

JANUSZ KULEJEWSKI, NABI IBADOV\*

## HARMONOGRAMOWANIE BUDOWY Z UWZGLĘDNIENIEM ROZMYTYCH CZASÓW WYKONANIA ROBÓT

---

### SCHEDULING OF CONSTRUCTION PROJECT WITH FUZZY PROCESSING TIMES

---

#### Streszczenie

W artykule przedstawiono metodę harmonogramowania budowy według kryterium niezawodności w przypadku rozmytego modelowania czasów wykonania robót i ograniczeń zasobowych. Jako kryterium niezawodności harmonogramu rozmytego przyjęto prawdopodobieństwo realizacji budowy w wymaganym czasie z uwzględnieniem zadanego prawdopodobieństwa dotrzymania rozmytych ograniczeń zasobowych. Dla opracowania harmonogramu spełniającego ustalone kryterium niezawodności wykorzystano algorytm genetyczny.

*Słowa kluczowe: harmonogramowanie rozmyte, niezawodność harmonogramu*

#### Abstract

This paper presents a method for scheduling of construction works with the criterion of schedule reliability in the case of fuzzy modeling of processing times and resource restrictions. As a criterion for the reliability of fuzzy schedule, the likelihood of meeting the required execution time has been adopted, taking into account the required likelihood of meeting the flexible limit of resources availability. Fuzzy schedule meeting specified reliability criterion is generated using a genetic algorithm.

*Keywords: fuzzy scheduling, schedule reliability*

---

\* Dr inż. Janusz Kulejewski, dr inż. Nabi Ibadov, Zakład Inżynierii Produkcji i Zarządzania w Budownictwie, Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Warszawska.

### Oznaczenia

- $\tilde{D}_j$  – liczba rozmyta, modelująca nieprecyzyjnie określony czas wykonania roboty  $j$
- $\tilde{E}S_j$  – najwcześniejszy rozmyty termin rozpoczęcia roboty  $j$
- $\tilde{E}F_j$  – najwcześniejszy rozmyty termin zakończenia roboty  $j$
- $\tilde{S}_j$  – planowany rozmyty termin rozpoczęcia roboty  $j$
- $\tilde{F}_j$  – planowany rozmyty termin zakończenia roboty  $j$
- $\tilde{T}$  – planowany rozmyty czas wykonania robót
- $T_d$  – wymagany czas wykonania robót
- $\tilde{R}_k$  – liczba rozmyta, modelująca nieprecyzyjnie sformułowany limit dostępności  $k$ -tego zasobu odnawialnego
- $\tilde{r}_k$  – liczba rozmyta, modelująca nieprecyzyjnie oszacowane zużycie  $k$ -tego zasobu odnawialnego w kolejnym dniu budowy
- $\tilde{P}_{k_{gr}}$  – wymagane prawdopodobieństwo dotrzymania ograniczenia dostępności  $k$ -tego zasobu odnawialnego

## 1. Wstęp

Niepewność warunków realizacji budowy powoduje szybką dezaktualizację harmonogramu sporządzonego przez wykonawcę na podstawie deterministycznie ustalonych czasów wykonania robót. Poszukuje się zatem metod harmonogramowania budowy zapewniających stabilność zaplanowanego terminu jej zakończenia, pomimo możliwości wystąpienia różnorodnych zakłóceń przebiegu robót. Do takich metod należą te wykorzystujące rozmyte modelowanie niejednoznacznych i nieprecyzyjnie określonych relacji pomiędzy intensywnością zakłóceń i ich skutkami w postaci wydłużeń czasów wykonania robót.

Dla rozwiązywania zagadnień rozmytego harmonogramowania przedsięwzięć opracowano już pewien zbiór metod będących odpowiednikami metod harmonogramowania deterministycznego. Na przykład w [13] przedstawiono rozmyty odpowiednik metody podziału i ograniczeń, a w [4, 11] oraz w [14] zaprezentowano schematy równoległe generowania harmonogramu rozmytego. W zakresie wykorzystania metod metaheurystycznych dla potrzeb generowania harmonogramu rozmytego w [5] autorzy przedstawiają wykorzystanie symulowanego wyżarzania, a w [7, 11] i [14] pokazują wykorzystanie algorytmu genetycznego. W wyżej wskazanych pracach przyjmowano założenie, że ograniczenia dostępności zasobów odnawialnych dla realizacji przedsięwzięcia są precyzyjnie określone. W przypadku przedsięwzięcia budowlanego takie założenie jest rzadko spełnione. Natomiast dla oceny dotrzymania wymaganego czasu realizacji projektu wykorzystywano miarę posybilistyczną. Takie działanie prowadzi do wyznaczenia dolnego (pesymistycznego) i górnego (optymistycznego) ograniczenia prawdopodobieństwa dotrzymania wymaganego czasu realizacji projektu (2). W źródłach literaturowych przedstawia się metody oceny terminowości realizacji projektu będące kompromisem pomiędzy oceną pesymistyczną

i oceną optymistyczną dotrzymania wymaganego czasu realizacji z uwzględnieniem kryterium Hurwicza (por. [13] i [14]).

W artykule przedstawiono metodę harmonogramowania budowy z uwzględnieniem kryterium niezawodności harmonogramu w przypadku, gdy czasy wykonania robót oraz ograniczenia dostępności zasobów odnawialnych nie są precyzyjnie określone. Jako miarę niezawodności harmonogramu przyjęto prawdopodobieństwo zrealizowania robót w wymaganym czasie. Jednocześnie należy uwzględnić wymagane prawdopodobieństwo dotrzymania rozmytych ograniczeń dostępności zasobów odnawialnych. Przedstawiono metodę oceny prawdopodobieństw dotrzymania ograniczeń czasowych i zasobowych. Pokazano również schemat rozwiązywania rozpatrywanego zagadnienia z wykorzystaniem algorytmu genetycznego.

## 2. Podstawy rozmytego modelowania czasu wykonania roboty budowlanej

### 2.1. Zbiory rozmyte i liczby rozmyte

Zbiorem rozmytym  $\tilde{D}$  nazywa się zbiór uporządkowanych par  $\tilde{D} = \{(x, \mu_{\tilde{D}}(x)); x \in X\}$ , gdzie  $x$  jest elementem w pewnej przestrzeni rozważań  $X$ , a  $\mu_{\tilde{D}} : X \rightarrow [0, 1]$  jest funkcją przynależności przypisującą każdemu elementowi  $x \in X$  jego stopień przynależności do zbioru rozmytego  $\tilde{D}$  ([12]). W rozpatrywanym przypadku przestrzenią (obszarem) rozważań jest zbiór wartości czasów wykonania pewnej roboty budowlanej. Zbiór rozmyty  $\tilde{D}$  zawiera nieprecyzyjnie określone wartości czasów wykonania tej roboty, na przykład: „średni”, „około 5 zmian roboczych” lub „od około 4 do około 6 zmian roboczych”. Każde z takich nieprecyzyjnych określeń jest zdefiniowane dla pewnego zamkniętego przedziału liczbowego.

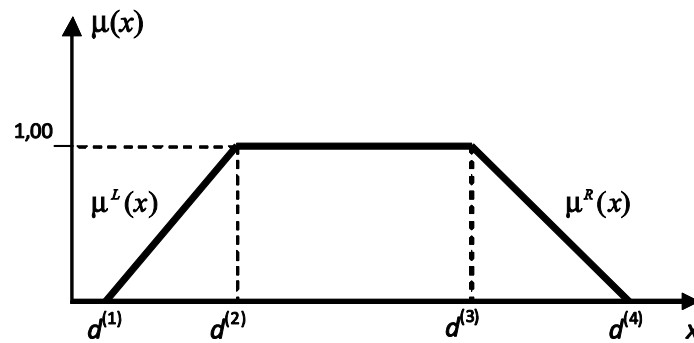
Liczbą rozmytą jest zbiór rozmyty  $\tilde{D}$  określony w zbiorze liczb rzeczywistych, którego funkcja przynależności  $\mu_{\tilde{D}} : X \rightarrow [0, 1]$  jest przedziałami ciągła oraz spełnia następujące warunki ([12]):

- a)  $\sup \mu_{\tilde{D}}(x) = 1$ , co znaczy, że zbiór rozmyty  $\tilde{D}$  jest normalny,
- b)  $\mu_{\tilde{D}}[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \min\{\mu_{\tilde{D}}(x_1), \mu_{\tilde{D}}(x_2)\}$  dla  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$  i  $\lambda \in [0, 1]$ , co znaczy, że zbiór rozmyty  $\tilde{D}$  jest wypukły.

W rozmytym harmonogramowaniu przedsięwzięć czasy wykonania czynności są modelowane najczęściej przez liczby rozmyte trapezowe. Funkcję przynależności trapezowej liczby rozmytej  $\tilde{D}$  przedstawia rys. 1.

Dla ułatwienia wyznaczania rozmytych terminów realizacji czynności w modelu sieciowym przedsięwzięcia, liczby rozmyte modelujące nieprecyzyjnie określone czasy wykonania poszczególnych czynności są zapisywane z wykorzystaniem notacji wielopunktowej. W notacji wielopunktowej trapezową liczbę rozmytą  $\tilde{D}$  określa uporządkowana czwórka liczb rzeczywistych  $(d^{(1)}, d^{(2)}, d^{(3)}, d^{(4)})$ . Przedział  $[d^{(2)}, d^{(3)}]$  wyznacza rdzeń trapezowej liczby rozmytej  $\tilde{D}$ . Z kolei przedział  $[d^{(1)}, d^{(4)}]$  wyznacza nośnik trapezowej

liczby rozmytej  $\tilde{D}$ . Trapezowe liczby rozmyte można wykorzystać dla modelowania czasu wykonania czynności określonego przez nieprecyzyjne sformułowanie „od około  $d^{(2)}$  do około  $d^{(3)}$  zmian roboczych”, [8]. Jeżeli  $d^{(2)} = d^{(3)}$ , otrzymuje się liczbę rozmytą trójkątną, umożliwiającą modelowanie czasu wykonania czynności określonego przez nieprecyzyjne sformułowanie „około  $d^{(2)}$  zmian roboczych”, [8].



Rys. 1. Funkcja przynależności rozmytej liczby trapezowej

Fig. 1. Membership function of the trapezoidal fuzzy number

Liczby rozmyte modelujące czasy wykonania poszczególnych czynności można wyznaczyć na podstawie subiektywnej opinii eksperta ([4]) lub wykorzystując logikę rozmytą ([9], [10]). Składniki uporządkowanej czwórki liczb rzeczywistych tworzących trapezową liczbę  $\tilde{D}$  muszą spełniać warunek nieujemności i wypukłości tej liczby

$$0 \leq d^{(k)} \leq d^{(k+1)}; \quad k = 1, 2, 3 \quad (1)$$

Liczbę rozmytą  $\tilde{D}$  można przedstawić jako sumę skończonej ilości przedziałów  $D^{\alpha_i} = [D_l^{\alpha_i}, D_u^{\alpha_i}]$ , utworzonych w wyniku skończonej ilości  $\alpha$  – przekrojów tej liczby, gdzie  $\alpha_i \in [0, 1]$ . Wyższym poziomom  $\alpha$  – przekrojów liczby rozmytej  $\tilde{D}$  odpowiadają wyższe poziomy pewności oszacowań realizacji nieznannej wielkości  $D$ . Przedział  $[D_l^{\alpha_i}, D_u^{\alpha_i}]$  zawiera wszystkie te liczby rzeczywiste, których stopień możliwości bycia realizacją nieznannej wielkości  $D$  został oceniony przez eksperta jako nie mniejszy od  $\alpha_i$ , ([6]). Wykorzystując kryterium decyzyjne Hurwicza, wielkość  $D$  można ocenić subiektywnie jako

$$D_p^\alpha = \beta \cdot D_l^{\alpha_i} + (1 - \beta) \cdot D_u^{\alpha_i} \quad (2)$$

gdzie  $\beta \in [0, 1]$  jest wskaźnikiem o wartości proporcjonalnej do poziomu optymizmu decydenta. Wyższe wartości wskaźnika  $\beta$  wskazują na większą skłonność decydenta do akceptacji ryzyka niedoszacowania realizacji nieznannej wielkości  $D$ .

## 2.2. Podstawowe operacje arytmetyczne na liczbach rozmytych

W rozmytym harmonogramowaniu projektów podstawowe operacje arytmetyczne na liczbach rozmytych zapisanych z wykorzystaniem notacji wielopunktowej są przeprowadzane z wykorzystaniem zasad przedstawionych w [1].

Operację dodawania dwóch liczb rozmytych trapezowych  $\tilde{A} = (a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)})$  i  $\tilde{B} = (b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}, b^{(4)})$  opisuje zależność ([4])

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (a^{(1)} + b^{(1)}, a^{(2)} + b^{(2)}, a^{(3)} + b^{(3)}, a^{(4)} + b^{(4)}) \quad (3)$$

Natomiast, operację ustalania maksimum liczb rozmytych trapezowych  $\tilde{A} = (a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)})$  i  $\tilde{B} = (b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}, b^{(4)})$  opisuje zależność (por. [4]):

$$\max(\tilde{A}, \tilde{B}) = (\max(a^{(1)}, b^{(1)}), \max(a^{(2)}, b^{(2)}), \max(a^{(3)}, b^{(3)}), \max(a^{(4)}, b^{(4)})) \quad (4)$$

## 3. Opis problemu

W referacie założono, że budowę odwzorowuje jednopunktowa sieć powiązań z jedną czynnością początkową  $S$ , oznaczającą rozpoczęcie budowy i z jedną czynnością końcową  $F$ , oznaczającą zakończenie budowy. Pomiędzy czynnościami zachodzą zależności typu zakończenie–rozpoczęcie. Czasy wykonania czynności  $S$  i  $F$  są zerowe. Czasy wykonania pozostałych czynności uwzględniają rozmytą ocenę zakłóceń i są modelowane przez liczby rozmyte trapezowe. W rezultacie planowany czas budowy jest modelowany przez liczbę rozmytą trapezową  $\tilde{T}$ . Ograniczenia dostępności zasobów są również modelowane przez liczby rozmyte trapezowe. Natomiast wymagany czas budowy przedstawia liczba rzeczywista  $T_d$ . Planowany czas budowy, uwzględniający ograniczenia dostępności zasobów, nie może być dłuższy od czasu wymaganego. Zatem musi zachodzić relacja  $\tilde{T} \leq T_d$ .

W świetle terminologii wprowadzonej w [6] relacja  $\tilde{T} \leq T_d$  oznacza, że nieznaną jeszcze realizacją liczby rozmytej  $\tilde{T}$  nie będzie większa od liczby rzeczywistej  $T_d$ . Uwzględniając założenia teorii możliwości, dla oceny prawdziwości stwierdzenia „realizacja liczby rozmytej  $\tilde{T}$  nie będzie większa od liczby rzeczywistej  $T_d$ ”, należałoby wykorzystać dwie miary: miarę potrzeby (*necessity measure*)  $N$  i miarę możliwości (*possibility measure*)  $\Pi$ , [2]. Wykorzystanie miary potrzeby i miary możliwości prowadzi do ustalenia dolnego i górnego ograniczenia prawdopodobieństwa zajścia relacji  $\tilde{T} \leq T_d$  w przypadku, gdy wiedza na temat wpływu zakłóceń na czasy wykonania robót nie jest dokładna

$$N(\tilde{T} \leq T_d) \leq P(\tilde{T} \leq T_d) \leq \Pi(\tilde{T} \leq T_d) \quad (5)$$

Należy podkreślić, że relacja możliwości  $\Pi(\tilde{T} \leq T_d)$  nie ma właściwości komplementarności, to jest  $\Pi(\tilde{T} \leq T_d)$  nie musi być równe  $1 - \Pi(\tilde{T} \geq T_d)$ , a takiej właściwości oczekuje decydent, kierując się intuicją z rachunku prawdopodobieństwa. Dlatego w niniejszym artykule podjęto próbę wykorzystania miary probabilistycznej dla oceny terminowości zakończenia budowy o nieprecyzyjnie określonych warunkach realizacji. Jako miarę oceny terminowości zakończenia budowy przyjęto prawdopodobieństwo  $P(\tilde{T} \leq T_d)$  realizacji ustalonego programu robót w wymaganym czasie. Jednocześnie należy uwzględnić wymagane przez wykonawcę robót prawdopodobieństwo dotrzymania rozmytych ograniczeń dostępności zasobów odnawialnych.

Zatem przedmiotem rozpatrywanego zagadnienia jest opracowanie harmonogramu zapewniającego maksymalizację prawdopodobieństwa realizacji budowy w czasie nie dłuższym od czasu wymaganego, z uwzględnieniem zadanego prawdopodobieństwa dotrzymania nieprecyzyjnie określonego limitu dostępności danego zasobu. Przedstawiona w artykule metoda rozwiązania rozpatrywanego zagadnienia polega na dwuetapowym sporządzaniu harmonogramu budowy. W etapie pierwszym sporządza się harmonogram rozmyty, spełniający ustalone kryterium planowania realizacji budowy. W etapie drugim, wykorzystując koncepcję przekrojów liczby rozmytej oraz kryterium decyzyjne Hurwicza, na podstawie harmonogramu rozmytego sporządza się harmonogram zwykły (nierozmyty), uwzględniający przyjęty przez decydenta poziom pewności oszacowań czasów wykonania robót oraz skłonność decydenta do akceptacji ryzyka niedoszacowania ich rzeczywistych czasów wykonania.

Zadanie maksymalizacji prawdopodobieństwa realizacji budowy w wymaganym czasie można sformułować następująco

$$\text{Max } P : P = P(\tilde{T} \leq T_d) \quad (6)$$

gdzie:

$\tilde{T}$  – liczba rozmyta, modelująca planowany czas realizacji budowy,

$T_d$  – liczba rzeczywista, przedstawiająca wymagany czas realizacji budowy.

W świetle terminologii wprowadzonej w [6], istotą zadania (6) jest maksymalizacja prawdopodobieństwa, że (nieznana jeszcze) realizacja liczby rozmytej  $\tilde{T}$  nie będzie większa od liczby rzeczywistej  $T_d$ . Rozwiązaniem zadania (6) jest harmonogram rozmyty, zachowujący ustalone zależności pomiędzy czynnościami w modelu sieciowym budowy oraz zapewniający wymagane prawdopodobieństwo dotrzymania rozmytych ograniczeń dostępności zasobów.

Warunek zachowania zależności typu zakończenie–rozpoczęcie pomiędzy czynnościami o rozmytych czasach wykonania ma postać

$$\tilde{S}_j \geq \tilde{S}_i \oplus \tilde{D}_i \mid i \in \{Prec(j)\}, j = 1, \dots, J \quad (7)$$

gdzie  $\{Prec(j)\}$  jest zbiorem czynności poprzedzających czynność  $j$  w jednopunktowym modelu sieciowym budowy.

Natomiast warunek zapewnienia wymaganego prawdopodobieństwa dotrzymania rozmytych ograniczeń dostępności  $k$ -tego zasobu ma postać

$$P(\tilde{r}_k \leq \tilde{R}_k) \geq P_{k_{gr}} \quad (8)$$

gdzie:

- $\tilde{r}_k$  – liczba rozmyta modelująca maksymalne planowane zużycie  $k$ -tego zasobu,
- $\tilde{R}_k$  – liczba rozmyta modelująca nieprecyzyjnie sformułowany limit dostępności  $k$ -tego zasobu,
- $P_{k_{gr}}$  – wymagane prawdopodobieństwo dotrzymania limitu dostępności  $k$ -tego zasobu.

W świetle terminologii wprowadzonej w [6] warunek (8) dotyczy prawdopodobieństwa zaistnienia żądanej relacji pomiędzy realizacją liczby rozmytej  $\tilde{r}_k$  i realizacją liczby rozmytej  $\tilde{R}_k$ . Ocena spełnienia warunku (8) wymaga jednak wyznaczenia liczb rozmytych  $\tilde{r}_k$  modelujących planowane zużycie danego zasobu w każdym dniu budowy w przypadku, kiedy terminy rozpoczęcia i zakończenia poszczególnych robót są również modelowane przez liczby rozmyte. Dla ułatwienia oceny spełnienia warunku (8) można wykorzystać założenie, że czas wykonania danej roboty jest modelowany przez liczbę rozmytą  $\tilde{D}_j$  o ciągłej i liniowej funkcji przynależności. W rezultacie również terminy rozpoczęcia i zakończenia robót w harmonogramie rozmytym są modelowane przez liczby rozmyte  $\tilde{S}_j$  i  $\tilde{F}_j$ , o ciągłych i liniowych funkcjach przynależności. Dokonując przekroju harmonogramu rozmytego na poziomie  $\alpha_i$ , uzyskuje się przedziały  $S_j^{\alpha_i} = [S_{j_l}^{\alpha_i}, S_{j_u}^{\alpha_i}]$  oraz  $F_j^{\alpha_i} = [F_{j_l}^{\alpha_i}, F_{j_u}^{\alpha_i}]$ . Przedziały te zawierają wszystkie te liczby rzeczywiste, których stopień możliwości bycia realizacjami nieznanymi wielkości  $S_j$  i  $F_j$  ocenia się jako nie mniejszy od  $\alpha_i$ . Wykorzystując kryterium decyzyjne L. Hurwicza i zależność (2), można ustalić terminy realizacji poszczególnych czynności w harmonogramie zwykłym

$$S_{j_\beta}^{\alpha_i} = \beta \cdot S_{j_l}^{\alpha_i} + (1 - \beta) \cdot S_{j_u}^{\alpha_i} \quad (9)$$

$$F_{j_\beta}^{\alpha_i} = \beta \cdot F_{j_l}^{\alpha_i} + (1 - \beta) \cdot F_{j_u}^{\alpha_i} \quad (10)$$

gdzie  $\beta \in [0, 1]$  jest wskaźnikiem akceptacji ryzyka niedoszacowania realizacji nieznanymi wielkości  $S_j$  i  $F_j$  jako konsekwencji niedoszacowania realizacji nieznanymi czasami wykonania czynności  $j$ . Każdy harmonogram zwykły, otrzymany w wyniku przekroju harmonogramu rozmytego na poziomie  $\alpha_i$  i przyjęcia określonej wartości wskaźnika optyimizmu  $\beta$ , musi uwzględniać następujący warunek ograniczający

$$P(r_{k_\beta}^{\alpha_i} \leq \tilde{R}_k) \geq P_{k_{gr}} \quad (11)$$

gdzie:

- $r_{k_\beta}^{\alpha_i}$  – liczba rzeczywista, przedstawiająca maksymalne zużycie  $k$ -tego zasobu, wyznaczone dla  $i$ -tego poziomu pewności oszacowania czasów wykonania

robót, z uwzględnieniem określonego poziomu akceptacji ryzyka przez decydena

$$r_{k\beta}^{\alpha_i} = \max \left\{ \sum_{p \in \{A(t)\}} r_{k_{pi}}^{\alpha_i} \right\}, \quad t = 1, \dots, T_{\beta}^{\alpha_i} \quad (12)$$

$\{A(t)\}$  – zbiór czynności realizowanych w dniu  $t$ ,

$T_{\beta}^{\alpha_i}$  – liczba rzeczywista, przedstawiająca planowany czas realizacji budowy, ustalony dla  $i$ -tego poziomu pewności oszacowania czasów wykonania robót, z uwzględnieniem określonego poziomu akceptacji ryzyka przez decydena.

Przyjęto założenie, że konflikty zasobowe będą rozwiązywane z wykorzystaniem określonej reguły priorytetu, przyznającej pewnym czynnościom w modelu sieciowym budowy pierwszeństwo w przydziale zasobów. W przypadku konfliktu zasobowego planowany termin rozpoczęcia czynności  $j$  o niższym priorytecie zostaje opóźniony w stosunku do najwcześniejszego terminu rozpoczęcia tej czynności z uwzględnieniem topologii modelu sieciowego. Opóźnienie terminu rozpoczęcia czynności  $j$  jest modelowane za pomocą liczby rozmytej  $\tilde{L}_j = (l_j^{(1)}, l_j^{(2)}, l_j^{(3)}, l_j^{(4)})$ , gdzie

$$0 \leq l_j^{(k)} \leq l_j^{(k+1)}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (13)$$

Dla zapewnienia ciągłości harmonogramu rozmytego należy wprowadzić ograniczenie wartości opóźnień  $\tilde{L}_j$ . Opóźnienia maksymalne są modelowane przez liczby rozmyte  $\tilde{L}_{j_{\max}} = (l_{j_{\max}}^{(1)}, l_{j_{\max}}^{(2)}, l_{j_{\max}}^{(3)}, l_{j_{\max}}^{(4)})$ , gdzie  $0 \leq l_{j_{\max}}^{(k)} \leq l_{j_{\max}}^{(k+1)}$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Maksymalne wartości  $\tilde{L}_{j_{\max}}$  opóźnień  $\tilde{L}_j$  można wyznaczyć, przyjmując, że do realizacji czynności  $j$  przystępuje się dopiero po zakończeniu wszystkich czynności poprzedzających czynność  $j$  zgodnie z ustaloną regułą priorytetu.

Ograniczenie wartości opóźnień  $\tilde{L}_j$  prowadzi do warunku

$$0 \leq l_j^{(i)} \leq l_{j_{\max}}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (14)$$

#### 4. Ocena prawdopodobieństw dotrzymania ograniczeń czasowych i zasobowych

##### 4.1. Ocena prawdopodobieństwa dotrzymania ograniczeń czasowych

Dane są dwie liczby: liczba rozmyta trapezowa  $\tilde{T}$ , modelująca planowany czas realizacji budowy, oraz liczba rzeczywista  $T_d$ , przedstawiająca ograniczenie czasu na realizację budowy. Należy ocenić prawdopodobieństwo  $P(\tilde{T} \leq T_d)$ , że realizacja liczby rozmytej  $\tilde{T}$  będzie nie większa od liczby rzeczywistej  $T_d$ .

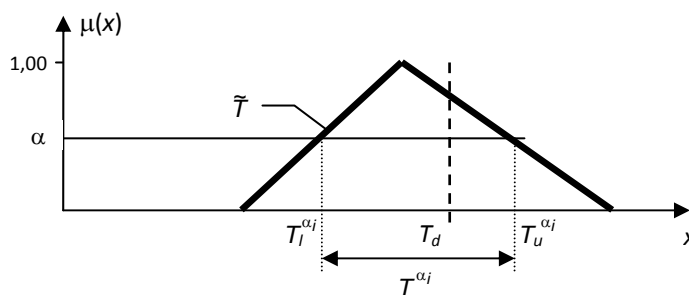


Istotą niżej przedstawionej metody oceny prawdopodobieństwa  $P(\tilde{T} \leq T_d)$  jest wykorzystanie koncepcji  $\alpha$  – przekrojów liczby rozmytej  $\tilde{T}$  dla skończonej ilości poziomów pewności oszacowania czasów wykonania robót. Dla danego poziomu przekroju liczby rozmytej  $\tilde{T}$ , otrzymuje się przedział  $T^{\alpha_i} = [T_l^{\alpha_i}, T_u^{\alpha_i}]$ . Przykład przedziału  $T^{\alpha_i}$  przedstawia rys. 2. Symbol  $i$  jest indeksem kolejnego poziomu przekroju  $\alpha$ . Metoda polega na oddzielnej ocenie prawdopodobieństw  $P(T^{\alpha_i} \leq T_d)$ , że realizacja liczby przedziałowej  $T^{\alpha_i}$ , uzyskanej dla kolejnego poziomu przekroju liczby rozmytej  $\tilde{T}$ , będzie nie większa od liczby rzeczywistej  $T_d$ . Prawdopodobieństwo  $P(\tilde{T} \leq T_d)$  ustala się w wyniku agregacji prawdopodobieństw  $P(T^{\alpha_i} \leq T_d)$ .

Na podstawie rys. 2 można stwierdzić, że jeżeli  $T_l^{\alpha_i} \leq T_d \leq T_u^{\alpha_i}$ , to przedział  $T^{\alpha_i}$  dzieli się na podprzedziały  $[T_l^{\alpha_i}, T_d]$  oraz  $[T_d, T_u^{\alpha_i}]$ . Prawdopodobieństwo, że realizacja liczby przedziałowej  $T^{\alpha_i}$  będzie zawarta w podprzedziale  $[T_l^{\alpha_i}, T_d]$  wynosi

$$P(T^{\alpha_i} \leq T_d) = \frac{(T_d - T_l^{\alpha_i})}{(T_u^{\alpha_i} - T_l^{\alpha_i})} \quad (15)$$

Jeżeli  $T_d < T_l^{\alpha_i}$ , to  $P(T^{\alpha_i} \leq T_d) = 0$ . Natomiast jeżeli  $T_d > T_u^{\alpha_i}$ , to  $P(T^{\alpha_i} \leq T_d) = 1$ .



Rys. 2. Przykład utworzenia przedziału  $T^{\alpha_i}$

Fig. 2. An example of interval  $T^{\alpha_i}$

Agregując prawdopodobieństwa  $P(T^{\alpha_i} \leq T_d)$  wyznaczone dla skończonej ilości przekrojów liczby rozmytej  $\tilde{T}$ , otrzymuje się

$$P(\tilde{T} \leq T_d) = \frac{\sum_i [\alpha_i \cdot P(T^{\alpha_i} \leq T_d)]}{\sum_i \alpha_i} \quad (16)$$

#### 4.2. Ocena prawdopodobieństwa dotrzymania rozmytych ograniczeń zasobowych

Dane są dwie liczby: liczba rozmyta trapezowa  $\tilde{R}_k$ , modelująca ograniczenie dostępności  $k$ -tego zasobu, oraz liczba rzeczywista  $r_{k_p}^{\alpha_i}$ , przedstawiająca planowane maksymalne zużycie  $k$ -tego zasobu, wyznaczone dla  $i$ -tego poziomu pewności oszacowania czasów trwania robót z uwzględnieniem określonego poziomu akceptacji ryzyka przez decydenta. Należy ocenić prawdopodobieństwo  $P(r_{k_p}^{\alpha_i} \leq \tilde{R}_k)$ , że realizacja liczby rozmytej  $\tilde{R}_k$  będzie nie mniejsza od liczby rzeczywistej  $r_{k_p}^{\alpha_i}$ .

Postępując podobnie jak w przypadku oceny prawdopodobieństwa  $P(\tilde{T} \leq T_d)$  dla danego poziomu pewności  $\lambda$  oszacowania ograniczenia dostępności określonego zasobu, otrzymuje się liczbę przedziałową  $R_k^{\lambda_j} = [R_{k_l}^{\lambda_j}, R_{k_u}^{\lambda_j}]$ . Symbol  $j$  jest indeksem kolejnego poziomu pewności  $\lambda$  oszacowania ograniczenia dostępności określonego zasobu. Prawdopodobieństwo, że realizacja liczby przedziałowej  $R_k^{\lambda_j}$  będzie zawarta w podprzedziale  $[r_{k_p}, R_{k_u}^{\lambda_j}]$  wynosi

$$P(r_{k_p}^{\alpha_i} \leq R_k^{\lambda_j}) = \frac{(R_{k_u}^{\lambda_j} - r_{k_p}^{\alpha_i})}{(R_{k_u}^{\lambda_j} - R_{k_l}^{\lambda_j})} \quad (17)$$

Agregując prawdopodobieństwa  $P(r_{k_p}^{\alpha_i} \leq R_k^{\lambda_j})$  wyznaczone dla skończonej liczby przekrojów liczby rozmytej  $\tilde{R}_k$ , otrzymuje się

$$P(r_{k_p}^{\alpha_i} \leq \tilde{R}_k) = \frac{\sum_j [\lambda_j \cdot P(r_{k_p}^{\alpha_i} \leq R_k^{\lambda_j})]}{\sum_j \lambda_j} \quad (18)$$

Jeżeli  $r_{k_p}^{\alpha_i} < R_{k_l}^{\lambda_j}$ , to  $P(r_{k_p}^{\alpha_i} \leq \tilde{R}_k) = 1$ . Natomiast jeżeli  $r_{k_p}^{\alpha_i} > R_{k_u}^{\lambda_j}$ , to  $P(r_{k_p}^{\alpha_i} \leq \tilde{R}_k) = 0$ .

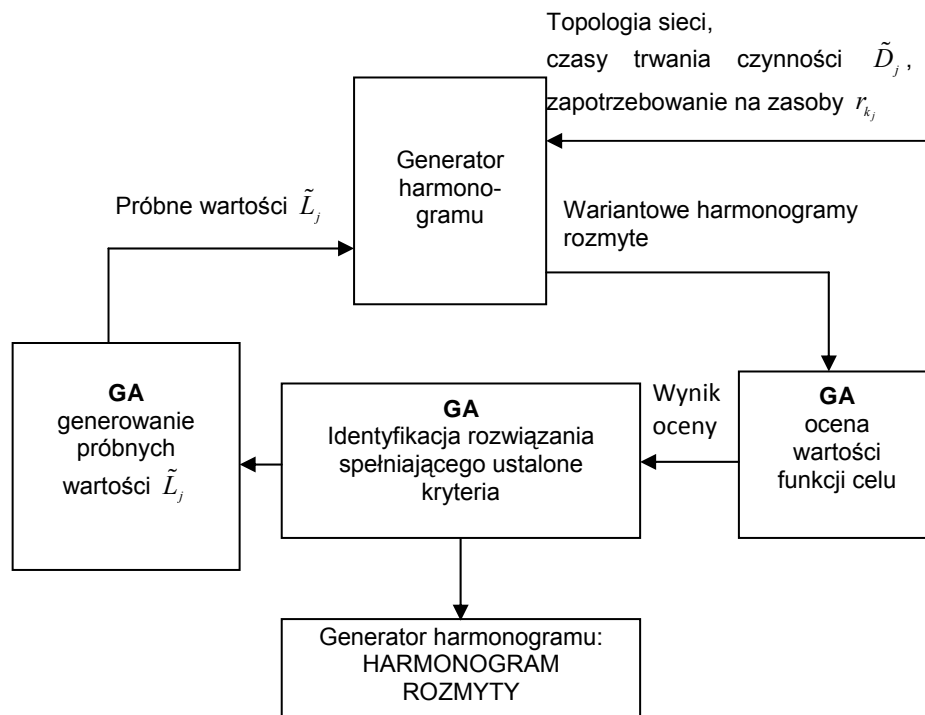
### 5. Schemat przeprowadzania obliczeń

Obliczenia związane ze sporządzaniem harmonogramu rozmytego można przeprowadzać z wykorzystaniem algorytmu genetycznego, zgodnie ze schematem przedstawionym na rys. 3. Algorytm genetyczny generuje próbne wartości opóźnień terminów rozpoczęcia poszczególnych czynności. Dane przesłane przez algorytm genetyczny są wykorzystywane dla wygenerowania wariantowych harmonogramów rozmytych, z zachowaniem zależności pomiędzy czynnościami w modelu sieciowym i z zachowaniem rozmytych ograniczeń dostępności zasobów. Terminy rozpoczęcia i zakończenia czynności w każdym wariantowym harmonogramie rozmytym wyznacza się z wykorzystaniem następujących zależności

$$\tilde{S}_j = \max_{i \in \{Prec(j)\}} \{\tilde{S}_i \oplus \tilde{D}_i\} \oplus \tilde{L}_j \quad (19)$$

$$\tilde{F}_j = \tilde{S}_j \oplus \tilde{D}_j \quad (20)$$

Dla każdego z wariantowych harmonogramów rozmytych algorytm genetyczny dokonuje oceny wartości funkcji celu w zadaniu (6) i wskazuje najlepsze rozwiązanie rozpatrywanego zagadnienia. Obliczenia poprzedza wyznaczenie maksymalnych wartości opóźnień  $\tilde{L}_j$ . Następnie z wykorzystaniem algorytmu genetycznego generuje się próbne rozwiązania rozpatrywanych zagadnień. Kolejne czwórki genów każdego chromosomu w danej generacji rozwiązań próbnych odpowiadają kolejnym czwórkom całkowitych liczb rzeczywistych  $l_j^{(1)}$ ,  $l_j^{(2)}$ ,  $l_j^{(3)}$  i  $l_j^{(4)}$ , tworzących liczby rozmyte  $\tilde{L}_j$  (opóźnienia terminów rozpoczynania czynności w modelu sieciowym budowy).



Rys. 3. Schemat przeprowadzania obliczeń dla planowania realizacji budowy według kryterium niezawodności harmonogramu rozmytego

Fig. 3. Schematic diagram of calculations for planning of construction works with the criterion of fuzzy schedule reliability

Spełnienie warunku (13) dotyczącego nieujemności i wypukłości liczb  $\tilde{L}_j$  oraz warunku (14) zapewniającego ciągłość harmonogramu rozmytego uzyskuje się następująco:

1. Jako pierwszą z liczb rzeczywistych tworzących daną uporządkowaną czwórkę ustala się liczbę  $l_j^{(1)}$ , równą liczbie  $l_{jg}^{(1)}$  wygenerowanej przez algorytm genetyczny z uwzględnieniem warunku (14).
2. Pozostałe liczby rzeczywiste w danej uporządkowanej czwórce ustala się z wykorzystaniem warunku

$$l_{jg}^{(r)} \geq l_{jg}^{(r-1)} \Rightarrow l_j^{(r)} = l_{jg}^{(r)} \mid 0 \leq l_{jg}^{(r)} \leq L_j^{(r)}, \quad r = 2, 3, 4 \quad (21)$$

$$l_{jg}^{(r)} < l_{jg}^{(r-1)} \Rightarrow l_j^{(r)} = l_{jg}^{(r-1)} \mid 0 \leq l_{jg}^{(r)} \leq L_j^{(r)}, \quad r = 2, 3, 4 \quad (22)$$

Na podstawie próbnych rozwiązań uzyskanych z wykorzystaniem algorytmu genetycznego zostają wygenerowane wariantowe harmonogramy rozmyte, w których terminy  $\tilde{S}_j$  rozpoczęcia i terminy  $\tilde{F}_j$  zakończenia poszczególnych czynności wyznacza się z wykorzystaniem zależności (19) i (20).

W każdym z wariantowych harmonogramów rozmytych sprawdza się spełnienie warunku (11), dotyczącego zapewnienia wymaganego prawdopodobieństwa dotrzymania rozmytego ograniczenia dostępności zasobów odnawialnych. Ze względu na ciągłość i liniowość funkcji przynależności liczb rozmytych modelujących terminy rozpoczęcia i zakończenia poszczególnych czynności, sprawdzenie spełnienia warunku (11) przeprowadza się następująco:

1. Dokonując przekrojów harmonogramu rozmytego na poziomach  $\alpha = 0,0$  i  $\alpha = 1,0$ , tworzy się nierozmyte harmonogramy sprawdzające w dwóch wersjach:
  - w wersji optymistycznej ( $\beta = 1,0$ ) dla  $S_{j \text{ opt}} = S_{j\beta=1}^\alpha = S_{j_l}^\alpha$  i  $F_{j \text{ opt}} = F_{j_1}^\alpha = F_{j_l}^\alpha$ ,
  - w wersji pesymistycznej ( $\beta = 0,0$ ) dla  $S_{j \text{ pes}} = S_{j\beta=0}^\alpha = S_{j_u}^\alpha$  i  $F_{j \text{ pes}} = F_{j\beta=0}^\alpha = F_{j_u}^\alpha$ .
2. W każdym z utworzonych w powyższy sposób nierozmytych harmonogramów sprawdzających wyznacza się maksymalne zużycie  $k$ -tego zasobu, wykorzystując zależność (12)

$$P(r_{k_p}^\alpha < \rho_k) \geq P_{k_{gr}} \mid t = 1, \dots, T_\beta^\alpha, \quad \alpha = 0,0, 1,0; \beta = 0,0, 1,0$$

3. Wykorzystując zależności (18) i (19) w każdym harmonogramie sprawdzającym ocenia się spełnienie warunku (10)

$$P(r_{k_p}^\alpha \leq \tilde{R}_k) \geq P_{k_{gr}} \mid t = 1, \dots, T_\beta^\alpha, \quad \alpha = 0,0, 1,0; \beta = 0,0, 1,0$$

W przypadku spełnienia warunku (11) w każdym z nierozmytych harmonogramów sprawdzających dla danego wariantu harmonogramu rozmytego ustala się wartość funkcji celu w zadaniu (6) z wykorzystaniem zależności (15) i (16).

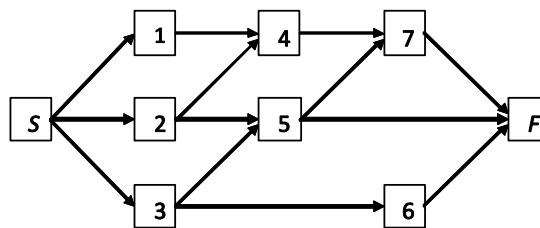
Po zrealizowaniu zadanej liczby iteracji algorytm genetyczny wskazuje rozwiązanie zadania (6) w postaci list liczb rzeczywistych określających nośniki i rdzenie poszczególnych liczb trapezowych  $\tilde{L}_j$ . Liczby  $\tilde{L}_j$  modelują opóźnienia terminów rozpoczęcia poszczególnych czynności, zapewniające maksymalizację prawdopodobieństwa dotrzymania limitu

czasu na realizację budowy z uwzględnieniem wymaganego prawdopodobieństwa dotrzymania rozmytych ograniczeń dostępności zasobów.

Dokonując przekroju harmonogramu rozmytego na przyjętym przez decydena poziomie pewności oszacowań czasów wykonania robót oraz uwzględniając poziom akceptacji ryzyka niedoszacowania rzeczywistych czasów wykonania robót (wskaźnik  $\beta$ ), uzyskuje się harmonogram zwykły (nierozmyty), spełniający przyjęte kryterium niezawodności. Terminy realizacji robót w harmonogramie zwykłym wyznacza się na podstawie zależności (9) i (10).

### 6. Przykład

Przebieg niewielkiej budowy odwzorowuje jednopunktowa sieć powiązań przedstawiona na rys. 4. Niezbędne liczebności zespołów roboczych i nieprecyzyjnie oszacowane czasy wykonania poszczególnych robót zestawiono w tabeli 1.



Rys. 4. Sieć powiązań do przykładu wykorzystania przedstawionej metody

Fig. 4. Network for example problem

Tabela 1

Dane liczbowe do sieci powiązań według rys. 4

Czynność, $j$	Liczebność zespołu, $r_j$	Czas wykonania, $\tilde{D}_j$
1	17	(2, 4, 6, 8)
2	12	(4, 6, 6, 10)
3	8	(4, 6, 6, 8)
4	10	(6, 8, 8, 10)
5	11	(4, 8, 10, 12)
6	9	(6, 10, 10, 12)
7	11	(4, 6, 8, 10)

Wymagany czas realizacji budowy wynosi  $T_d = 30$  zmian roboczych. Ograniczenie dostępności zasobów siły roboczej wynosi około 30 robotników i jest modelowane przez liczbę rozmytą  $\tilde{R} = (25, 30, 30, 35)$ . Wymagane prawdopodobieństwo dotrzymania rozmytego ograniczenia dostępności zasobów siły roboczej wynosi  $P_{gr} = 0,75$ .

Przyjęto, że w przypadku konfliktów zasobowych pierwszeństwo w przydziale zasobów przysługuje czynnościom o niższym numerze identyfikacyjnym. Maksymalne opóźnienia terminów rozpoczęcia poszczególnych czynności wynoszą

$$\tilde{L}_{2_{\max}} = \tilde{D}_1, \tilde{L}_{3_{\max}} = \tilde{D}_1 \oplus \tilde{D}_2, \tilde{L}_{4_{\max}} = \tilde{D}_3, \tilde{L}_{5_{\max}} = \tilde{D}_4, \tilde{L}_{6_{\max}} = \tilde{D}_4 \oplus \tilde{D}_5, \tilde{L}_{7_{\max}} = \tilde{D}_6$$

Wyniki obliczeń zestawiono w tabeli 2. W przypadku pominięcia ograniczenia dostępności siły roboczej planowany czas realizacji budowy wynosi od około 20 do około 24 zmian roboczych i jest modelowany przez liczbę rozmytą  $\tilde{T} = (14, 20, 24, 32)$ . Maksymalne zatrudnienie dzienne wynosi 37 robotników. Natomiast planowany czas realizacji budowy z uwzględnieniem wymaganego prawdopodobieństwa dotrzymania rozmytych ograniczeń dostępności siły roboczej wynosi od około 24 do około 30 zmian roboczych i jest modelowany przez liczbę rozmytą  $\tilde{T} = (16, 24, 30, 38)$ . Prawdopodobieństwo realizacji budowy w wymaganym czasie wynosi  $P(\tilde{T} < T_d) = 0,77$ . Maksymalne zatrudnienie dzienne w każdym z harmonogramów sprawdzających wynosi  $r_{\beta}^{\alpha_i} = 29$  robotników, gdzie  $\alpha_i = 0.0$  lub  $1.0$ ,  $\beta = 0.0$  lub  $1.0$ . W każdym z harmonogramów sprawdzających prawdopodobieństwo dotrzymania rozmytego ograniczenia dostępności siły roboczej wynosi  $P(r_{\beta}^{\alpha_i} < \tilde{R}) = 0,83$ .

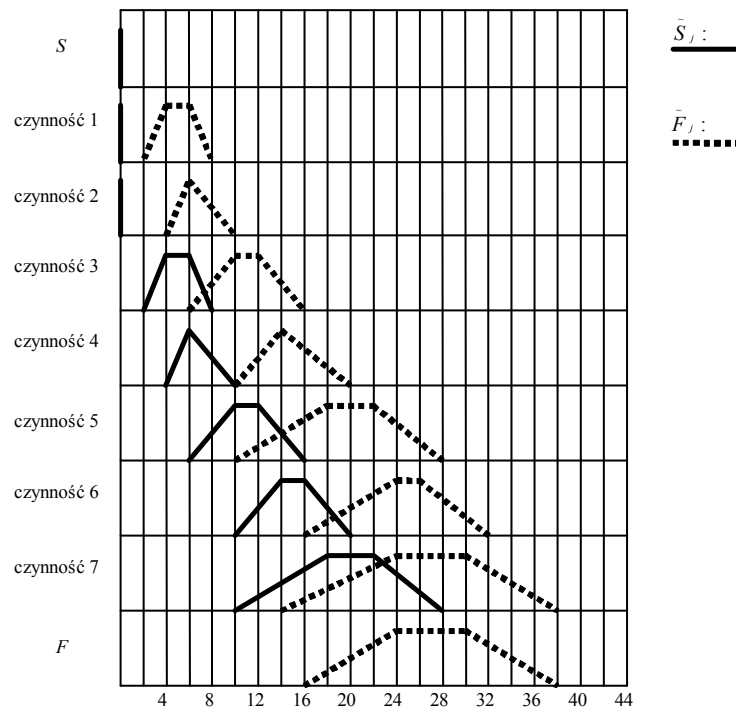
Tabela 2

Zestawienie wyników obliczeń

Czynność, $j$	Najwcześniejsze rozmyte terminy		Opóźnienia $\tilde{L}_j$	Planowane rozmyte terminy	
	rozpoczęcia $\tilde{E}S_j$	zakończenia $\tilde{E}F_j$		rozpoczęcia $\tilde{S}_j$	zakończenia $\tilde{F}_j$
$S$	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	–	(0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)
1	(0, 0, 0, 0)	(2, 4, 6, 8)	–	(0, 0, 0, 0)	(2, 4, 6, 8)
2	(0, 0, 0, 0)	(4, 6, 6, 10)	–	(0, 0, 0, 0)	(4, 6, 6, 10)
3	(0, 0, 0, 0)	(4, 6, 6, 8)	(2, 4, 6, 8)	(2, 4, 6, 8)	(6, 10, 12, 16)
4	(4, 6, 6, 10)	(10, 14, 14, 20)	–	(4, 6, 6, 10)	(10, 14, 14, 20)
5	(4, 6, 6, 10)	(8, 14, 16, 22)	–	(6, 10, 12, 16)	(10, 18, 22, 28)
6	(4, 6, 6, 8)	(10, 16, 16, 20)	(4, 4, 4, 4)	(10, 14, 16, 20)	(16, 24, 26, 32)
7	(10, 14, 16, 22)	(14, 20, 24, 32)	–	(10, 18, 22, 28)	(14, 24, 30, 38)
$F$	(14, 20, 24, 32)	(14, 20, 24, 32)	–	(16, 24, 30, 38)	(16, 24, 30, 38)

Na rysunku 5 przedstawiono harmonogram rozmyty, uzyskany w wyniku maksymalizacji prawdopodobieństwa realizacji budowy w wymaganym czasie z uwzględnieniem wymaganego prawdopodobieństwa dotrzymania rozmytego ograniczenia dostępności siły roboczej. Natomiast na rys. 6 przedstawiono harmonogram zwykły, sporządzony na podstawie uzyskanego harmonogramu rozmytego przy założeniu bardzo dużej niepewności oszacowań czasów wykonania robót ( $\alpha = 0,1$ ) oraz przy założeniu mniej niż średniej skłonności decydenta do akceptacji ryzyka niedoszacowania rzeczywistych czasów wykonania

robót ( $\beta = 0,4$ ). Terminy realizacji robót w harmonogramie zwykłym wyznaczono na podstawie zależności (9) i (10). Planowany czas realizacji budowy wynosi  $T_{\beta=0,4}^{\alpha_i=0,1} = 28$  zmian roboczych. Maksymalne zatrudnienie dzienne wynosi  $r_{\beta=0,4}^{\alpha_i=0,1} = 29$  robotników.



Rys. 5. Harmonogram rozmyty, uzyskany w wyniku wykorzystania przedstawionej metody

Fig. 5. Fuzzy schedule, generated by using the method described

Dla porównania, jeżeli zakłada się bardzo dużą pewność oszacowań czasów wykonania robót ( $\alpha = 0,9$ ) oraz bardzo dużą skłonność decydenta do akceptacji ryzyka ( $\beta = 0,9$ ), to planowany czas realizacji budowy wynosi  $T_{\beta=0,9}^{\alpha_i=0,9} = 24$  zmiany robocze, przy nie zmienionym maksymalnym zatrudnieniu dziennym.

Czynność	DNI ROBOCZE														
	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
1	■														
2	■														
3				■											
4					■										
5							■								
6									■						
7											■				
$r_{\beta=0,4}^{\alpha=0,1}$	29	29	29	20	18	18	21	$\frac{21}{11}$	20	20	20	20	$\frac{20}{11}$	11	

Rys. 6. Harmonogram zwykły, sporządzony na podstawie uzyskanego harmonogramu rozmytego

Fig. 6. Regular schedule, based on the obtained fuzzy schedule

## 7. Podsumowanie

W niniejszym artykule przedstawiono metodę harmonogramowania budowy według kryterium niezawodności w przypadku nieprecyzyjności danych o skutkach przewidywanych zakłóceń przebiegu robót i o dostępności zasobów. Posybilistycznym elementem metody jest wykorzystanie liczb rozmytych dla modelowania nieprecyzyjności oszacowań czasów wykonania poszczególnych robót i nieprecyzyjności danych o dostępności środków produkcji. Rozmyte oszacowania czasów wykonania robót uwzględniają skutki zakłóceń możliwych do wystąpienia, ale trudnych do oceny ilościowej. Probabilistycznym elementem metody jest ocena prawdopodobieństwa dotrzymania wymaganego czasu budowy z uwzględnieniem rozmytych ograniczeń dostępności zasobów. Dla umożliwienia oceny odpowiednich prawdopodobieństw wykorzystano koncepcję  $\alpha$ -przekrojów liczby rozmytej. Prawdopodobieństwo dotrzymania wymaganego czasu budowy ustala się w wyniku agregacji prawdopodobieństw wyznaczonych dla poszczególnych poziomów subiektywnej wiarygodności oszacowania czasów wykonania robót. Podobnie, prawdopodobieństwo dotrzymania ograniczenia dostępności danego zasobu ustala się w wyniku agregacji prawdopodobieństw wyznaczonych dla poszczególnych poziomów subiektywnej wiarygodności oszacowania danego ograniczenia. Wykorzystując algorytm genetyczny, uzyskuje się har-



monogram rozmyty, uwzględniający kryterium maksymalizacji prawdopodobieństwa dotrzymania wymaganego czasu realizacji budowy przy zadanym prawdopodobieństwie dotrzymania rozmytych ograniczeń zasobowych. Harmonogram zwykły uzyskuje się, dokonując  $\alpha$ -przekroju harmonogramu rozmytego oraz wykorzystując kryterium Hurwicza. Uzyskany harmonogram uwzględnia przyjęty przez decydenta poziom pewności oszacowań czasów wykonania robót oraz skłonność decydenta do akceptacji ryzyka niedoszacowania rzeczywistych czasów wykonania robót. Przedstawiony przykład liczbowy wskazuje, że metoda umożliwia harmonogramowanie budowy według kryterium niezawodności w przypadku nieprecyzyjności danych o warunkach realizacji robót.

#### Literatura

- [1] Dubois D., Prade H., *Operations on fuzzy numbers*, International Journal of Systems Science, 9, 1978, 613-626.
- [2] Dubois D., Prade H., *Possibility theory*, Plenum Press, New York 1988.
- [3] Dubois D., Prade H., Sandri S., *On possibility/probability transformations*, Proceedings of 4<sup>th</sup> IFSA Conference, Brussels 1991.
- [4] Hapke M., Słowiński R., *Fuzzy priority heuristics for project scheduling*, Fuzzy Sets and Systems, 83, 1996, 291-299.
- [5] Hapke M., Słowiński R., *Fuzzy set approach to multi-objective and multi-mode project scheduling under uncertainty*, [in:] Hapke M., Słowiński R. (ed.), *Scheduling Under Fuziness*, Physica-Verlag, Heidelberg, 197-221.
- [6] Kuchta D., *Miękka matematyka w zarządzaniu. Zastosowanie liczb przedziałowych i rozmytych w rachunkowości zarządczej*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2001.
- [7] Leu S.S., Chen A.T., Yang C.H., *A GA-based fuzzy optimal model for construction time-cost trade-off*, International Journal of Project Management, 19, 2001, 47-58.
- [8] Lorterapong P., Moselhi O., *Project-network analysis using fuzzy sets theory*, Journal of Construction Engineering and Management, ASCE, 122(4), December 1996, 308-318.
- [9] Oliveros A.V.O., Fayek A.R., *Fuzzy logic approach for activity delay analysis and schedule updating*, Journal of Construction Engineering and Management, ASCE, 131(1), 42-51.
- [10] Pan N.F., Hadipriono F.C., Whitlatch E., *A fuzzy reasoning knowledge-based system for assessing rain impact in highway construction scheduling: Part I. Analytical model*, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 16, 2005, 157-167.
- [11] Pan H., Yeh C.H., *Fuzzy project scheduling*, Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 2003, 755-760.
- [12] Rutkowski L., *Metody i techniki sztucznej inteligencji*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.
- [13] Wang J., *A fuzzy project scheduling approach to minimize schedule risk for product development*, Fuzzy Sets and Systems, 127, 2002, 99-116.
- [14] Wang J., *A fuzzy robust scheduling approach for product development projects*, European Journal of Operational Research, 152, 2004, 180-194.