogą być tożsame z odwzorowaniami liniowymi ze względu na inną strukturę krakowianów, którą dla ustalenia uwagi można by nazwać strukturą krakowianową. Wynika z powyższego, że istotna różnica między macierzami a krakowianami tkwi w innej strukturze obu pojęć, a nie jak niektórzy sądzą – w innej kolejności numeracji wskaźników elementów macierzy (wiersz – kolumna) czy krakowianu (kolumna – wiersz). Macierze i krakowiany są dwoma autonomicznymi rachunkami. I nie jest tak, jak niektórzy sądzili, że krakowiany są szczególnym przypadkiem macierzy, ani nie jest na odwrót, gdyż gdyby tak było, to wówczas krakowiany musiałyby być izomorficzne z podzbiorem odwzorowań liniowych, co ze względu na wcześniej wykazaną różnicę struktury macierzy i krakowianów nie jest możliwe i na odwrót – macierze musiałyby być izomorficzne z izomorficznymi odpowiednikami krakowianów, co również nie jest możliwe z tych samych powodów co poprzednio. Nieco uboższa struktura algebraiczna krakowianów i inna definicja mnożenia krakowianów dają możliwość definiowania pewnych obiektów, jak np. pierwiastek krakowianu i dzięki temu możliwe staje się uzyskiwanie pewnych wyników, których nie da się lub trudno uzyskać macierzowo.

2.3.5. Specjalne rodzaje krakowianów, dzielenie i pierwiastkowanie krakowianów

Krakowianem kwadrastym (dzisiaj raczej powiedzielibyśmy „krakowianem kwadratowym") nazywa się krakowian o jednakowej liczbie kolumn i wierszy.

***Przekątną główną* (*diagonalą*)** krakowianu kwadratowego nazywa się wszystkie elementy krakowianu o jednakowych wskaźnikach.

***Krakowianem przekątniowym* (*diagonalnym*)** nazywa się taki krakowian kwadratowy, który ma elementy niezerowe tylko na przekątnej głównej (diagonali) krakowianu (zwyczajowo taki krakowian oznacza się symbolem **d**).

Krakowianem „jednostkowym" nazywa się krakowian przekątniowy, który ma wszystkie elementy równe 1 na głównej przekątnej (zwyczajowo krakowian ten oznacza się symbolem $\boldsymbol{\tau}$). Krakowian $\boldsymbol{\tau}$ ma elementy określone następująco

$$\boldsymbol{\tau}_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ dla } i = j, \\ 0 \text{ dla } i \neq j. \end{cases}$$

Uwaga. Krakowian jednostkowy w roli mnożnika nie zmienia mnożnej, tzn.

$$\mathbf{a}\boldsymbol{\tau} = \mathbf{a}.$$

Gdy natomiast w iloczynie krakowian jednostkowy odgrywa rolę mnożnej (pierwszy czynnik w iloczynie), to w wyniku mnożenia krakowianowego otrzymujemy ***krakowian transponowany*** (zwany ***transpozą*** lub ***krakowianem przestawionym***), czyli taki, w którym kolumny zamienione są na wiersze, a wiersze na kolumny z zachowaniem porządku elementów kolumn i wierszy krakowianu (krakowian transponowany do krakowianu **a** oznaczamy symbolem $\mathbf{a}^T$, tzn.

$$\boldsymbol{\tau}\mathbf{a} = \mathbf{a}^T.$$

Krakowianem symetrycznym nazywa się taki krakowian kwadratowy, którego wszystkie elementy są symetryczne względem głównej przekątnej, tj. taki krakowian kwadratowy **a**, którego elementy spełniają równość

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Uwaga. Dla krakowianu symetrycznego zachodzi równość

$$\boldsymbol{\tau}\mathbf{a} = \mathbf{a},$$

gdyż transpozycja krakowianu symetrycznego formalnie daje w wyniku ten sam krakowian. Ponadto dla dowolnych krakowianów **a** i **b** zachodzi równość

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}.$$

2.3.6. Iloraz krakowianów, odwrotność i pierwiastek krakowianu

Ilorazem krakowianów **a** i **b** nazywa się taki krakowian **x**, jeżeli spełniona jest równość

$$\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\tau}\mathbf{b} = \mathbf{a}.$$

Oczywiście nie zawsze istnieje iloraz krakowianów.

Uwaga. Operacje dzielenia i rozkładu krakowianów kwadratowych na krakowiany trójkątne umożliwiły Banachiewiczowi opracowanie nowej metody rozwiązywania układów równań liniowych kramerowskich bez potrzeby stosowania wzorów Cramera.

Odwrotnością krakowianu **a** nazywa się taki krakowian **b**, gdy zachodzi warunek

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \boldsymbol{\tau}$$

Zatem $\mathbf{a}^{-1} = \mathbf{b}$, gdzie symbolem $\mathbf{a}^{-1}$ oznacza się odwrotność krakowianu **b**.

Pierwiastkiem kwadratowym symetrycznego krakowianu **a** nazywa się taki trójkątny krakowian **r**, gdy zachodzi równość

$$\mathbf{r}^2 = \mathbf{a},$$

gdzie $\mathbf{r}^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$.

Uwaga. Wprowadzone przez Banachiewicza operacje odwrotności i pierwiastka krakowianu miały na celu ich zastosowanie do modyfikacji metody Gaussa najmniejszych kwadratów. Algorytm Banachiewicza metody najmniejszych kwadratów pozwala na szybsze i bardziej przejrzyste wyznaczenie niewiadomych niż klasyczna metoda.

Należy tu dodać, że rachunek krakowianowy Banachiewicza [1] oprócz zastosowań do zamiany współrzędnych, rozwiązywania równań liniowych, metody najmniejszych kwadratów okazał się także użyteczny w wielu innych, czasem bardzo skomplikowanych zagadnieniach. W szczególności rachunek krakowianowy został z powodzeniem wykorzystany do rozwiązania problemu dowolnej liczby obrotów ciała sztywnego dookoła różnych osi, eleganckiego i bezpośredniego rozwiązywania wielokątów sferycznych (przed metodą Banachiewicza wielokąty sferyczne rozwiązywano w bardzo skomplikowany sposób, rozkładając je na trójkąty sferyczne). Rachunek krakowianowy znalazł liczne zastosowania także w zagadnieniach geodezyjnych (w poligonometrii) oraz w innych dziedzinach nauki (o czym będzie jeszcze mowa).

Banachiewicz od 1923 r. opublikował ponad 50 prac dotyczących krakowianów i ich zastosowań. W 1952 r. ukazał się jego skrypt pt. *Metody rachunków astronomicznych*, w przeważającej części poświęcony krakowianom i ich zastosowaniom w astronomii. Natomiast w 1959 r. staraniem Komitetu Astronomii i Komitetu Geodezji Polska Akademia Nauk doprowadziła do pośmiertnego wydania obszernej monografii [1] Tadeusza Banachiewicza pt. *Rachunek krakowianowy*, gdzie na ponad 400 stronach zawarto owoc przeszło dwudziestoletniej pracy samego twórcy krakowianów, który zmarł 17 listopada 1954 r.

3. Tadeusz Banachiewicz o swoich krakowianach

Tadeusz Banachiewicz publicznie o krakowianach mówił na wykładach na Uniwersytecie Jagiellońskim w 1922 r., wstępnie nazywając je jakobianami. Przedstawiały one tabelki dziewięciu cosinusów kierunkowych umożliwiających przejście między układem współrzędnych ekliptycznych a układem współrzędnych równikowych.

Istotę krakowianów określają najtrafniej słowa samego Mistrza zamieszczone w przedmowie do książki *Rachunek krakowianowy* [1]. Zacytujemy je zatem z niewielkimi skrótami: „Pojawienie się książki, poświęconej oryginalnemu polskiemu rachunkowi, nie jest znowu tak dalece codziennym wydarzeniem, aby nie można było przewidzieć, że przynajmniej przedmowa do niej będzie czytana przez osoby trzymające się zazwyczaj jak najdalej od literatury trącącej matematyką. Na użytek tych osób spróbujemy najprzód odpowiedzieć na nasuwające im się zapewne pytania. Pierwsze pytanie będzie prawdopodobnie: co to takiego jest rachunek krakowianowy, czym są krakowiany? Dokładną, wyczerpującą odpowiedź daje oczywiście cała treść książki, ale ujmując rzecz orientacyjnie tylko w paru zdaniach, można by powiedzieć, że krakowiany nie są pojedynczymi wielkościami, ale, jakby stosując się mądrze do ducha czasu, zespołami wielkości; inaczej jeszcze – prostokątnymi zbiorami liczb zwykłych, tabelkami liczb. Zespół taki jest silniejszym, lepszym narzędziem do badań obliczeniowych niż pojedyncza, pospolita liczba, szarak matematyczny, znana wszystkim z arytmetyki czy algebry. Nie każda tabelka liczb jest krakowianem, nie jest więc nim np. jedna strona tablic logarytmów. Dla przemiany prostokątnego zbioru liczb w krakowian trzeba mu nadać pewne własności swoiste, dotyczące działań matematycznych nad nim. Trzeba więc zdefiniować, w jaki sposób zbiory te dodaje się, odejmuje, mnoży, dzieli, podnosi do potęgi. Nie wymieniamy tu specyficznych dla krakowianów działań, których same nazwy nic by nie mówiły. Następne nasuwające się pytanie jest zapewne: do czego służą krakowiany? Czy odkrywają one nowe światy, jako że zrodziły się pierwotnie dla potrzeb astronomii, czy też cel ich jest skromniejszy? Jest skromniejszy. Krakowiany ułatwiły wprawdzie w 1930 r. rozpoznanie planetarnej natury nowo odkrytego wówczas ciała niebieskiego, dalekiego Plutona (mówi o tym wydarzeniu obszerniej *Okólnik Obserwatorium Krakowskiego* Nr 26, nie wspominając zresztą o roli krakowianów) i może oddadzą i w przyszłości podobne usługi, ale w zasadzie mają one w swym programie co innego: ekonomię rozumowań matematycznych, osiąganą za pomocą bardziej wyrazistych niż dotychczasowe wzorów, oraz ułatwianie prac obliczeniowych. Ponadprogramowo niejako prowadzą one jednak do odkryć. W ten sposób w algebrze wykryły one nowe metody rozwiązywania równań, zastosowane z wielkim powodzeniem w astronomii i inżynierii, w geometrii doprowadziły do znalezienia podstawowych związków poligonometrii kulistej, reformując odnośną dziedzinę astronomii matematycznej. O ile chodzi o matematykę obliczeniową, to szczególną cechą krakowianów, cechą dość ukrytą, znaną tylko osobom, które się nimi posługują, jest sprowadzana przez nie redukcja pracy myślowej potrzebnej do wykonywania rachunków. Pochodzi ona w dużym stopniu ze zrealizowania zasady Kartezjusza (z rozprawy tego filozofa *O metodzie*), aby, o ile można, rozdrabniać każde zadanie na drobniejsze, po czym rozwiązywać części jego po kolei. Rachunek krakowianowy rozkłada się na 2 części: najprzód według znanych wzorów rozmieszczamy dane liczbowe zadania, następnie zaś stosujemy uniwersalny mechanizm prostych reguł rachunku krakowianowego. Ostateczny wynik jest taki, że niektóre rachunki, znane ogólnie jako bardzo uciążliwe, stały się wprost rozrywką dla wykonawcy. Trzeba osobiście wypróbować, aby się przekonać, jak daleko sięga dokonana w ten sposób reforma. Są wprawdzie osoby, niechętne nowemu rachunkowi, które twierdzą, że krakowiany rzekomo niczym nie różnią się od innych liczb zespołowych, zwanych macierzami, wynalezionych okrągło 100 lat temu przez W. Hamiltona, dyrektora Obserwatorium w Dublinie. W książce naszej rozpatrujemy parokrotnie względne zalety i wady krakowianów i macierzy, tutaj zaś przypomnijmy tylko, że największym niczym w matematyce jest zero, uważa się zaś często (bodajże słusznie) zero za największy wynalazek w matematyce praktycznej (...)”.

„(...) zastosowania krakowianów odznaczają się znaczną rozpiętością. Rachunek krakowianowy, o ile w ogóle gdzieś dotarł, przyjmowany był na ogół życzliwie, jak wnioskować można z dużej przychylnej mu literatury (patrz bibliografia w końcu książki) zarówno polskiej, jak i zagranicznej. Fakt ten jest dość wymowny, jeżeli zważymy, że książka niniejsza jest pierwszym obszerniejszym wykładem krakowianów; ogłaszane były dotychczas tylko mniejsze lub większe rozprawy monograficzne i zastosowania. Z uwagi na dużą ilość prac poświęconych krakowianom w polskim piśmiennictwie technicznym, zastanawiające jest milczenie, jakie otacza tę reformę matematyki praktycznej w Polsce w literaturze fachowych matematyków, z jednym wyjątkiem w czasach nowszych: *Zasady algebry wyższej* prof. W. Sierpińskiego. Sprawie tej należy poświęcić parę uwag.

Matematyka polska stoi wysoko. Choć niekoniecznie jest się do tego tak bardzo przekonanym, nieraz o tym czytaliśmy w pismach naszych, czasem słyszeliśmy *ex cathedra* (w Polsce). Ale matematyka nie jest pniem o jednym pędzie: są w niej różne konary. Jest więc matematyka abstrakcyjna, niedbająca o rzeczywistość, obracająca się głównie w świecie własnych pojęć, narzuconych nam zresztą przez świat zewnętrzny, i jest matematyka stosowana – naszym zdaniem równie «czysta» jak matematyka abstrakcyjna, ale trudniejsza, gdyż potrzebująca do swych wywodów wejrzenia w stosunki w świecie fizycznym, i jest wreszcie, coraz większego dzisiaj nabierająca znaczenia gałąź – matematyka praktyczna, zajmująca się obliczeniami. Ta gałąź ma zresztą również do czynienia z problematyką matematyki czystej i to nawet bardzo wysokiej, o ile chodzi o współczesne maszyny – szybkościowce matematyczne. W Polsce wśród fachowych matematyków uprawiana jest głównie gałąź, wymieniona przez nas na pierwszym miejscu, matematyka abstrakcyjna. Prac obliczeniowych prawie nie ma i patrzy się na nie z góry. Na jednym z naszych najbardziej «przyziemnie» w matematyce usposobionych uniwersytetów student matematyki, do którego skierowano prośbę o wykonanie jakiegoś trudniejszego obliczenia, odpowiada dumnie: ależ ja jestem matematykiem, zwróćcie się z tym do rachmistrza (autentyczne). Tymczasem jednak organ nieużywany zamiera, a matematyka rozumowań nie nauczy liczyć. Kto sam nie rachuje, nie może mieć i faktycznie nie ma żadnego wyobrażenia o problemach matematyki praktycznej. I to jest główny powód małego zainteresowania się matematyką wykonawczą wśród zawodowych matematyków polskich. Matematycy abstrakcjoniści, o ile sami nie rachują, po prostu nie umieją rachować (jest to bynajmniej niełatwa sztuka!) i nie są też w stanie ocenić tych oszczędności myślowych, jakie daje ta lub inna forma rachunku.

Ale istnieją i inne jeszcze powody – o ile chodzi o krakowiany – do powściągliwego stosunku do nowego rachunku. Krakowiany nie mają pewnej własności, którą są obdarzone inne pokrewne liczby zespołowe, wprowadzone przed 100 laty, zwane «matrycami» czy też «macierzami»; nie mają mianowicie własności «łączności» względem mnożenia, tak że $a(bc) \neq (ab)c.$ Nieposiadanie tej własności istotnie komplikuje nieco wyprowadzanie, czy też przekształcanie wzorów, ale w praktyce stokrotnie się to wyrównywa, bo wzór wyprowadza się jeden raz, a rachuje się nim setki razy, a „mnożenie” krakowianowe jest dogodniejsze od «matrycowego». Wspomniana własność iloczynu powoduje jednak pewien izolacjonizm algebry krakowianów. W przeciwieństwie do macierzy, krakowiany («o kolumnach i wierszach liniowo niezależnych») nie stanowią tzw. grupy względem mnożenia. Otóż nienależenie do «grupy» [co należy rozumieć: niespełnianie warunków grupy algebraicznej – przyp. autorów] stanowi o nienależeniu ich zarazem do «pierścienia» i «pola» [wg współczesnej terminologii do ciała algebraicznego – przyp. autorów], jednych z głównych obiektów badań współczesnej algebry abstrakcyjnej. Naszym zdaniem, jeżeli jakieś użyteczne pojęcie nie pasuje do koncepcji teoretycznych, to raczej teoria powinna ulec stosownej modyfikacji. Są zresztą przykłady na to w matematyce. Wiadomo np., że od drugiej połowy XIX w. zasadniczemu leibnizowskiemu pojęciu rachunku różniczkowego, pojęciu różniczki, groziło wniesienie go na indeks, w każdym razie przestano mu oddawać honory w podręcznikach analizy. W *Wyższej Matematyce* A. Hoborskiego (1923 r.) czytamy np., że «w nowszej matematyce pojęcie różniczki stało się zbędne». Tak czy nie, ale w rozpowszechnionym kursie *Rachunku różniczkowego* prof. F. Leji (1949 r.) spotykamy je znowu i wcale się nie zanosi, żeby miało zniknąć np. w rozważaniach astronomii matematycznej. Według znakomitego, niedawno zmarłego matematyka francuskiego Lebesgue'a, rozdziały o ułamkach i liczbach dziesiętnych powinny być usunięte z nauczania szkolnego, zastąpione przez jego koncepcję liczb rzeczywistych. Nie sądzimy, zresztą nie sami jesteśmy tego zdania, żeby to się miało stać, gdyż pożyteczne myślowo pojęcia mają zapewniony byt.

Podajemy tu jeszcze garstkę treściwych informacji dla czytelnika – matematyka o przyczynkach naukowych, osiągniętych przez matematykę krakowianową, a wyłożonych w książce (patrz również naszą notę *On the use of Cracovians for Theoretical Purposes in Pure and Applied Mathematics*, Acta Astronomica, c. 4 (1949), pp. 97-100).

Abstrahując od pojęcia krakowianu i jego własności, podanych w pierwszym rozdziale, w drugim rozdziale znajdzie czytelnik wyniki rozważań stanowiących fundament nowego, przez krakowiany otwartego, działu sferyki: poligonometrii kulistej. W świetle ogólniejszego ujęcia zagadnień trygonometrii sferycznej okazało się, że dwa podstawowe układy wzorów tej trygonometrii: 9 wzorów Gaussa – Cagnoli i 4 wzory Delambre'a stanowią dwie całkiem odmienne postacie tego samego faktu geometrycznego, że mianowicie po nadaniu kuli szeregu obrotów, odpowiadających wszystkim kolejnym elementom wielokąta kulistego, kula powraca do swej pozycji wyjściowej. Ujęcie tego faktu we wzory matematyczne prowadzi do podstawowych związków poligonometrii, których szczególnym przypadkiem dla trójkąta kulistego są wymienione podstawowe układy wzorów trygonometrii kulistej. Wzory poligonometrii kulistej zmieniają stosowany przez astronomów sposób rozwiązywania zagadnień poligonometrycznych: rozkładanie wielokątów na trójkąty stało się zbędne wobec istnienia rozwiązania wprost.

Poza tym w II rozdziale jest między innymi krakowianowe ujęcie schematu Hornera i innego problemu, quasi-krakowianowe mnożenie wielomianów 2 argumentów (odmienna, podstawowa cegiełka *Algebry jądrowej* T. Kochmańskiego), metoda obliczania szeregu (poniekąd praca zespołu Obserwatorium Krakowskiego) – rzecz szczególnie ważna dla ewentualnego zastosowania w maszynach – szybkościowcach i wiele innych tematów, których nie będziemy wymieniali, odsyłając czytelnika do spisu rzeczy. Wspominamy tylko jeszcze, że w teorii obrotów ciała sztywnego z łatwością rozwiązany został problem rozkładu danego na 3 obroty naokoło osi współrzędnych, będący nie do rozwikłania według Olinde Rodriguesa.

W III rozdziale książka daje wzór na rozwiązanie układu równań liniowych. W porównaniu z wyznacznikowym rozwiązaniem Cramera wzór odznacza się swym elementarnym charakterem i zupełną ogólnością oraz tym zwłaszcza, że w przeciwieństwie do wzorów klasycznych może być faktycznie zastosowany niezależnie od ilości niewiadomych. Rozwiązanie oparte jest na specyficznie krakowianowym działaniu, rozkładzie danego krakowianu na czynniki elementarne oraz na pojęciu ilorazu dowolnych (konforemnych) krakowianów. W szczególnym przypadku symetrycznego układu równań prowadzi ono do wyciągania pierwiastka krakowianowego z krakowianu współczynników równań. Wspomniane czynniki elementarne nie tak prosto definiują się w rachunku macierzowym i może dlatego się w nim nie pojawiły, chociaż odgrywają tak ważną rolę w ogólnym rozwiązywaniu. Prowadzą one do prostej metody obliczania rangi krakowianu (która równa się ilości wierszy tych czynników) i wartości wyznacznika.

Rozwiązywanie symetrycznego układu równań, jako odgrywające wielką rolę w zastosowaniach, jest szczegółowo wypracowane. Należy odróżniać rozwiązania nieoznaczone i oznaczone. To pierwsze, które nastręczało w praktyce główne trudności, krakowianowy pierwiastek rozwiązuje błyskawicznie (nie jest prawdą, że rozwiązanie to pochodzi od Choleskiego). Dla rozwiązania oznaczonego, stosunkowo łatwego, krakowiany dają wzory, których szczególnymi przypadkami są metody Choleskiego i Doolittle'a, uzyskując w ten sposób wspólne i łatwe uzasadnienie obydwu i prosty klucz do rachunku. W ten sposób krakowiany prowadzą też do nowego algorytmu metody najmniejszych kwadratów, odmiennego od klasycznego algorytmu Gaussa, a udostępniającego zawikłaną dotychczas metodę szerszym rzeszom pracowników nauki.

Metodzie najmniejszych kwadratów, opartej na nowym algorytmie, poświęcone są rozdziały książki, poczynając od VI. Wykład jest bardziej elementarny niż przeważnie, czy też wyłącznie w podręcznikach, które dla znalezienia minimum sumy kwadratów pozostałości posługują się rachunkiem różniczkowym. Postępowanie takie z reguły jest nieścisłe, o ile opiera się tylko na przyrównaniu do zera pewnych pochodnych, i zostało przez piszącego zastąpione, częściowo nie bez trudu, wyprowadzeniem opartym na działaniach algebraicznych, mających zresztą i tę zaletę, że prowadzi do wyrażeń na sumę kwadratów pozostałości.

W ostatnim rozdziale znajduje się kilka drobniejszych wyników, dotyczących rachunku wyrównawczego, co do których odsyłamy czytelnika do książki. Nadmieniamy, że pozostawałoby jeszcze do zbadania, w jakim stopniu wzory krakowianowe, dotyczące problemu Hoene-Wrońskiego (rozkładu dowolnej funkcji na szereg według danych z góry funkcji) – ostatni paragraf książki – są praktyczniejsze od będących w użyciu (Courant – Hilbert, *Methoden der mathematischen Physic*, 1931, tom I, rozdz. II) (...)".

4. Astronomia teoretyczna

Osiągnięcia profesora Banachiewicza w dziedzinie astronomii teoretycznej są istotne [17]. W 1906 roku przedstawił Akademii Paryskiej pracę uogólniającą powszechnie znane twierdzenie Lagrange'a dotyczące problemu trzech ciał. Praca ta zyskała uznanie uczonych tej miary co Poincaré, Moulton i Lovett.

Banachiewicz wykazał błędność teorii Gyldèna–Brendela w zastosowaniu do małych planetek w sąsiedztwie Jowisza. Na podstawie uzyskanego przez siebie kryterium rozbieżności Banachiewicz wykazał, że szeregi Gyldèna są w ogóle rozbieżne dla planet typu Hilda (2/3) i Thule (3/4).

Wiele uwagi Banachiewicz poświęcił równaniu Gaussa

$$\sin(z - q) = m \sin^4 z,$$

które odgrywa zasadniczą rolę w wyznaczaniu orbit eliptycznych. Stosując wzór Józefa M. Hoene-Wrońskiego, podał proste rozwiązanie równania Gaussa za pomocą szybko zbieżnego szeregu oraz ułożył odpowiednie tablice upraszczające rachunki. Te tablice Banachiewicza weszły do znanych tablic Bauschinger–Stracke: *Tafeln zur theoretishen Astronomie.*

Wiele uwagi poświęcił również Banachiewicz wielokrotnym rozwiązaniom w zagadnieniu wyznaczania orbity parabolicznej z trzech obserwacji. Wbrew opinii Legendre'a, Vogela, Chaliera i innych, którzy sądzili, że wykazali jednoznaczność wyprowadzenia orbity na podstawie trzech obserwacji, a tym samym niemożność istnienia potrójnego rozwiązania, Banachiewicz udowodnił, że istnieją potrójne rozwiązania przy pewnych osobliwych warunkach, a mianowicie dla komet widzialnych w pobliżu Słońca, a także dla komet prawie stacjonarnych i to przy dowolnej elongacji. Był to wielki sukces polskiego astronoma, który zauważył, że równanie Lamberta, na którym oparli swe wywody Legendre i inni, w wymienionych warunkach nie ma zastosowania. Wynik Banachiewicza odbił się głośnym echem w literaturze światowej.

Jednak najpoważniejsze osiągnięcia Banachiewicza w astronomii teoretycznej to modyfikacja i uproszczenia metody Olbersa wyznaczania orbit parabolicznych oraz przystosowanie jej do wymogów rachunku z użyciem arytmometrów. Modyfikacja metody Olbersa wyznaczania orbity parabolicznej spotkała się z powszechnym uznaniem i weszła do podręczników jako metoda Olbersa–Banachiewicza. Nowe metody, tzw. metody bezpośrednie i kwaternionowe (kwaterniony to pewne uogólnienia liczb zespolonych), wprowadził Banachiewicz do problemu poprawiania orbit, ujmując we wzory krakowianowe skomplikowane zagadnienia występujących tam współczynników różniczkowych.

Pierwsza z tych metod oparta jest na rzutowaniu przemieszczania heliocentrycznego na osie orbitalne, a druga operuje rzutami na promień wodzący i dwa kierunki prostopadłe do niego. Obie metody wprowadzają do rachunku uproszczenia, przejrzystość i niezbędną kontrolę. Metody te można stosować do orbit o dowolnym mimośrodzie. Są praktyczniejsze od metod wcześniejszych i rozpowszechniły się w środowisku astronomów.

Banachiewicza cechowała wyjątkowa umiejętność wykrywania cudzych błędów. Jego krytyka zawsze miała charakter konstruktywny. Wytykając cudze błędy, wskazywał właściwe rozwiązanie lub drogę ku niemu.

Większość z wybitnych osiągnięć polskiego uczonego stało się możliwe dzięki wynalezionemu przez niego rachunkowi krakowianowemu. Algorytm Banachiewicza metody najmniejszych kwadratów w astronomii wyrugował algorytm Gaussa. Algorytm Banachiewicza nie wymaga rachunku różniczkowego, przez co staje się szerzej stosowalny.

Wyprowadzony przez Banachiewicza ogólny wzór poligonometrii sferycznej, bezskutecznie poszukiwany przez matematyków około sto lat, zastosowany do trygonometrii sferycznej uwidocznił nieznane wcześniej, a istotne osobliwości jej wzorów, które uszły uwadze matematyków tej miary co Gauss, Euler, Monge, Delambre i in. Wzory poligonometrii sferycznej pozwalają rozwiązywać wielokąty sferyczne bezpośrednio bez potrzeby rozkładania ich na poszczególne trójkąty sferyczne [15, 18, 19]. Ma to istotne znaczenie w niektórych zagadnieniach astronomicznych. W szczególności problem libracji Księżyca dzięki wzorom poligonometrii sferycznej i krakowianowemu algorytmowi najmniejszych kwadratów, właściwie sformułowany przez Banachiewicza, ruszył z martwego punktu, w jakim tkwił jeszcze od czasów Bessela.

Do istotnych osiągnięć Banachiewicza, które publikował w swoich licznych pracach naukowych, należy zaliczyć: klasyczne wyznaczenie orbity Plutona, tablice precesji oraz wyznaczenie fikcyjnych przykładów w zagadnieniu wielokrotnych rozwiązań lub rozbieżność szeregów w teorii Gyldèna–Brendela.

Banachiewicz podejmował także badania teoretyczne takich zjawisk, jak bieg promieni w atmosferach planet, teoria ruchów księżyców Jowisza czy aberracja satelitów planet (znane jest prawo aberracji Banachiewicza).

Tadeusz Banachiewicz był nie tylko teoretykiem, ale również wybitnym i zamiłowanym obserwatorem. Ogłoszone przez niego efemerydy okultacji gwiazd przez planety przyczyniły się m.in. do zaobserwowania zakrycia gwiazdy 6G Librae przez Ganimedesa, trzeciego satelitę Jowisza, zjawiska jedynego w astronomii.

5. Idee krakowianowe w geodezji

Tadeusz Banachiewicz ma istotny wkład w rozwój metod teoretycznych geodezji. Opracował teorię obrotów opierającą się na krakowianach, którą następnie rozwinął w poligonometrię sferyczną, której szczególnym przypadkiem jest trygonometria sferyczna, mająca olbrzymie znaczenie w astronomii i geodezji.

Banachiewicz wiele uwagi poświęcił modyfikacji metody najmniejszych kwadratów, bazując na krakowianach [13]. Umożliwiło to opracowanie w szczególności następujących ważnych zagadnień geodezji: wcięcie w przód i zadanie Hansena (opracował T. Banachiewicz), wcięcie wstecz (opracował T. Kochmański) i zadanie Mareka (opracował A. Otrębski). Należy tu zauważyć, że znakomita większość zadań obliczeniowych geodezyjnych to zadania rozwiązywane metodą najmniejszych kwadratów.

Wykładając geodezję [13], zetknął się Banachiewicz z tzw. odwzorowaniem Gaussa–Krügera, w wyniku czego podał prostą metodę numeryczną rozwiązywania równań różniczkowych dla odwzorowań konforemnych (wiernokątnych). Odwzorowania konforemne wiążą się z mnożeniem szeregów. Powstało opracowane przez T. Kochmańskiego rozszerzenie krakowianów w postaci tzw. algebry jądrowej, a następnie dalsze rozszerzenie na teorię ciągów wielowymiarowych.

Z odwzorowaniami konforemnymi wiąże się także odwracanie szeregów geodezyjnych, które opracował dla odwzorowań konforemnych T. Kochmański, a ogólną metodę odwracania szeregów geodezyjnych K. Kozieł [13]. Przede wszystkim w rachunku wyrównawczym krakowiany mają szczególnie przydatne cechy. Najlepiej nadają się do rozwiązywania zadań wyrównawczych, a wiąże się to z istnieniem kwadratu krakowianowego, którego obliczanie jest odpowiednikiem przejścia od współczynników równań poprawek do współczynników równań normalnych, jak również z istnieniem pierwiastka kwadratowego krakowianu, którego obliczenie jest podstawą najlepszych algorytmów i to zarówno dla obliczeń ręcznych, jak i komputerowych [9].

Po śmierci Tadeusza Banachiewicza w wielu pracach naukowych z geodezji wykorzystywano krakowiany. W geodezji od ponad wieku znane jest zagadnienie wyrównywania dużych sieci geodezyjnych [4]. Podział dużych sieci geodezyjnych na bloki zaproponował w 1880 r. Helmert, a w 1935 r. metoda wyrównywania dużych sieci, polegająca na podziale wyników obserwacji na grupy, została ponownie zaproponowana przez Pranis-Praniewicza. Z metodą bloków Helmerta do połowy XX w. była związana metoda Gaussa, którą stosowano przy redukcji części niewiadomych z układów równań normalnych. W 1955 r. Hausbrandt wprowadził krakowiany do wyrównywania dużych sieci geodezyjnych. S. Hausbrandt jako pierwszy wskazał zalety rachunku krakowianowego, a szczególnie pierwiastka krakowianowego do redukcji niewiadomych częściowo niezależnych (niewiadomych wewnętrznych) występujących w układach równań normalnych, odpowiadających poszczególnym blokom sieci. Metoda bloków Helmerta dzięki podziale dużej sieci geodezyjnej na mniejsze bloki pozwala na równoległe opracowanie tych bloków. W latach 60. [4] modyfikowano i uogólniano metodę bloków Helmerta. Znane są tu wyniki Goździckiego (1962 r. i 1963 r.), który m.in. dostosowywał krakowianowe algorytmy wyrównywania dużej sieci geodezyjnej do obliczeń z użyciem komputerów, oraz wyniki Wiśniewicza (1965 r.), który także wykorzystując rachunek krakowianowy, rozważał przypadek tzw. wielopoziomowego podziału sieci geodezyjnej na bloki. Takie podejście jest konieczne, gdy ze względu na wielkość wyrównywanej sieci geodezyjnej jednorazowy podział wyznaczanych parametrów na grupy niewiadomych częściowo niezależnych (niewiadomych wewnętrznych) i jedną grupę niewiadomych wiążących (niewiadomych zewnętrznych) nie wystarcza.

W następnych latach powstało wiele prac [4] poświęconych udoskonalaniu lub tworzeniu nowych algorytmów. Wyniki w tym względzie z wykorzystaniem rachunku krakowianowego mają Złatanow (1969) i Baran (m.in. 1977, 1981, 1982), który zajmował się wyznaczaniem krakowianów wariacyjno-kowariancyjnych.

W ostatnich dziesięcioleciach rozwinęła się także inna metoda wyrównywania dużych sieci geodezyjnych [4]. Metoda ta wykorzystuje teorię procesów stochastycznych i została nazwana metodą sekwencyjnego wyrównywania. Tak jak w metodzie bloków Helmerta w metodzie sekwencyjnego wyrównywania dokonuje się podziału sieci na bloki, ale opracowanie tych bloków odbywa się po kolei, a nie równolegle. Pewne wyniki dotyczące tej metody należą do Kalmana (1960), Lee (1964), Złatanowa (1969), Pachalskiego (1970) i Sikorskiego (1979).

Z przytoczonych powyżej faktów wynika, że rola krakowianów, szczególnie w czasach, gdy ludzkość nie dysponowała dobrymi maszynami liczącymi, była istotna w rozwoju geodezji. Jednak w latach 60. i 70. XX w. zaistniały istotne zmiany w metodach i technikach obliczeń geodezyjnych. Arytmometry mechaniczne (na korbkę) i elektryczne wyszły z użycia i zostały zastąpione przez zwykłe i programowane kalkulatory elektroniczne oraz zaczęły się pojawiać rozmaitego rodzaju komputery, których druga fala (tzw. komputerów osobistych) pojawiła się w ostatnim dziesięcioleciu XX w. i nadal obserwuje się w tym względzie ogromny postęp. W takiej sytuacji pojawia się pytanie o rolę krakowianów współcześnie. Czy w ogóle posługiwanie się krakowianami ma sens? Wydaje się, że także współcześnie rola krakowianów nie traci swego praktycznego znaczenia [7, 9], gdyż dla współczesnych maszyn liczących nie jest obojętne, jakim sposobem (krakowianowo czy macierzowo) dane zadanie jest rozwiązywane. Czas pracy dobrych komputerów jest bardzo drogi. Czas obliczeń z użyciem krakowianów jest znacznie krótszy od czasu obliczeń zadania za pomocą rachunku macierzowego. Ponadto w rachunku krakowianowym istnieje możliwość ciągłej kontroli obliczeń, co niekiedy pozwala uniknąć konieczności powtórnych obliczeń. Nadto wiele problemów praktycznych rozwiązywanych krakowianowo daje się prościej sformułować i rozwiązać [8, 9].

Tadeusz Banachiewicz zasłużył się także na terenie geodezji praktycznej. W latach 1945–1951 piastował dodatkowo funkcję kierownika Katedry Geodezji Wyższej i Astronomii w ramach Oddziału Geodezyjnego Wydziałów Politechnicznych Akademii Górniczej w Krakowie [7, 13]. Po studiach Banachiewicz wyznaczył siłę ciężkości dla wielu punktów Rosji. Jeszcze przed pierwszą wojną światową po powrocie do kraju organizował pierwsze pomiary grawimetryczne w Polsce. W 1929 roku opublikował wyniki na temat eliptyczności równika ziemskiego. W latach 1919–1939 kierował niwelacją Kraków––Kielce. W tym czasie zostały także wyznaczone współrzędne astronomiczne punktu triangulacyjnego koło Łodzi. Banachiewicz organizował wiele innych ekspedycji naukowych mających na celu pomiary grawimetryczne lub obserwacje zaćmień Słońca. Więcej informacji na ten temat można znaleźć np. w [6–8 i 13].

6. Maszyny obliczeniowe

Tadeusz Banachiewicz wprowadził krakowiany, aby usprawnić obliczenia na arytmometrach. Interesował się najnowszymi osiągnięciami nauki, zwracając szczególną uwagę na usprawnienia w technice obliczeniowej. W czasach, gdy większość rachunków astronomicznych wykonywano jeszcze za pomocą suwaków logarytmicznych i różnego rodzaju tablic, Banachiewicz przewidział rozwój techniki obliczeniowej. Swymi wiadomościami o budowie i działaniu maszyn liczących, zaczerpniętymi z książek, wyniesionymi z konferencji naukowych, dzielił się z innymi na zebraniach naukowych Obserwatorium Astronomicznego (prot. zebr. nauk. z dn. 25.06.1937, 23.06.1937 r. i in.) [20]. Profesor Banachiewicz był entuzjastą liczenia za pomocą „mózgu stalowego" i propagował to w Polsce. W swoim jubileuszowym przemówieniu, mówiąc o ostatnich osiągnięciach astronomii rachunkowej, wypowiedział następujące zdanie: „Dzieło, o którym mowa (pozycje wielkich planet w okresie 1653–2060) zawiera przeszło półtora miliona liczb, dla otrzymania których potrzeba było użyć około 200 milionów cyfr. Leverrier z posiadanymi przez się środkami musiałby pracować nad nim 300 lat (...). Otwierają się nowe horyzonty przed rachunkami wielkiej wagi dla ogółu" [17].

Niejednokrotnie profesor Banachiewicz podkreślał wartość nowych metod czy maszyn zależącą od celu, wykwalifikowania itp. czynników. Uważał, że istnieją dwa rodzaje maszyn. Pierwsze to maszyny do liczenia, a drugie to maszyny do myślenia. Mówił (prot. zebr. nauk. z dn. 14.10.1949): „Maszyny wykonuje Ameryka, a pomysły pochodzą z Europy".

Banachiewicz bezskutecznie zabiegał o fundusze na sprowadzenie maszyn do liczenia z zagranicy (ze Szwajcarii, Stanów Zjednoczonych) (prot. zebr. nauk. 17.10.1952) [20]. Okazywało się często, że: „Maszyny w krajach, gdzie praca jest nie bardzo wynagradzana, są droższe od ludzi, brakuje funduszy na ich zakup lub wypożyczenie" (prot. zebr. nauk. 17.01.1947).

Wielokrotnie Banachiewicz wskazywał na potrzebę konstruowania maszyn do liczenia do celów astronomicznych, bowiem stosowanie ich dałoby wielkie uproszczenia w różnego rodzaju rachunkach (prot. zebr. nauk. z dn. 25.06.1937, 20.11.1953, 2.04.1954, 4.11.1949, sprawozdanie PAU, t. XLII (1937), Nr 7, s. 191). Kiedy profesor Kochmański wygłosił referat o swoim projekcie nowej automatycznej maszyny rachunkowej, dostosowanej do operacji krakowianowych, prof. Banachiewicz stwierdził, że: „naprzód należałoby skonstruować jedną maszynę dla celów próbnych i dydaktycznych i zainteresować nią młodych, którzy następnie uzupełniliby swoje wykształcenie za granicą i po powrocie mogliby zająć się realizacją maszyn rachunkowych" (prot. zebr. nauk. z dn. 14.03.1952).

Na zebraniu PAN w dn. 15.03.1954 r. prof. Banachiewicz mocno zaznaczył zawrotną szybkość wykonywania pracy rachunkowej, którą nazywał „muzyką przyszłości” (prot. zebr. nauk. z dn. 8.07.1949) [20]. Przewidywał nadejście nowej ery maszyn liczących, sprawniejszych i szybszych od myśli ludzkiej. Rzeczywiście, wkrótce, w latach 60. XX w. pojawiły się maszyny matematyczne parę tysięcy razy szybsze od tych z lat 50. Dzięki temu, że użytkownicy maszyn liczących (do nich zaliczał się w pierwszym rzędzie Tadeusz Banachiewicz) domagali się coraz lepszego sprzętu pozwalającego na prowadzenie obliczeń w ramach nowo powstających teorii, dokonał się w ostatnich dziesięcioleciach XX w. ogromny postęp od maszyn elektronicznych–przekaźnikowych i elektronicznych–lampowych poprzez tranzystorowe maszyny liczące do komputerów opartych na układach scalonych z wykorzystaniem technik nanoinżynierii materiałowej. Postęp w dziedzinie badań nad szybko przebiegającymi zjawiskami fizycznymi, technologią materiałów i projektowaniem sieci logicznych umożliwił skokową zmianę w dziedzinie szybkości, od mikrosekund (1 μs – czas charakterystyczny przenoszenia informacji dla maszyn realizowanych na bazie lamp elektronicznych) do nanosekund, która dokonała się na wszystkich poziomach maszyn matematycznych. Dzisiejsze maszyny cyfrowe, opierające swe działanie na zjawiskach półprzewodnictwa, nadprzewodnictwa, cienkich warstw magnetycznych i technik nanoinżynierii, pracują wielokrotnie „szybciej niż myśl”. Stosowane są wszędzie: w przemyśle, medycynie, szkolnictwie i nauce, projektowaniu, planowaniu, gospodarowaniu, budownictwie itp. W zasadzie żadna dziedzina nauki bez szybkich maszyn liczących nie może się należycie rozwijać. Więc sformułowanie Banachiewicza „muzyka przyszłości” na określenie zawrotnej szybkości obliczeniowej zmaterializowało się w niedługim czasie po jego śmierci.

7. Poglądy Tadeusza Banachiewicza z pogranicza fizyki i filozofii

Banachiewicz miał wiele ciekawych poglądów natury filozoficznej, dotyczących naukowego i sformalizowanego opisu rzeczywistości. Poniżej zacytujemy fragmenty niektórych protokołów zebrań naukowych Obserwatorium Astronomicznego UJ.

„Teorie dają ujęcie zjawisk otaczającego nas świata, lecz na ogół nie dają ich wytłumaczenia (tak jak obserwator, który by obserwował przechodnia idącego z punktu *A* do *B* i zatrzymującego się w punkcie *C* przed wystawą; przez podanie równania jego ruchu nie tłumaczymy przyczyny zatrzymania się w *C*)” (prot. zebr. nauk. z dn. 11.05.1940) [20].

„Teorie Einsteina i Kopernika są to pewne sposoby opisania świata, a opisów świata może być nieskończenie wiele. Im dalej jednak posuwamy się w obserwacji zjawisk, tym większe wymagania stawiamy opisowi świata” (prot. zebr. nauk. z dn. 11.03.1938).

„Główne poparcie teorii Kopernika daje teza, zasadnicza w teorii materializmu dialektycznego, że wszystkie zjawiska należy rozpatrywać łącznie, a nie w oderwaniu jedne od drugich. Prof. Banachiewicz powołuje się zresztą na swój artykuł z 1923 r. (Rocznik Astr. T. III) [20]. Przypomina przykład samolotu kursującego między Warszawą a Krakowem i wskazuje na potrzebę naszego umysłu uważania przedmiotów ruchomych i nieruchomych” (prot. zebr. nauk. z dn. 9.09.1949) [20].

„Zagadnienie prawdziwości układu Kopernika leży w innej płaszczyźnie niż u Foka i Minnaerta. Umysł ludzki potrzebuje układu nieruchomego dla wyobrażenia sobie zjawisk natury. Jeżeli zaś nawet nie ma tego u Einsteina, to przyszły fizyk znajdzie na pewno wzór ujmujący wszystko i formalnie pozwalający zrezygnować z uprzywilejowanego układu" (prot. zebr. nauk. z dn. 9.10.1953) [20].

Jako wszechstronny uczony Banachiewicz interesował się najnowszymi osiągnięciami nauki. Czytał wiele publikacji i książek naukowych, jak np.: „Teoria względności wiele zawdzięcza obserwacjom astronomicznym. Z obserwacji gwiazd zmiennych zaćmieniowych okazuje się, że szybkość światła niezależna jest od ruchu źródła światła. Astronomia może mieć za swoją zasługę to, że poznano energię atomową, badania opierały się na badaniach Einsteina" (prot. zebr. nauk. z dn. 8.07.1949) [20].

Banachiewicz uważał, że „fizycy mogliby uwzględnić doświadczenia astronomów w badaniu promieni kosmicznych" (prot. zebr. nauk. z dn. 19.12.1947 [20]) i że wystarczyłoby przeprowadzić eksperymenty w Wieliczce (300 m p.p.m.) i śląskich kopalniach węgla (900 m p.p.m.) w celu sprawdzenia hipotezy Blacketa, analogicznie do pomiarów w kopalni złota koło Johannesburga (prot. zebr. nauk. z dn. 19.12.1947) [20]. Wiadomo wszystkim, że właśnie badanie kosmicznego promieniowania korpuskularnego przyczyniło się bezpośrednio do odkrycia wielu cząstek elementarnych i powstania ich teorii, dziś ogromnie rozbudowanej.

Banachiewicza interesowały nie tylko najdalsze obszary Wszechświata, tajniki, które zaczęła odkrywać nowa dziedzina astronomii – radioastronomia (prot. zebr. nauk. z dn. 13.05.1949) [20], ale także planety naszego Układu Słonecznego. Jako pierwszy astronom obliczył orbitę Plutona (z bardzo skąpego materiału obserwacyjnego) i stwierdził jej planetarny charakter (prot. zebr. nauk. z dn 18.10.1946 i in.) [20]. Zastanawiał się nad atmosferą Wenus (prot. zebr. nauk. z dn. 21.12.1945), życiem na Marsie. Już w 1947 r. przewidział loty człowieka w przestrzeń kosmiczną. Powiedział wówczas: „Idea podróży międzyplanetarnych jest wielka i z pewnością będzie jej poświęcone wiele wysiłków i niejedno życie. Byłoby dobrze, gdyby ktoś obliczył np. drogę na Marsa jako próbną efemerydę rakiety" (prot. zebr. nauk. z dn. 6.06.1947) [20].

Niewiele ponad dwadzieścia lat później, bo w 1969 r., stopy ludzkie po raz pierwszy dotknęły powierzchni Księżyca. Aktualnie rozważa się przygotowania do lotu załogowego na Marsa.

8. *Interlingua*

Tadeusz Banachiewicz wielokrotnie podnosił sprawę wprowadzenia na arenie międzynarodowej sztucznego języka, którym wszyscy ludzie mogliby się porozumiewać i który „byłby niezależny od wojny i spraw politycznych" (prot. zebr. nauk. z dn. 6.06.1951) [20]. Motywował tę propozycję następująco: „Gdyby był przyjęty jeden język sztuczny, wszystkie narody byłyby równouprawnione" (prot. zebr. nauk. z dn. 26.05.1939) [20]. „Gdy chodzi o nas Słowian, to jesteśmy specjalnie upośledzeni, jeśli chodzi o języki obce, bo każdy naród słowiański musi znać jakiś język, zwłaszcza jeśli chodzi o arenę międzynarodową. Zatem język międzynarodowy leży przede wszystkim w interesie narodów małych, choć i państwa duże są o tyle zainteresowane, że wybór języka pewnego mocarstwa miałby wielkie znaczenie polityczne, zaś język sztuczny jest neutralny" (prot. zebr. nauk. z dn. 29.11.1946) [20]. Prowadzenie wszystkich zjazdów w języku angielskim lub francuskim zdaniem Banachiewicza – „dawało przewagę narodom anglosaskim nad słowiańskimi" (prot. zebr. nauk. z dn. 12.02.1948) [20].

Język *latino sine flexione* jednak nie zdał egzaminu, choć niektórzy uczeni początkowo posługiwali się nim. Ograniczony zasób słownictwa zarówno potocznego, jak i technicznego oraz niewielka liczba podręczników do nauki *interlingua* przyczyniły się do jego zaniku. Rocznik astronomiczny przestano wydawać w tym języku w 1955 r., zastępując go angielskim, polskim i rosyjskim.

Profesor Banachiewicz był jedyną osobą w Obserwatorium dobrze posługującą się *interlingua* (prot. zebr. nauk. z dn. 20.10.1955) [20].

9. Dodatek – biografia Tadeusza Banachiewicza

Aby bardziej przybliżyć postać wielkiego człowieka i wybitnego polskiego astronoma, podajemy poniżej pełną i uporządkowaną biografię Tadeusza Banachiewicza, przy sporządzaniu której wykorzystaliśmy również pewne dane archiwalne z Archiwum UJ dotąd niepublikowane.

9.1. Ważniejsze fakty biograficzne Tadeusza Juliana Banachiewicza (1882–1954)

Profesor Tadeusz Julian Banachiewicz urodził się w Warszawie 13 lutego 1882 r. Jego ojciec Artur (1840–1910) był ziemianinem. Miał majątek ziemski we wsi Cychry (koło Grójca) pod Warszawą. Matką Banachiewicza była Zofia z domu Rzeszotarska (1852–1920). Tadeusz Banachiewicz był najmłodszym z trójki rodzeństwa. Miał starszego brata Ignacego Jana (1875–1940), który zmarł w obozie koncentracyjnym w Dachau, i siostrę Zofię Annę (1878–1961). Pierwsze lata życia Tadeusz Banachiewicz spędził w majątku swoich rodziców. Już od najmłodszych lat wykazywał nieprzeciętne zdolności intelektualne. W wieku czterech lat umiał liczyć do tysiąca, a w wieku pięciu lat dobrze czytał. W 1900 roku ukończył V Gimnazjum w Warszawie, uzyskując wyróżnienie – srebrny medal za wyniki w nauce. Już w czasie nauki szkolnej wykazywał wybitne uzdolnienia matematyczne. Po ukończeniu gimnazjum rozpoczął studia na Wydziale Matematyczno-Fizycznym Uniwersytetu Warszawskiego, które ukończył w 1904 r. ze stopniem kandydata nauk matematycznych i ze złotym medalem za rozprawę konkursową z astronomii praktycznej pt. *Badania stałych redukcyjnych heliometru Respolda Obserwatorium Pułkowskiego*. Senat Uniwersytetu Warszawskiego zaproponował Banachiewiczowi pozostanie na uczelni w Katedrze Astronomii i Geodezji w charakterze aspiranta, czyli stypendysty mającego przygotować się do objęcia stanowiska wykładowcy. Niestety, zamknięcie w 1905 r. Uniwersytetu Warszawskiego przez władze rosyjskie w odwecie za ruchy niepodległościowe zniweczyło pierwsze plany naukowe Banachiewicza. Od 1901 roku (jeszcze jako student) Banachiewicz prowadził systematyczne obserwacje astronomiczne, głównie zakryć gwiazd przez Księżyc. Obserwacje te następnie kontynuował przez wiele lat już jako dyrektor Obserwatorium Astronomicznego w Krakowie i to z taką dokładnością, że zyskały one uznanie obserwatorium w Greenwich. W latach 1906 i 1907 Banachiewicz studiował w Getyndze, głównie astrofizykę pod kierunkiem Schwarzchilda. W roku 1908/1909 pracował jako asystent u Oskara Backluda w Obserwatorium Astronomicznym w Pułkowie, prowadząc obserwacje astronomiczne i pogłębiając studia matematyczne. W 1909 roku Banachiewicz wrócił do Warszawy, gdzie otrzymał stanowisko młodszego asystenta w Obserwatorium Astronomicznym na ponownie otwartym Uniwersytecie

Warszawskim. Jednak po roku, pomimo sukcesów naukowych, nie uzyskał posady na uniwersytecie. Główną przyczyną była śmierć w 1907 r. prof. Aleksandra Wasilewicza Krasnowa (1866–1907), który wcześniej popierał starania Banachiewicza. W takiej sytuacji Banachiewicz przeniósł się do domu rodzinnego w Cychrach, gdzie przygotowywał się do egzaminów magisterskich (odpowiednik dzisiejszego kolokwium habilitacyjnego). W 1910 roku złożył egzaminy magisterskie w Moskwie (wcześniej w 1909 r. dwa egzaminy zdał jeszcze w Warszawie). Po złożeniu egzaminów magisterskich przyjął w 1910 r. stanowisko asystenta w Obserwatorium Astronomicznym Engelhardta pod Kazaniem, gdzie przez pięć lat prowadził głównie obserwacje heliometryczne Księżyca. W 1915 roku habilitował się na uniwersytecie w Kazaniu. W tym samym roku wyjechał z Kazania i ponownie habilitował się w Dorpacie (Estonia) na podstawie pracy *Trzy szkice z teorii refrakcji*. Następnie został docentem prywatnym uniwersytetu w Dorpacie, gdzie prowadził wykład monograficzny. W 1917 roku obronił w Dorpacie pracę pt. *O równaniu Gaussa* na stopień magistra astronomii. Potem został powołany na stanowisko docenta astronomii, a w marcu 1918 r. na stanowisko profesora nadzwyczajnego astronomii na Uniwersytecie w Dorpacie. Od początku marca do końca maja 1918 r. był dyrektorem Obserwatorium Dorpackiego (31.05.1918 r. okupanci niemieccy zamknęli już wtedy niezależny od bolszewików Uniwersytet Dorpacki). W lipcu 1918 roku przy okazji ewakuacji uniwersytetu do Rosji Banachiewicz został zaproszony w charakterze profesora astronomii do Woroneża. Z tej propozycji nie skorzystał, gdyż jeszcze w maju 1918 r. otrzymał propozycję stanowiska profesora astronomii na Uniwersytecie Jagiellońskim w Krakowie. Po krótkim pobycie w Warszawie (10.1918–03.1919), gdzie jako docent geodezji pracował na Politechnice Warszawskiej, Banachiewicz w 1919 r. wyjechał do Krakowa, by objąć stanowisko profesora zwyczajnego UJ i jednocześnie dyrektora Obserwatorium Astronomicznego UJ. Okres krakowski, który trwał 35 lat, był w życiu Banachiewicza pełen obfitej i owocnej działalności naukowej, dydaktycznej i organizacyjnej.

Stan astronomii krakowskiej był wtedy katastrofalny. Po śmierci w 1916 r. Piusa Rudzkiego obserwatorium kierował adiunkt dr Władysław Dziewulski. Ze względu na czasy wojenne i zabory od wielu lat nie inwestowano w wyposażenie obserwatorium. W tym czasie obserwatorium dysponowało dwiema nieco większymi lunetami, kilkoma niewielkimi przenośnymi lunetkami i dwoma chronometrami oraz kilkoma przestarzałymi i nieużywanymi instrumentami. Budynek obserwatorium przy ul. Kopernika wymagał remontu. Personel obserwatorium składał się z dwóch osób: adiunkta Władysława Dziewulskiego i asystenta Stanisława Szeligowskiego, który zajmował się głównie meteorologią. Jesienią 1919 roku Dziewulski przeniósł się do Wilna, a niedługo potem Szeligowski także wyjechał z Krakowa. Banachiewicz zaczął organizować działalność astronomiczną w Krakowie od podstaw. Zatrudnił nowych pracowników: Józefa Witkowskiego, Jana Gadomskiego, Lucjana Orkisza i z pewnym opóźnieniem Eugeniusza Rybkę. Zaproponował dwa programy obserwacyjne: obserwacje gwiazd zmiennych zaćmieniowych (chodzi tu głównie o wyznaczenie momentów minimów jasności tych gwiazd) oraz obserwacje momentów zakryć gwiazd przez Księżyc. Banachiewicz od razu zaczął podejmować z powodzeniem starania o lepsze instrumenty astronomiczne. Zorganizował w 1922 r. również stację obserwacyjną na południowym szczycie (912 m n.p.m.) pasma Łysiny w Beskidzie Średnim koło Myślenic. Stację tę potem nazwano Lubomir. W tym miejscu odkryto dwie komety: w 1925 r. kometę odkrył Lucjan Orkisz, a w 1936 r. współodkrywcą komety był Władysław Lis. Także niezwłocznie Banachiewicz rozpoczął starania o utworzenie własnego wydawnictwa Obserwatorium Krakowskiego. Już w połowie 1920 r. ukazał się pierwszy numer Okólnika Obserwatorium Krakowskiego. W 1922 roku Banachiewicz zapoczątkował wydawanie Rocznika Astronomicznego Obserwatorium Krakowskiego, a w rok później Dodatku Międzynarodowego, który zawierał efemerydy (przewidywane momenty) minimów jasności gwiazd zmiennych zaćmieniowych. To ostatnie wydawnictwo publikowane jest do chwili obecnej. W 1925 r. z inicjatywy Banachiewicza zaczęło ukazywać się nowe czasopismo naukowe Acta Astronomica, które zyskało międzynarodowe uznanie (aktualnie jest kwartalnikiem i znajduje się na tzw. liście filadelfijskiej).

W 1922 roku Banachiewicz został członkiem rzeczywistym Polskiej Akademii Umiejętności w Krakowie, jak również członkiem zwyczajnym Towarzystwa Naukowego Warszawskiego.

Od chwili powstania w 1923 r. Polskiego Towarzystwa Astronomicznego przez 10 lat pełnił funkcję prezesa.

W 1923 roku pod kierunkiem Banachiewicza w ramach wyprawy geodezyjnej zapoczątkowano niwelację trasy Kraków–Warszawa. Do 1925 roku doprowadzono niwelację do Kielc, a potem prace przerwano. W 1926 roku zrealizowano wyprawę grawimetryczną na Pomorze i do Warszawy. W latach 1924–1926 Banachiewicz pełnił funkcję wiceprezesa Bałtyckiego Komitetu Geodezyjnego. W 1927 roku Banachiewicz zainicjował w Obserwatorium Krakowskim program obserwacji całkowitych zaćmień Słońca. Obserwacje te polegały na filmowaniu przebiegu zaćmienia wraz z rejestracją czasu, w celu dokładnego wyznaczenia początku i końca całkowitego zaćmienia. Obserwacje te prowadzono za pomocą przyrządów skonstruowanych według pomysłu Banachiewicza i nazywanych chronokinematografami. Przyrządy te wykorzystano podczas ekspedycji w latach: 1927 w Laponii szwedzkiej, 1932 w USA i w 1936 w Grecji, Syberii i Japonii. We wszystkich tych ekspedycjach brali udział astronomowie z obserwatoriów polskich na czele z Tadeuszem Banachiewiczem.

W 1928 roku Uniwersytet Warszawski nadał Tadeuszowi Banachiewiczowi doktorat *honoris causa* filozofii, a dziesięć lat później taki sam tytuł nadał mu Uniwersytet Poznański. Po kolejnych dziesięciu latach, w 1948 r. otrzymał doktorat *honoris causa* uniwersytetu w Sofii.

W wieku 49 lat, w roku 1931 r., Banachiewicz wstąpił w związek małżeński. Poślubił swą wieloletnią przyjaciółkę Laurę de Sołohub Dikyj, ukraińską malarkę i poetkę, wdowę po Mikołaju Dikyj. Ich małżeństwo pozostało bezdzietne.

W latach 1932–1938 Banachiewicz piastował funkcję wiceprezesa Międzynarodowej Unii Astronomicznej, a w 1938 r. wybrano go na prezesa Komisji Księżycowej, której przewodniczył do 1952 r. W 1939 roku został członkiem Akademii w Padwie i uzyskał nominację na członka korespondenta Royal Astronomical Society w Londynie.

Największe osiągnięcia Tadeusz Banachiewicz miał w dziedzinie teoretycznej, w szczególności w teorii stworzonego przez siebie rachunku krakowianowego. Również w zagadnieniach mechaniki nieba, przede wszystkim w zakresie teorii wyznaczania orbit, Banachiewicz miał poważne zasługi. Otóż gdy w 1930 roku Clyde Tombaugh odkrył Plutona, Banachiewicz za pomocą krakowianów wyznaczył elementy jego orbity, potwierdzając tym samym planetarny charakter Plutona pomimo bardzo skąpych danych obserwacyjnych. Przez pewien czas Banachiewicz zajmował się także zagadnieniami teoretycznymi libracji Księżyca. Dzięki krakowianom w 1927 r. Banachiewicz uzyskał ogólne wzory poligonometrii sferycznej.

Wybuch drugiej wojny światowej zastał Banachiewicza w Krakowie. W dniu 6.11.1939 r. został aresztowany wraz z innymi profesorami UJ i Akademii Górniczej (po wojnie nazwanej AGH) w czasie Sonderaktion Krakau i został wywieziony do obozu do Sachsenhausen koło Berlina, skąd wrócił 9.02.1940 r. Po powrocie do Krakowa dowiedział się o śmierci swojego brata, który zginął w obozie koncentracyjnym w Mauthausen. Bardzo dotknęła go ta wiadomość. Od zaraz podjął pracę w Obserwatorium Krakowskim, ale pod koniec 1941 r. został bezterminowo urlopowany, a jego miejsce zajął komisaryczny kierownik Obserwatorium doc. dr Kurt Walter. Jednak w ograniczonym zakresie Banachiewicz mógł kontynuować pracę naukową w obserwatorium, choć zmuszono go do opuszczenia mieszkania. Po zakończeniu wojny powrócił na stanowisko dyrektora obserwatorium, które piastował do dnia swojej śmierci 17.11.1954 r.

W latach 1945–1951 Tadeusz Banachiewicz był również profesorem i kierownikiem Katedry Geodezji Wyższej i Astronomii Wydziałów Politechnicznych AG, które były zaczątkiem Politechniki Krakowskiej.

Obserwatorium w Krakowie nie ucierpiało zanadto w czasie wojny, jednak stacja na Lubomirze została spalona 15.09.1944 r. w ramach pacyfikacji ziemi myślenickiej przez wojska niemieckie. W takiej sytuacji pojawił się problem znalezienia nowego miejsca nadającego się na obserwatorium astronomiczne. Po wielu staraniach w 1953 r. Banachiewicz pozyskał od władz wojskowych Fort Skała na Bielanach, odległy 10 km na zachód od centrum Krakowa, jako nową stację zamiejscową. W tym miejscu od 1964 r. znajduje się Obserwatorium Astronomiczne UJ.

W 1953 roku w wieku 71 lat, niespełna rok przed swoją śmiercią, uzyskał z mocy ustawy doktorat nauk matematycznych na UJ. Sprawę wyjaśnia następujące pismo sygnowane: CK-III-3b-2/53 z dnia 22.12.1953 r., znajdujące się w Archiwum UJ [21], które brzmi następująco:

<u>Z a ś w i a d c z e n i e</u>

Centralna Komisja Kwalifikacyjna dla Pracowników Nauki zaświadcza, że Obywatel BANACHIEWICZ Tadeusz, profesor zwyczajny na katedrze astronomii Wydziału Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie uzyskał stopień naukowy:

D O K T O R A   N A U K   M A T E M A T Y C Z N Y C H

z mocy art. 71 ust. 1 ustawy z dnia 15 grudnia 1951 r. o szkolnictwie wyższym i o pracownikach nauki (Dz. U. RP z 1952 r., Nr 6, poz. 38) oraz na zasadzie § 1 ust. 3 Rozporządzenia Rady Ministrów z dnia 26 kwietnia 1952 r. w sprawie warunków i trybu nadawania stopni naukowych (Dz. U. RP z 1952 r., Nr 24, poz. 164).

Przewodniczący
Centralnej Komisji Kwalifikacyjnej
dla Pracowników Nauki

A. Rapacki

Na dwa lata przed swoją śmiercią Banachiewicz został członkiem tytularnym Polskiej Akademii Nauk, która powstała w 1952 r. Rękopis dzieła swojego życia *Rachunek krakowianowy* Banachiewicz ukończył w 1949 r. Dzieło to wydrukowano w 1959 r. Zainteresowania naukowe Banachiewicza z lat 1945–1954 dotyczą głównie trzech zagadnień: 1. Teoria wyznaczania orbit, 2. Problemy libracji i figury Księżyca, 3. Zagadnienia rachunku krakowianowego. Tadeusz Banachiewicz jest autorem około 240 prac naukowych, dwóch książek oraz ponad 300 komunikatów naukowych [11], wyników obserwacji astronomicznych, telegraficznych doniesień naukowych, artykułów i komunikatów popularnonaukowych, polemik, recenzji, sprawozdań i prac redakcyjnych, które dotyczą: astronomii, matematyki, mechaniki, geodezji, geofizyki i innych dziedzin nauki. Oprócz prac naukowych Tadeusz Banachiewicz od 1932 r. do maja 1954 r. prowadził dziennik, który nazywał *Notatami codziennymi*. Lektura *Notat codziennych* rzuca światło na bardzo bogatą osobowość tego wybitnego człowieka. Notaty te ukazują bez ogródek jego relacje z innymi, w tym i z żoną (która miała raczej trudny charakter) i pokazują, jak zmagał się z wieloma problemami naukowymi, nad którymi właśnie pracował. Oddają sprawozdanie z działalności na arenie międzynarodowej i organizacyjnej jako dyrektora Obserwatorium Astronomicznego UJ. *Notaty codzienne* zawierają wiele uwag i komentarzy odnośnie spraw, które intrygowały Banachiewicza w danej chwili.

Profesor Tadeusz Banachiewicz zmarł 17.11.1954 r. na pneumonię jako powikłanie pooperacyjne. Schorzeniem pierwotnym był rak prostaty. W 1955 roku jego zwłoki zostały przeniesione i pochowane w krypcie wybitnych Polaków w Bazylice Ojców Paulinów Na Skałce w Krakowie, nieopodal Wawelu.

Pewne informacje biograficzne o Tadeuszu Banachiewiczu oraz informacje dotyczące historii astronomii w Polsce można znaleźć m.in. w następujących opracowaniach: [2, 3, 5, 10, 12 i 17].

Literatura

[1] Banachiewicz T., *Rachunek krakowianowy*, PWN, Warszawa 1959.

[2] Banachiewicz T., *Obserwatorium krakowskie w latach 1919–1927*, Kraków 1928.

[3] Banachiewicz T., *Maszyny do rachowania*, Rocznik Astronomiczny Obserwatorium Krakowskiego na rok 1923, Kraków 1923.

[4] Baran W., *Zastosowanie metod krakowianowych do wyrównywania dużych sieci geodezyjnych*, Zeszyty Naukowe AGH, Nr 999, Seria Geodezja, z. 86, Kraków 1986, 41-50.

[5] Bujakiewicz-Korońska R., Koroński J., *Krakowiany i inne idee matematyczne Tadeusza Banachiewicza*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Seria Matematyka–Fizyka, z. 76, 1996, 23-46.

[6] Bujakiewicz R., *Idee naukowe i organizacyjne Tadeusza Banachiewicza*, praca magisterska napisana pod kierunkiem prof. dr. hab. K. Rudnickiego w Zakładzie Astronomii Obserwacyjnej i Pozagalaktycznej Obserwatorium Astronomicznego UJ, Kraków 1985.

[7] D w o r a k T.Z., K r e i n e r J.M., *Tadeusz Banachiewicz – twórca krakowiaków*, Wydawnictwo Ossolineum PAN, Seria „Nauka dla wszystkich", Nr 387, Kraków 1985.

[8] D w o r a k T.Z., K r e i n e r J.M., M i e t e l s k i J., *Tadeusz Banachiewicz* (*1882– –1954*), *Złota Księga Wydziału Matematyki i Fizyki UJ*, pod red. B. Szafirskiego, Kraków 2000, 161-179.

[9] G a ź d z i c k i J., *Krakowiany w obliczeniach geodezyjnych*, Zeszyty Naukowe AGH, Nr 999, Seria Geodezja, z. 86, Kraków 1986, 13-16.

[10] G o ł ą b S., S*tudia z dziejów Katedr Wydziału Matematyki, Fizyki, Chemii Uniwersytetu Jagiellońskiego*, Wydanie Jubileuszowe UJ, Kraków 1964.

[11] K r e i n e r J.M., P i o t r o w s k a E., *Bibliografia prac Tadeusza Banachiewicza*, Polska Akademia Umiejętności, Prace Komisji Historii Nauki, Tom VII, Kraków 2005, 327-369.

[12] Ł o z a S., *Czy wiesz kto to jest?*, Warszawa 1938.

[13] M i l b e r t S., *Wkład profesora Tadeusza Banachiewicza w rozwój krakowskiego ośrodka geodezyjnego*, Zeszyty Naukowe AGH, Nr 999, Seria Geodezja, z. 86, Kraków 1986, 17-19.

[14] P e r e t i a t k o w i c z A., S o b i e s k i M., *Współczesna kultura polska*, Poznań 1932.

[15] R y b k a E., *Astronomia ogólna*, PWN, Warszawa 1983.

[16] S z a f r a n i e c R., *Prof. T. Banachiewicz na tle „Notat codziennych"*, informacja prywatna, Kraków 1985.

[17] W i t k o w s k i J., *Tadeusz Banachiewicz – uczony, nauczyciel, autor, wydawca, człowiek*, Warszawa 1969.

[18] W i t k o w s k i J., K o r d y l e w s k i K., *Pokłosie 50-letniej działalności naukowej Tadeusza Banachiewicza*, Kraków 1953.

[19] W i t k o w s k i J., *The life and work of Prof. Dr Tadeusz Banachiewicz*, Acta Astr. Ser. C, Vol. 5, 1955, 85-94.

[20] Zbiór protokołów z zebrań naukowych Obserwatorium Astronomicznego Uniwersytetu Jagiellońskiego z lat 1938–1959, Archiwum Instytutu Astronomii UJ.

[21] Zbiory Archiwum Uniwersytetu Jagiellońskiego, WF II 164.