

NABI IBADOV, JANUSZ KULEJEWSKI*

ROZMYTE MODELOWANIE CZASÓW WYKONANIA ROBÓT BUDOWLANYCH W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI

FUZZY MODELING OF CONSTRUCTION WORKS DURATION UNDER UNCERTAINTY

Streszczenie

Podczas realizacji budowy na czasy wykonania poszczególnych robót wpływają różne czynniki. Dlatego czasy wykonania robót oszacowane w etapie planowania budowy mają charakter niepewny. W artykule założono, że ta niepewność nie jest spowodowana brakiem wiedzy, lecz pokazuje pewien rozrzut możliwych czasów wykonania danej roboty. Przedstawiono niedeterministyczną koncepcję opisu niepewności oszacowań czasów wykonania robót, wykorzystującą teorię zbiorów rozmytych i liczb rozmytych. Opisano metodę rozmytego modelowania czasów wykonania robót budowlanych na podstawie niepewnych danych charakteryzujących warunki realizacji budowy. W opisanej metodzie wykorzystano wnioskowanie rozmyte oraz powiązanie pomiędzy rozkładem prawdopodobieństwa i rozkładem możliwości. Podano również przykład wykorzystania opisanej metody dla oszacowania rozmytego czasu wykonania roboty budowlanej w warunkach niepewności.

Słowa kluczowe: niepewność, czas wykonania roboty budowlanej, zbiory rozmyte, wnioskowanie rozmyte

Abstract

During execution of construction, durations of works are influenced by various factors. Therefore, durations of works estimated at the planning stage of construction are uncertain. The paper assumes that this uncertainty is not due to lack of knowledge, but represents a scattering of possible durations of the works. Non-deterministic concept of uncertainty modeling for estimation of works duration is presented, based upon the theory of fuzzy sets and fuzzy numbers. The method for fuzzy modeling of durations of works on the basis of uncertain data is presented. The method presented uses a fuzzy inference and the relation between the probability distribution and the possibility distribution. A numerical example of application of the method presented for estimating the fuzzy duration of construction work under uncertainty is also provided.

Keywords: uncertainty, construction work duration, fuzzy sets, fuzzy inference

Odpowiedzialność za poprawność językową artykułu ponoszą autorzy

* Dr inż. Nabi Ibadov, dr inż., Janusz Kulejewski, Zakład Inżynierii Produkcji i Zarządzania w Budownictwie, Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Warszawska.

Oznaczenia

X	– przestrzeń rozważań (zbiór nierozmyty)
$A \subseteq X$	– zbiór rozmyty w przestrzeni X
$\mu_A(x)$	– stopień (współczynnik) przynależności elementu $x \in X$ do zbioru rozmytego A
$R \subseteq X \times Y$	– relacja rozmyta pomiędzy zbiorami X i Y
$R \circ U$	– złożenie relacji rozmytych R i U
d	– możliwy czas wykonania roboty budowlanej (liczba zwykła)
d_n	– nominalny czas wykonania roboty budowlanej, wyznaczony na podstawie normatywu pracochłonności
z	– możliwe wydłużenie czasu wykonania roboty budowlanej
Z	– liczba rozmyta, modelująca rozrzut możliwych wydłużeń czasu wykonania roboty budowlanej w stosunku do nominalnego czasu wykonania
D	– liczba rozmyta, modelująca rozrzut możliwych czasów wykonania roboty budowlanej

1. Wstęp

Dane o warunkach realizacji budowy charakteryzują się zazwyczaj różnym poziomem niepewności, od poziomu mierzalnego, kiedy znane są warianty wielkości wyjściowych i prawdopodobieństwa ich wystąpienia, do poziomu niemierzalnego, kiedy nie są znane ani warianty wielkości wyjściowych, ani tym bardziej prawdopodobieństwa ich wystąpienia (całkowita niepewność). Wymienione poziomy niepewności opisuje się z zastosowaniem różnych teorii i metod. Do metod opisywania niepewności należą: miara probabilistyczna oparta na prawdopodobieństwie warunkowym oraz na twierdzeniu Bayesa, miara ufności oparta na teorii Dempstera – Shaffera oraz miara możliwości oparta na logice rozmytej.

Warto podkreślić, że niepewność nie oznacza kompletnego braku wiedzy technicznej lub organizatorskiej. Doświadczony menedżer (ekspert, planista) często ma wiedzę na temat zależności czasów wykonania poszczególnych robót od takich czynników, jak na przykład:

- niesprzyjające warunki pogodowe,
- zła organizacja robót na budowie,
- problemy z dostawą materiałów budowlanych,
- kwalifikacja robotników,
- umiejętności pracy w zespole,
- itd.

Trzeba brać pod uwagę, że wiedza eksperta ma jednak charakter przybliżony. Ponadto na etapie planowania budowy często zdarza się sytuacja, w której znane są możliwe konsekwencje różnych zdarzeń (korzystnych lub niekorzystnych z punktu widzenia przebiegu budowy), lecz nie są znane rozkłady prawdopodobieństw zajścia takich zdarzeń. Kiedy próbuje się oszacować czasy wykonania robót budowlanych, powstaje problem braku możliwości wykorzystania metod statystycznych i miary probabilistycznej do oceny skutków realizacji różnych scenariuszy jednoczesnego oddziaływania różnych czynników na prze-

bieg budowy. Warto rozpatrzenia jest w tym przypadku również wykorzystanie logiki rozmytej i teorii zbiorów rozmytych, specjalnie przeznaczonych do opisanie zjawisk niepodających się ścisłej ocenie ilościowej, [13]. W niniejszym artykule przedstawiono podstawy rozmytego modelowania niepewności, zasady modelowania czasów wykonania robót budowlanych z bezpośrednim zastosowaniem przybliżonej wiedzy eksperta oraz metodę oceny rozkładu możliwych czasów wykonania roboty budowlanej z wykorzystaniem wnioskowania przybliżonego i powiązania pomiędzy rozkładem prawdopodobieństwa i rozkładem możliwości. W rezultacie wykorzystania opisanej metody można łatwo wyznaczyć liczby rozmyte modelujące czasy wykonania robót w celu analizy sieci powiązań i sporządzenia rozmytego harmonogramu budowy.

2. Podstawy rozmytego modelowania niepewności

Zbiorem rozmytym A w pewnej niepustej przestrzeni \mathbf{X} nazywa się zbiór par:

$$A = \{(x, \mu_A(x)); x \in \mathbf{X}\} \quad (1)$$

gdzie:

$$\mu_A : \mathbf{X} \rightarrow [0,1] \quad (2)$$

jest funkcją przynależności zbioru rozmytego $A \subseteq \mathbf{X}$, [10]. Funkcja ta przypisuje każdemu elementowi $x \in \mathbf{X}$ jego stopień przynależności do zbioru rozmytego A . W zależności od wartości stopnia przynależności, można wyróżnić trzy przypadki:

- 1) $\mu_A(x) = 1$ oznacza pełną przynależność elementu x do zbioru rozmytego A , tzn. $x \in A$,
- 2) $\mu_A(x) = 0$ oznacza brak przynależności elementu x do zbioru rozmytego A , tzn. $x \notin A$,
- 3) $0 < \mu_A(x) < 1$ oznacza częściową przynależność elementu x do zbioru rozmytego A .

Operacje na zbiorach rozmytych, takie jak zawieranie (\subset), dopełnienie zbioru rozmytego, iloczynu (\cap) i sumy (\cup) dla dwóch zbiorów rozmytych A i B zapisuje się w następujący sposób, [2, 5, 11, 13]:

$$A \subset B \leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x), \forall x \in \mathbf{X} \quad (3)$$

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \forall x \in \mathbf{X} \quad (4)$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \forall x \in \mathbf{X} \quad (5)$$

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \forall x \in \mathbf{X} \quad (6)$$

Liczbą rozmytą jest zbiór rozmyty A , którego funkcja przynależności $\mu_A(x)$ jest przedziałami ciągła oraz spełnia następujące warunki [10]:

- a) $\sup \mu_A(x) = 1$, co znaczy, że zbiór rozmyty A jest normalny,
- b) dla dowolnych x_1, x_2 i x_3 , gdzie $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, zachodzi

$$\mu_A(x_2) \geq \min. \{ \mu_A(x_1), \mu_A(x_3) \}, \text{ co znaczy, że zbiór rozmyty } A \text{ jest wypukły.}$$

Spełnienie warunku wypukłości wskazuje, że funkcja przynależności zbioru rozmytego A ma tylko jedno maksimum. Spełnienie warunku normalności gwarantuje, że przynajmniej jeden z elementów zbioru rozmytego A posiada stopień przynależności równy 1,0. Te dwie właściwości sprawiają, że liczby rozmyte nadają się do modelowania nieprecyzyjnych określeń opisanych przez *zmiennie lingwistyczne*. Zmienna lingwistyczna jest stosowana, gdy ustalenie danej wartości za pomocą konkretnych liczb zwykłych jest trudne lub niemożliwe. Dziedziną zmiennej lingwistycznej jest zbiór pojęć wyrażonych nieprecyzyjnie za pomocą języka naturalnego, na przykład „około 10 dni” lub „mniej więcej 4 dni”.

Zgodnie z [10], α – *przekrojem* A_α zbioru rozmytego $A \subseteq \mathbf{X}$ nazywa się zbiór nierozmyty

$$A_\alpha = \{x \in \mathbf{X} : \mu_A(x) \geq \alpha\}, \forall \alpha \in [0, 1] \quad (7)$$

czyli zbiór określony przez funkcję charakterystyczną:

$$\chi_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{dla } \mu_A(x) \geq \alpha \\ 0 & \text{dla } \mu_A(x) < \alpha \end{cases} \quad (8)$$

gdzie $\mu_A(x)$ jest funkcją przynależności zbioru rozmytego A .

Relacją rozmytą $R \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ między dwoma niepustymi zbiorami \mathbf{X} i \mathbf{Y} nazywa się zbiór rozmyty określony na iloczynie kartezjańskim $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$:

$$R = \{((x, y), \mu_R(x, y))\}, \quad \forall x \in \mathbf{X}, \forall y \in \mathbf{Y} \quad (9)$$

gdzie

$$\mu_R : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \rightarrow [0, 1] \quad (10)$$

jest funkcją przynależności. Funkcja ta przypisuje każdej parze (x, y) , $x \in \mathbf{X}$, $y \in \mathbf{Y}$ jej stopień przynależności $\mu_R(x, y)$, interpretowany jako siła powiązania pomiędzy elementami $x \in \mathbf{X}$ i $y \in \mathbf{Y}$, [10].

Niech będą dane trzy zbiory nierozmyte \mathbf{X} , \mathbf{Y} i \mathbf{Z} oraz dwie relacje rozmyte: $R \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ z funkcją przynależności $\mu_R(x, y)$ oraz $U \subseteq \mathbf{Y} \times \mathbf{Z}$ z funkcją przynależności $\mu_U(y, z)$. Jeżeli zbiór \mathbf{Y} ma skończoną ilość elementów, to złożeniem relacji rozmytych $R \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ i $U \subseteq \mathbf{Y} \times \mathbf{Z}$ nazywa się relacją rozmytą $V = R \circ U$ w postaci dwuwymiarowego zbioru rozmytego o funkcji przynależności [10]

$$\mu_{R \circ U}(x, z) = \max_{y \in Y} \{ \min \{ \mu_R(x, y), \mu_U(y, z) \} \} \quad (11)$$

Inną bardzo ważną cechą zbiorów rozmytych, która decyduje o ich znaczeniu praktycznym, jest wnioskowanie. Ogólny zapis wnioskowania zwaną też *regułą rozmytą* ma następującą postać [11]

$$\text{JEŻELI przesłanka logiczna TO konkluzja} \quad (12)$$

Istotnym problemem jest sposób tworzenia właściwych reguł wnioskowania. Jednym z rozwiązań jest wykorzystanie wiedzy i doświadczenia **eksperta**. Wyciągnięcie rozmytych wniosków i przeobrażenie ich w ocenę ilościową prowadzi się na podstawie przyczynowo-skutkowych **reguł i relacji rozmytych**. Zakłada się, że A jest zbiorem rozmytym w przestrzeni przesłanek X , a B jest poziomem wpływu czynnika (na przykład **duży wpływ**) w przestrzeni konkluzji Y . Zbiór rozmyty opisujący poziom wpływu czynnika w przestrzeni X oznaczamy przez A , a zbiór rozmyty opisujący poziom prawdopodobieństwa przez B . Wtedy przyczynowo-skutkowa relacja rozmyta $A \rightarrow B$ przesłanki i konkluzji, odzwierciedlająca wiedzę eksperta, nazywa się **regułą rozmytą R**

$$R = A \rightarrow B \quad (13)$$

A więc proces uzyskania rozmytego wniosku B z wykorzystaniem wiedzy $A \rightarrow B$ oraz danych A można przedstawić jak niżej

$$B' = A' \circ R = A' \circ (A \rightarrow B) = \max \left\{ \min \left(\mu_{A'}(x), \mu_R(x, y) \right) \right\} \quad (14)$$

gdzie:

$\mu_{A'}(x)$ i $\mu_R(x, y)$ – odpowiednie funkcje przynależności zbiorów rozmytych A' i R .

3. Transformacja prawdopodobieństwo–możliwość

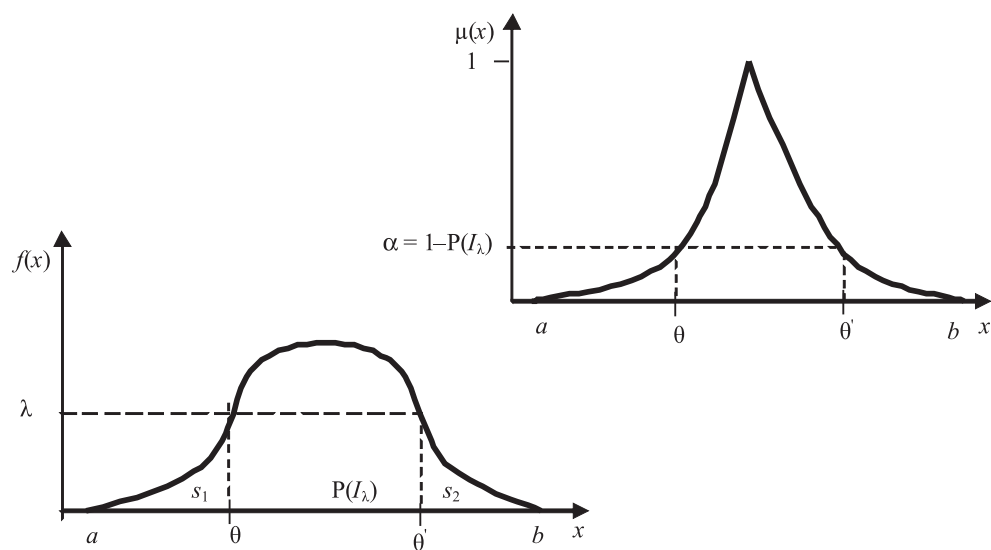
Istotę transformacji prawdopodobieństwo–możliwość według [3] przedstawiono na rys. 1.

Dokonując przekroju funkcji rozkładu prawdopodobieństwa $f(x)$ na poziomie λ , otrzymuje się przedział ufności $I_\lambda = \{x | f(x) \geq \lambda\}$ o granicy dolnej $\inf I_\lambda = \theta$ i o granicy górnej $\sup I_\lambda = \theta'$. Przedział ten zawiera prawdziwą wartość zmiennej x z prawdopodobieństwem

$$P(I_\lambda) = P(\theta \leq x \leq \theta') = \int_{\theta}^{\theta'} f(x) dx \quad (15)$$

określanym jako poziom ufności $(1 - \alpha)$. Przedziałowi ufności I_λ na wykresie funkcji gęstości prawdopodobieństwa odpowiada przedział A_α o granicy dolnej $\inf A_\alpha = \theta$ i o granicy górnej $\sup A_\alpha = \theta'$, uzyskany w wyniku przekroju wykresu funkcji rozkładu możliwości

$\mu(x)$ na poziomie $\alpha = 1 - P(I_\lambda)$. Należy zwrócić uwagę, że wartość α odpowiada sumie pól powierzchni obszarów s_1 i s_2 na rys. 1. Zgodnie z zależnością (7) przedział A_α zawiera wartości zmiennej x o współczynniku przynależności do zbioru A nie mniejszym niż α . Jeżeli $\alpha = \mu_A(x)$, to $1 - \alpha = P(A_\alpha)$. Oznacza to, że prawdopodobieństwo, iż rzeczywista wartość zmiennej x jest zawarta w przedziale A_α wynosi $(1 - \alpha)$. Dysponując znanym, ciągłym i jednomodalnym rozkładem prawdopodobieństwa zmiennej losowej, można wyznaczyć rozkład możliwości przyjmowania określonych wartości przez tę zmienną.



Rys. 1. Istota transformacji prawdopodobieństwo \rightarrow możliwość

Fig. 1. The essence of probability \rightarrow possibility transformation

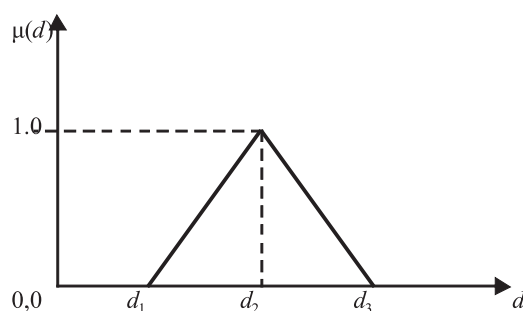
4. Modelowanie rozmytych czasów wykonania robót budowlanych z bezpośrednim wykorzystaniem wiedzy eksperta

Bezpośrednie wykorzystanie wiedzy eksperta prowadzi do modelowania niepewności oszacowań czasów wykonania robót za pomocą liczb rozmytych trapezowych lub trójkątnych, powstających w wyniku przypisania możliwym czasom d wykonania roboty stopni przynależności $\mu(d) \in [0, 1]$.

Rozkład trójkątny (rys. 2) wyrażający pojęcie „około d_2 ” przedstawia sytuację, w której rozmyty czas wykonania roboty przyjmuje dowolną wartość pomiędzy d_1 i d_3 , z których najbardziej możliwa jest wartość d_2 [6].

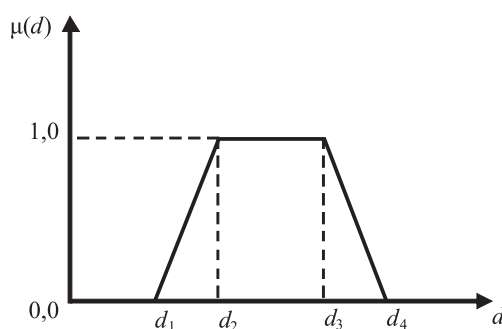
Należy podkreślić, że rozkład trójkątny możliwych wartości czasu wykonania roboty nie musi być symetryczny. Przy czym, im mniejsza jest rozpiętość przedziału $[d_1, d_3]$, tym jest mniejsza niepewność dotycząca rzeczywistego czasu wykonania roboty.

Trapezowy rozkład możliwych wartości czasu wykonania roboty (rys. 3) jest mniej precyzyjny niż rozkład trójkątny i wyraża pojęcie „w przybliżeniu pomiędzy d_2 i d_3 ” [6]. Najbardziej możliwy czas wykonania roboty zawiera się w tym przypadku pomiędzy d_2 i d_3 . Czasy krótsze niż d_1 i dłuższe niż d_4 nie są możliwe, a czasy zawarte pomiędzy d_1 i d_2 oraz pomiędzy d_3 i d_4 są mniej pewne od czasów zawartych pomiędzy d_2 i d_3 [4].



Rys. 2. Czas rozmyty „około d_2 ”

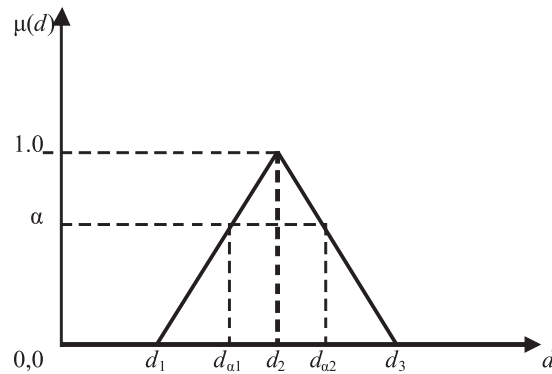
Fig. 2. Fuzzy duration „approximately d_2 ”



Rys. 3. Czas rozmyty „w przybliżeniu między d_2 i d_3 ”

Fig. 3. Fuzzy duration „approximately between d_2 and d_3 ”

Należy podkreślić, że w trakcie realizacji przedsięwzięcia zmniejsza się niepewność co do rzeczywistego czasu wykonania danej roboty. Można wtedy zmniejszyć zakres rozmytości modelowanych czasów. Zakres rozmytości można także zmniejszyć, wprowadzając określone poziomy niepewności odpowiadające poszczególnym α -przekrojom liczb trójkątnych lub trapezowych (rys. 4). Uzyskany w ten sposób przedział czasowy $[d_{\alpha 1}, d_{\alpha 2}]$ ma większą pewność niż przedział $[d_1, d_3]$. Należy podkreślić, iż wprowadzenie α -przekrojów umożliwia sprowadzenie operacji na liczbach rozmytych do rachunku przedziałowego. Poziomy poszczególnych α -przekrojów odpowiadają poszczególnym poziomom subiektywnie ocenianej niepewności dotyczącej czasu trwania danej roboty. Na przykład, przekrój na poziomie $\alpha = 0,3$ oznacza większą niepewność niż na poziomie $\alpha = 0,5$, a przekrój na poziomie $\alpha = 1,0$ oznacza całkowitą pewność oszacowania czasu trwania czynności.

Rys. 4. Czasy rozmyte trójkątne określone przez α -przekrojeFig. 4. Fuzzy triangular durations expressed by α -cuts

5. Metoda modelowania niepewności oszacowań czasów trwania czynności z wykorzystaniem rozmytego wnioskowania

Poniżej przedstawiono metodę modelowania niepewności oszacowań czasów trwania czynności z wykorzystaniem wnioskowania rozmytego na podstawie reguł i relacji rozmytych. W przedstawionej metodzie, niezbędne operacje na zbiorach rozmytych przeprowadza się zgodnie z zależnościami (5), (6), (9) i (11). Działanie metody zilustrowano przykładem liczbowym.

Zakłada się, że na podstawie normatywów pracochłonności ustalono nominalny czas wykonania pewnej roboty budowlanej. Należy określić rozkład możliwych czasów wykonania tej roboty z uwzględnieniem zakłóceń spowodowanych opadami atmosferycznymi i awariami sprzętu budowlanego. Wyciągnięcia rozmytych wniosków i przeobrażenia ich w ocenę ilościową można dokonać następująco:

1. Tworzy się trzy zbiory nierozmyte:
 - \mathbf{X} – zbiór ocen punktowych częstości oddziaływania czynników zakłócających,
 - \mathbf{Y} – zbiór ocen punktowych zakresu zakłóceń przebiegu roboty,
 - \mathbf{Z} – zbiór możliwych wartości wydłużeń czasu wykonania roboty.
2. Na podstawie wiedzy eksperta, ustala się:
 - przybliżoną zależność pomiędzy podatnością (wrażliwością) roboty na działanie danego czynnika zakłócającego występującego z określoną częstością, a zakresem zakłóceń przebiegu tej roboty,
 - przybliżoną zależność pomiędzy zakresem zakłóceń i wydłużeniem czasu wykonania roboty.
3. Tworzy się relację rozmytą $R \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, przedstawiającą siłę powiązania pomiędzy częstością oddziaływania czynników zakłócających i zakresem zakłóceń przebiegu roboty.
4. Tworzy się relację rozmytą $U \subseteq \mathbf{Y} \times \mathbf{Z}$, przedstawiającą siłę powiązania pomiędzy zakresem zakłóceń przebiegu roboty i wydłużeniem jej czasu wykonania.

5. W wyniku złożenia relacji rozmytych $R \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ i $U \subseteq \mathbf{Y} \times \mathbf{Z}$ tworzy się dwuwymiarowy zbiór rozmyty $V = R \circ U$ przedstawiający siłę powiązania pomiędzy częstością oddziaływania czynników zakłócających i wydłużeniem czasu wykonania roboty.
6. Na podstawie złożenia relacji rozmytych $R \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ i $U \subseteq \mathbf{Y} \times \mathbf{Z}$ ustala się parametry rozkładu prawdopodobieństwa wydłużenia czasu wykonania roboty.
7. Na podstawie rozkładu prawdopodobieństwa wydłużenia czasu wykonania roboty ustala się liczbę rozmytą (na przykład, trójkątną lub trapezową) modelującą rozrzut możliwych wydłużeń czasów wykonania roboty.

Na przykład przewiduje się, że przyczyną zakłócenia przebiegu roboty mogą być opady atmosferyczne lub awarie sprzętu budowlanego. Ocenia się, że:

- wrażliwość roboty na zakłócenia przebiegu z powodu wystąpienia opadów atmosferycznych jest „średnia”, a z powodu awarii sprzętu budowlanego – „bardzo duża”,
- częstość występowania opadów atmosferycznych będzie „średnia”, a częstość występowania awarii sprzętu – „duża”.

Wykorzystując wiedzę eksperta, ustala się reguły mające zastosowanie do oceny zakresu zakłóceń przebiegu roboty na podstawie oceny jej podatności na spowolnienie postępu z powodu oddziaływania wybranych czynników z określoną częstością. Niech reguły odpowiednie dla rozpatrywanego przypadku mają postać:

R_1^I : **JEŻELI** wrażliwość roboty na zakłócenia z powodu wystąpienia opadów atmosferycznych jest średnia

I częstość występowania opadów atmosferycznych będzie średnia

TO zakres zakłóceń przebiegu roboty będzie duży.

R_2^I : **JEŻELI** wrażliwość roboty na spowolnienie postępu z powodu wystąpienia awarii sprzętu budowlanego jest bardzo duża

I częstość występowania awarii sprzętu budowlanego będzie duża

TO zakres zakłóceń przebiegu robót będzie bardzo duży.

Następnie ustala się zależność pomiędzy oceną zakresu zakłóceń przebiegu roboty a wydłużeniem czasu jej wykonania. Niech reguły odpowiednie dla rozpatrywanego przypadku mają postać:

R_1^{II} : **JEŻELI** zakres zakłóceń przebiegu roboty będzie duży

TO wydłużenie czasu wykonania roboty będzie duże.

R_2^{II} : **JEŻELI** zakres zakłóceń przebiegu roboty będzie bardzo duży

TO wydłużenie czasu wykonania roboty będzie bardzo duże.

Przykładowe wartości funkcji przynależności formułowanych ocen do poszczególnych zbiorów rozmytych podano w tabelach 1 i 2. Tworzenie relacji rozmytej $R \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ na podstawie reguł R_1^I i R_2^I przebiega w następującej kolejności:

- a) najpierw z wykorzystaniem zależności (5) i (9) tworzy się relację rozmytą $R_1 \subseteq X_1 \times Y_1$,

gdzie:

X_1 – podzbiór ocen punktowych częstości występowania opadów atmosferycznych, określanej jako: średnia

Y_1 – podzbiór ocen punktowych zakresu zakłóceń przebiegu roboty, określanej jako: duży

- b) następnie z wykorzystaniem zależności (5) i (9) tworzy się relację rozmytą $R_2 \subseteq X_2 \times Y_2$, gdzie:

X_2 – podzbiór ocen punktowych częstości występowania awarii sprzętu budowlanego, określanej jako: duża

Y_2 – podzbiór ocen punktowych zakresu zakłóceń przebiegu roboty, określanym jako: bardzo duży

- c) łącząc relacje rozmyte $R_1 \subseteq X_1 \times Y_1$ i $R_2 \subseteq X_2 \times Y_2$ z wykorzystaniem zależności (6), otrzymuje się relację rozmytą $R = R_1 \cup R_2$.

Przebieg tworzenia relacji rozmytej relacji $R = R_1 \cup R_2$ przedstawiono w tab. 3, 4 i 5.

Podobnie przebiega tworzenie relacji rozmytej $U \subseteq Y \times Z$ na podstawie reguł R^{II}_1 i R^{II}_2 :

- a) najpierw, z wykorzystaniem zależności (5) i (9) tworzy się relację rozmytą $U_1 \subseteq Y_1 \times Z_1$, gdzie:

Y_1 – podzbiór ocen punktowych zakresu zakłóceń przebiegu roboty, określanego jako: duży

Z_1 – podzbiór wartości wydłużeń czasu wykonania roboty, określanym jako: duże

- b) następnie, z wykorzystaniem zależności (5) i (9) tworzy się relację rozmytą $U_2 \subseteq Y_2 \times Z_2$, gdzie:

Y_2 – podzbiór ocen punktowych zakresu zakłóceń przebiegu roboty, określanego jako: bardzo duże

Z_2 – podzbiór wartości wydłużeń czasu wykonania roboty, określanym jako: bardzo duże

- c) łącząc relacje rozmyte $U_1 \subseteq Y_1 \times Z_1$ i $U_2 \subseteq Y_2 \times Z_2$ z wykorzystaniem zależności (6), otrzymuje się relację rozmytą $U = U_1 \cup U_2$.

Wynik złożenia relacji rozmytych R i U przeprowadzonego z wykorzystaniem zależności (11) przedstawiono w tab. 6 w postaci dwuwymiarowego zbioru rozmytego $V = R \circ U$. Złożenie relacji rozmytych R i U umożliwia bezpośrednie powiązanie oceny wydłużenia czasu wykonania robót budowlanych z oceną częstości oddziaływania poszczególnych czynników zakłócających.

Tabela 1

Przykładowe wartości funkcji przynależności oceny punktowej zmiennych w przesłankach reguł wnioskowania rozmytego

Ocena punktowa: – wrażliwości robót budowlanych na zakłócenia – częstości występowania czynników zakłócających – zakresu zakłóceń przebiegu roboty	Współczynniki przynależności oceny punktowej do zbioru wartości określanym jako:		
	średnia	duża	bardzo duża
0,0	0	0	0
0,1	0	0	0
0,2	0	0	0
0,3	0,1	0	0
0,4	0,7	0	0
0,5	1,0	0	0
0,6	0,7	0,5	0
0,7	0,1	0,9	0
0,8	0	0,9	0,1
0,9	0	0,5	0,7
1,0	0	0	1,0

Tabela 2

Przykładowe wartości współczynników przynależności możliwych wydłużeń czasu wykonania roboty, spowodowanych oddziaływaniem czynników zakłócających

Możliwe wydłużenie czasu wykonania roboty, w dniach roboczych	Współczynniki przynależności wydłużenia czasu wykonania roboty do zbioru wartości określanych jako:	
	duża	bardzo duża
6	0,5	0
7	0,9	0
8	0,9	0,1
9	0,5	0,7
10	0	1,0

Tabela 3

Macierz wartości współczynników przynależności do relacji rozmytej $R_1 \subseteq X_1 \times Y_1$

Podzbiór X_1		Podzbiór Y_1									
		ocena punktowa zakresu zakłóceń przebiegu roboty z powodu określonej częstości oddziaływania danego czynnika, y									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Ocena punktowa częstości oddziaływania danego czynnika, x	0,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,3	0	0	0	0	0	0,1	0,1	0,1	0,1	0
	0,4	0	0	0	0	0	0,5	0,7	0,7	0,5	0
	0,5	0	0	0	0	0	0,5	0,9	0,9	0,5	0
	0,6	0	0	0	0	0	0,5	0,7	0,7	0,5	0
	0,7	0	0	0	0	0	0,1	0,1	0,1	0,1	0
	0,8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 4

Macierz wartości współczynników przynależności do relacji rozmytej $R_2 \subseteq X_2 \times Y_2$

Podzbiór X_2		Podzbiór Y_2									
		Ocena punktowa zakresu zakłóceń przebiegu roboty z powodu określonej częstości oddziaływania danego czynnika, y									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Ocena punktowa częstości oddziaływania danego czynnika, x	0,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,6	0	0	0	0	0	0	0	0,1	0,5	0,5
	0,7	0	0	0	0	0	0	0	0,1	0,7	0,9
	0,8	0	0	0	0	0	0	0	0,1	0,7	0,9
	0,9	0	0	0	0	0	0	0	0,1	0,5	0,5
1,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

Tabela 5

Macierz wartości współczynników przynależności do relacji rozmytej $R = R_1 \cup R_2$

Zbiór X		Zbiór Y									
		ocena punktowa zakresu zakłóceń przebiegu roboty z powodu określonej częstości oddziaływania danego czynnika, y									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Ocena punktowa częstości oddziaływania danego czynnika, x	0,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,3	0	0	0	0	0	0,1	0,1	0,1	0,1	0
	0,4	0	0	0	0	0	0,5	0,7	0,7	0,5	0
	0,5	0	0	0	0	0	0,5	0,9	0,9	0,5	0
	0,6	0	0	0	0	0	0,5	0,7	0,7	0,5	0,5
	0,7	0	0	0	0	0	0,1	0,1	0,1	0,7	0,9
	0,8	0	0	0	0	0	0	0	0,1	0,7	0,9
	0,9	0	0	0	0	0	0	0	0,1	0,5	0,5
1,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

Tabela 6

Macierz wartości współczynników przynależności do dwuwymiarowego zbioru rozmytego
 $V=R \circ U$, powstającego w wyniku złożenia relacji rozmytych $R \subseteq X \times Y$ i $U \subseteq Y \times Z$

Zbiór X: ocena punktowa częstości wystąpienia zakłóceń, spowodowanych działaniem danego czynnika, x	Zbiór Z: możliwe wydłużenie czasu wykonania roboty, z w dniach roboczych				
	$z_1 = 6$	$z_2 = 7$	$z_3 = 8$	$z_4 = 9$	$z_5 = 10$
0,0	0	0	0	0	0
0,1	0	0	0	0	0
0,2	0	0	0	0	0
0,3	0	0	0	0	0
0,4	0	0	0	0	0
0,5	0	0	0	0	0
0,6	0,5	0,7	0,7	0,5	0,5
0,7	0,5	0,7	0,5	0,7	0,9
0,8	0,5	0,5	0,5	0,7	0,9
0,9	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
1,0	0	0	0	0	0

Bezpośrednie wykorzystanie danych z tab. 6 w celu ustalenia rozkładu możliwych wydłużeń czasu wykonania roboty prowadzi do ustalenia zbioru rozmytego, tworzonego przez pary $\{z_k, \mu_z(z_k)\}$ uporządkowane jak niżej (k oznacza indeks kolejnej rozpatrywanej wartości możliwego wydłużenia czasu wykonania roboty)

$$Z = \frac{6}{0,5} + \frac{7}{0,7} + \frac{8}{0,7} + \frac{9}{0,7} + \frac{10}{0,9} \quad (16)$$

Tak utworzony rozkład możliwych wydłużeń czasu wykonania roboty jest jednak mało przydatny do obliczeń przeprowadzanych do opracowania harmonogramu budowy. W literaturze ([1, 8 i 9]) przedstawia się zróżnicowane postępowanie w celu ustalenia przydatniejszego rozkładu możliwych wydłużeń czasu wykonania roboty. Myślą przewodnią jest wykorzystanie dwuwymiarowego zbioru rozmytego $V = R \circ U$ do wyznaczenia parametrów rozkładu prawdopodobieństwa wydłużenia czasu wykonania roboty (wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego). W macierzy wartości współczynników przynależności do dwuwymiarowego zbioru rozmytego $V = R \circ U$ identyfikuje się wiersz, dla którego iloczyn sumy wartości współczynników przynależności $\mu_{R \circ U}(x, z_k)$ i oceny punktowej częstości wystąpienia zakłóceń osiąga maksimum. Następnie na podstawie wartości współczynników przynależności $\mu_{R \circ U}(x, z_k)$ zawartych w tym wierszu wyznacza się:

- 1) prawdopodobieństwo, że wydłużenie czasu wykonania roboty przyjmie określoną wartość z_k

$$P(z = z_k) = \frac{\mu_{R \circ U}(x, z_k)}{\sum_{k=1}^K \mu_{R \circ U}(x, z_k)} \quad (17)$$

2) oczekiwane wydłużenie czasu wykonania roboty

$$E(z) = \sum_{k=1}^K \{(z_k) \cdot P(z = z_k)\} \quad (18)$$

3) odchylenie standardowe wydłużenia czasu wykonania roboty:

$$\sigma_z = \sqrt{\sum_{k=1}^K \{(z_k)^2 \cdot P(z = z_k)\} - E^2(z)} \quad (19)$$

W przedstawionym przykładzie można ustalić, że iloczyn sumy wartości współczynników przynależności $\mu_{R \circ U}(x, z)$ i oceny punktowej częstości wystąpienia zakłóceń osiąga maksimum dla danych zawartych w dziewiątym wierszu tab. 6. Wykorzystując zależności (17), (18) i (19), otrzymuje się:

$$P(z = 6) = 0,5/3,1 = 0,16,$$

$$P(z = 7) = 0,5/3,1 = 0,16,$$

$$P(z = 8) = 0,5/3,1 = 0,16,$$

$$P(z = 9) = 0,7/3,1 = 0,23,$$

$$P(z = 10) = 0,9/3,1 = 0,29,$$

$$E(z) = 8,33 \text{ dnia},$$

$$\sigma_z = 1,44 \text{ dnia}.$$

W pracach [1] i [9] porzeczano na wyznaczeniu parametrów dyskretnego rozkładu prawdopodobieństwa wydłużenia czasu wykonania roboty. Natomiast w pracy [8], wykorzystując zasadę transformacji prawdopodobieństwo–możliwość według [3], wyznaczono liczbę rozmytą modelującą rozrzut możliwych wydłużeń czasów wykonania roboty. Wykorzystanie zasady transformacji prawdopodobieństwo–możliwość wymaga przyjęcia założenia dotyczącego kształtu ciągłej i symetrycznej funkcji gęstości prawdopodobieństwa wydłużenia czasu wykonania roboty. W pracy [8] przyjęto założenie, że funkcja gęstości prawdopodobieństwa ma kształt krzywej gaussowskiej. W warunkach niepewności decyzja o przyjęciu określonej funkcji gęstości prawdopodobieństwa wydłużenia czasu wykonania roboty jest jednak podejmowana przez eksperta intuicyjnie, a nie na podstawie analizy danych statystycznych. Przyjęcie gaussowskiej funkcji gęstości prawdopodobieństwa komplikuje przeprowadzanie zamiany rozkładu prawdopodobieństwa wydłużenia czasu wykonania roboty w rozkład możliwości wydłużenia czasu wykonania roboty i prowadzi do uzyskania liczby rozmytej o nieliniowej funkcji przynależności (patrz rys. 1). Dlatego,

w niniejszym artykule przyjęto, że złożenie relacji rozmytych $R \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ i $U \subseteq \mathbf{Y} \times \mathbf{Z}$ można wykorzystać alternatywnie, do wyznaczenia parametrów trójkątnego lub jednostajnego rozkładu prawdopodobieństwa czasu wykonania roboty. Rozkład trójkątny można bezpośrednio wykorzystać do wyznaczenia uporządkowanej trójki liczb zwykłych, tworzących trójkątną liczbę rozmytą modelującą wydłużenie czasu wykonania roboty w warunkach niepewności. Natomiast przyjęcie rozkładu jednostajnego umożliwi wyznaczenie ciągłej i liniowej funkcji przynależności liczby rozmytej modelującej wydłużenie czasu wykonania roboty.

W przypadku przyjęcia rozkładu trójkątnego można wykazać, że dolne i górne ograniczenie wydłużenia czasu wykonania roboty wynosi odpowiednio $z_{\min.} = E(z) - \sqrt{6} \cdot \sigma_z$ oraz $z_{\max} = E(z) + \sqrt{6} \cdot \sigma_z$. Znając dolne i górne ograniczenie wydłużenia czasu wykonania roboty, rozkład możliwych wydłużeń można opisać z wykorzystaniem trójkątnej liczby rozmytej

$$Z = \{z_{\min.}, E(z), z_{\max}\} \quad (20)$$

gdzie:

$z_{\min.}$ – dolna granica możliwego wydłużenia nominalnego czasu wykonania roboty,

$$z_{\min.} = E(z) - \sqrt{6} \cdot \sigma_z \quad (21)$$

$z_{\max.}$ – górna granica możliwego wydłużenia nominalnego czasu wykonania roboty,

$$z_{\max} = E(z) + \sqrt{6} \cdot \sigma_z \quad (22)$$

$E(z)$ – oczekiwane wydłużenie czasu wykonania roboty, wyznaczone z wykorzystaniem zależności (18),

σ_z – odchylenie standardowe wydłużenia czasu wykonania roboty, wyznaczone z wykorzystaniem zależności (19).

Na podstawie zależności (20), rozkład możliwych wydłużeń czasu wykonania roboty można opisać z wykorzystaniem trójkątnej liczby rozmytej $Z = (4,8, 8,33, 11,86)$ lub po zaokrągleniu: $Z = (5, 8, 12)$.

W przypadku przyjęcia rozkładu jednostajnego, dolne i górne ograniczenie wydłużenia czasu wykonania roboty można wyznaczyć na podstawie następujących zależności

$$E(z) = \frac{z_{\min.} + z_{\max}}{2} \quad (23)$$

$$\sigma_z = \frac{(z_{\max} - z_{\min.})^2}{12} \quad (24)$$

Dla $E(z) = 8,33$ dnia i $\sigma_z = 1,44$ dnia, otrzymuje się $z_{\min.} = 6,25$ dnia oraz $z_{\max} = 10,41$ dnia. Liczbę rozmytą modelującą wydłużenie czasu wykonania roboty można przedstawić

w postaci uporządkowanej trójki liczb zwykłych $Z = (6,25, 8,33, 10,41)$. Funkcja przynależności liczby rozmytej, wyznaczona z zasady transformacji prawdopodobieństwo-możliwość, ma postać:

$$\mu(z) = \begin{cases} \frac{z - 6,25}{8,33 - 6,25} & \text{dla } 6,25 < z \leq 8,33, \\ \frac{10,41 - z}{10,41 - 8,33} & \text{dla } 8,33 < z \leq 10,41 \\ 0 & \text{w innym przypadku} \end{cases}$$

Rozmyty czas wykonania roboty można wyznaczyć jako sumę jej nominalnego czasu wykonania d_n i trójkątnej liczby rozmytej Z , modelującej rozkład możliwych wydłużeń czasu wykonania tej roboty. Zgodnie z zasadami arytmetyki rozmytej wynikiem dodawania liczby zwykłej d_n i trójkątnej liczby rozmytej Z jest trójkątna liczba rozmyta:

$$D = (d_n + z_{\min}, d_n + E(z), d_n + z_{\max}) \quad (25)$$

Tak wyznaczoną liczbę rozmytą D , modelującą niepewność oszacowania czasu wykonania roboty, można wykorzystać na potrzeby analizy sieci zależności oraz harmonogramowania rozmytego.

6. Podsumowanie

Teoria zbiorów rozmytych jest dobrym i łatwym w stosowaniu narzędziem do opisanego niepewności. Zastosowanie jej elementów, takich jak rozmyte liczby, zmienne lingwistyczne i α -przekroje, pozwala w prosty sposób modelować czasy trwania robót budowlanych. Inną pozytywną cechą zbiorów rozmytych jest zastosowanie relacji rozmytych umożliwiających uwzględnienie skutków negatywnego oddziaływania różnych czynników. W niniejszym artykule opisano metodę rozmytego modelowania wpływu przewidywanych zakłóceń na czas wykonania roboty budowlanej w przypadku niepewności danych charakteryzujących warunki budowy. Wykorzystanie wnioskowania rozmytego i relacji rozmytych pozwala na uwzględnienie związków pomiędzy możliwym wydłużeniem czasu trwania danej roboty a jej wrażliwością na działanie określonych czynników zakłócających, częstością oddziaływania poszczególnych czynników oraz subiektywnie ocenianym wpływem zakłócenia na czas wykonania roboty. Dodatkową zaletą metody jest ujawnienie procesu wnioskowania przybliżonego, prowadzącego do wyznaczenia liczby rozmytej modelującej niepewność oszacowania czasu wykonania roboty. Przedstawiony przykład liczbowy wskazuje na przydatność metody do szacowania czasów wykonania robót na podstawie niepewnych danych charakteryzujących warunki budowy. Przedstawiona metoda może być także przydatna dla aktualizacji harmonogramu w czasie realizacji budowy.

Literatura

- [1] Ayyub B. M., Haldar A., *Project scheduling using fuzzy set concepts*, Journal of Construction Engineering and Management, 110(2), 1984, 189-204.
- [2] Czogała E., Pedrycz W., *Elementy i metody teorii zbiorów rozmytych*, Wyd. PWN, Warszawa 1985.
- [3] Dubois D., Prade H., *Fuzzy sets and statistical data*, European Journal of Operational Research, 25, 1986, 256-345.
- [4] Ibadov N., *Wykorzystanie teorii zbiorów rozmytych do podejmowania decyzji w budownictwie*, Konferencja naukowo-techniczna: „Sterowanie procesami inwestycyjnymi w budownictwie wodnym i morskim”, Szczecin–Międzyzdroje, 17–20 czerwca 1999.
- [5] Kasprzyk J., *Zbiory rozmyte w analizie systemowej*, Wyd. PWN, Warszawa 1986.
- [6] Lorterapong P., Moselhi O., *Project-network analysis using fuzzy sets theory*, Journal of Construction Engineering and Management, ASCE, 122(4), 1996, 308-318.
- [7] Noworol Cz., *Analiza skupień w badaniach empirycznych. Rozmyte modele hierarchiczne*, Wyd. PWN, Warszawa 1989.
- [8] Oliveros A.V.O., Fayek A.R., *Fuzzy logic approach for activity delay analysis and schedule updating*, Journal of Construction Engineering and Management, ASCE, 131(1), 2005, 42-51.
- [9] Pan N.F., Hadipriono F.C., Whitlatch E., *A fuzzy reasoning knowledge-based system for assessing rain impact in highway construction scheduling: Part I. Analytical model*, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 16, 2005, 157-167.
- [10] Rutkowska D., Piliński M., Rutkowski L., *Sieci neuronowe, algorytmy genetyczne i systemy rozmyte*, Wyd. PWN, Warszawa–Łódź 1997.
- [11] Rutkowski L., *Metody i techniki sztucznej inteligencji*, PWN, Warszawa 2006.
- [12] Yager R.R., Filev D.P., *Podstawy modelowania i sterowania rozmytego*, Wyd. WNT, Warszawa 1995.
- [13] Zadeh L.A., *Fuzzy Sets*, Information and Control, vol. 8, 1965.