

JACEK PACANA, BOGDAN KOZIK, GRZEGORZ BUDZIK*

NAPRĘŻENIA U PODSTAWY ZĘBÓW O ZARYSIE BBW WYZNACZANE Z ZASTOSOWANIEM METODY MES

DETERMINING STRESSES AT TOOTH FOOTING FOR BBW TYPE TEETH APPLYING FEM

Streszczenie

W niniejszym artykule zaprezentowano wyniki obliczeń MES naprężeń zginających dla współpracującej pary kół zębatych, z zębami o zarysie kołowo-lukowym BBW. Obliczenia numeryczne dla przygotowanych wcześniej modeli wirtualnych przeprowadzono kilkakrotnie dla różnych podziałów na elementy skończone. Otrzymane w obliczeniach metodą MES wyniki naprężeń zginających u podstawy zębów, zestawiono ze sobą i porównano odpowiadające sobie wartości dotyczące różnych siatek elementów skończonych. Następnie wybrane wielkości uzyskane metodą MES porównano z analogicznymi wartościami otrzymanymi na podstawie obliczeń analitycznych przeprowadzonych według zaleceń literaturowych. W ten sposób określono właściwą gęstość oraz typ elementów skończonych modeli kół zębatych niezbędne do uzyskania poprawnych rozwiązań.

Słowa kluczowe: zazębienie typu BBW, MES

Abstract

The paper presents outcome of Finite Elements Method calculations of bending stresses for cooperating gear pair with teeth of the BBW concavo-convex tooth profile. Numerical calculations for prepared earlier virtual models were carried out a few times for their different divisions into finite elements. The results of bending stresses at tooth footing calculated by FEM were assorted and corresponding values concerning different meshes of finite elements were compared. Then selected quantities calculated by FEM were compared to analogical values calculated by means of analytical calculations carried out according to literature recommendations. This way the appropriate density of finite elements of the mesh was determined which is necessary for obtaining valid solutions.

Keywords: BBW gearing, FEM

* Dr inż. Jacek Pacana, dr inż. Bogdan Kozik, dr hab. inż. Grzegorz Budzik, Katedra Konstrukcji Maszyn, Wydział Budowy Maszyn i Lotnictwa, Politechnika Rzeszowska.

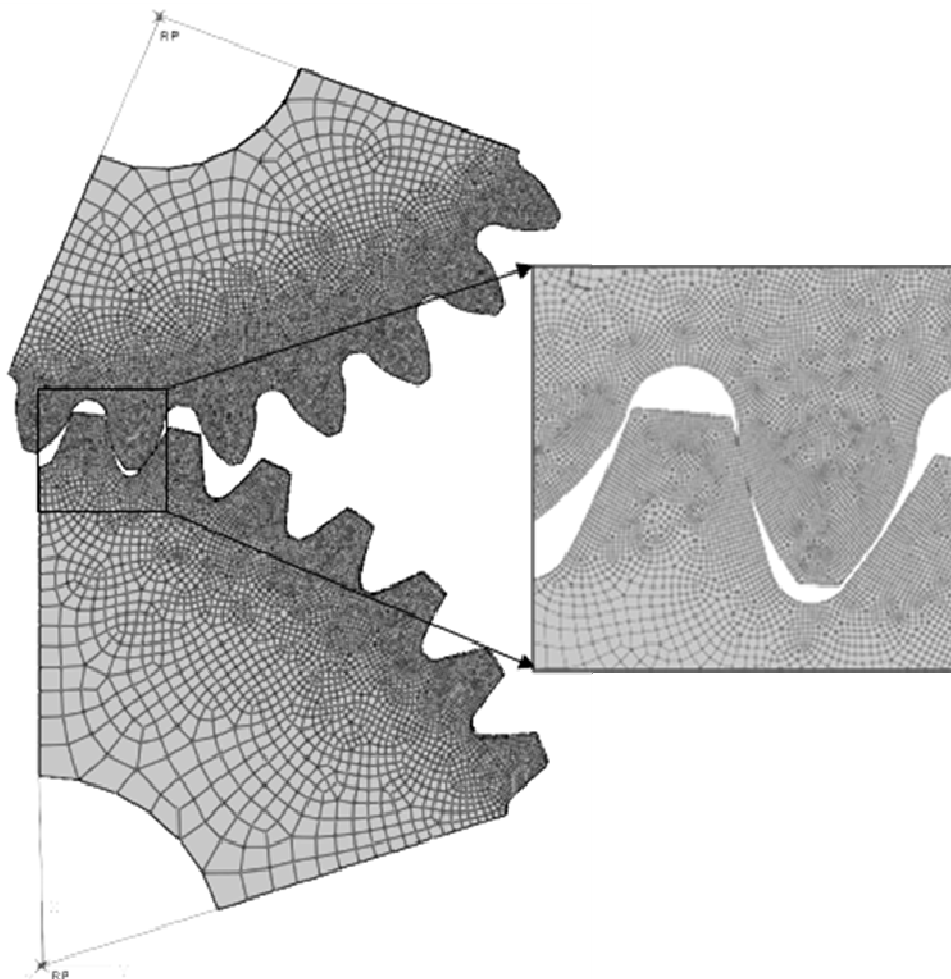
1. Wstęp

Metoda elementów skończonych (MES) jest komputerową analizą numeryczną pozwalającą na przeprowadzanie szerokiej gamy obliczeń wytrzymałościowych z wykorzystaniem modeli wirtualnych. Jest ona powszechnie stosowana w obliczeniach inżynierskich, gdyż dokładnością przewyższa uproszczone obliczenia analityczne. Jest również znacznie tańsza i łatwiejsza w realizacji od metod eksperymentalnych. Pozwala ona także na znaczne skrócenie czasu trwania analiz, za pomocą automatyzację części lub całości obliczeń. Dzięki zastosowaniu metody MES możliwe jest wyznaczenie wartości naprężeń w kołach zębatych o dowolnych zarysach zębów oraz pracujących pod różnym obciążeniem. Przez to w szybki i czytelny sposób otrzymujemy rozkłady i wartości naprężeń dla dużej liczby podobnych konstrukcyjnie modeli kół zębatych bez ponoszenia dodatkowych kosztów fizycznego ich wykonania [5, 6, 10, 11]. Stosowanie metody numerycznej MES w projektowaniu inżynierskim wymaga jednak znacznej wiedzy oraz doświadczenia. Wyniki otrzymane tą metodą powinny być sprawdzone z zastosowaniem innej metody obliczeniowej lub doświadczalnie. W ramach niniejszej pracy zaprezentowano proces wyznaczania naprężeń z zastosowaniem MES, a następnie weryfikację otrzymanych wyników przez porównanie ich z wartościami obliczonymi analitycznie. Obliczenia numeryczne MES przeprowadzono dla modeli wirtualnych kół zębatych o zarysie kołowo-łukowym BBW o różnych gęstościach siatki w obszarze wieńca zębatego. Natomiast metodą analityczną, na podstawie metod ISO [5, 9], wyliczono naprężenia zginające u podstawy zęba. Porównanie wyników uzyskanych dwoma metodami pozwoliło ocenić ich poprawność i ustalić wymaganą gęstość siatki elementów skończonych dla modelu obliczeniowego MES.

2. Model obliczeniowy

Płaskie modele obliczeniowe (2D) kół zębatych przekładni walcowej zastosowane w obliczeniach utworzono w programie AutoCAD 2010. Wysoką dokładność uzębienia uzyskano dzięki zastosowaniu przy ich modelowaniu autorskiego programu opartego na zasadzie komputerowej symulacji obróbki narzędziem zębatkowym [3]. Do analizy przyjęto modele kół BBW o kołowo-łukowych zarysach boków zębów i wartości modułu 4,0323 mm. Liczba zębów zębniaka wynosiła 27, a koła zębatego 35. Na potrzeby obliczeń numerycznych otrzymane modele płaskie ograniczono jedynie do wycinków obejmujących po 7 zębów dla każdego ze współpracujących kół. Znacząco skróciło to czas obliczeń i ułatwiło obróbkę otrzymanych wyników, nie wpływając na ich jakość. Na etapie modelowania wykonana została także modyfikacja zęba, w wyniku której jego grubość uległa zmianie. Przyrost grubości był jednakowy na całej czynnej wysokości zęba i wynosi 0,8 mm. Zwiększenie grubości zęba zębniaka dało możliwość zwiększenia jego wysokości, co wpłynęło na podwyższenie wskaźnika zazębienia [4].

Przykładowy model dyskretny kół zębatych, z siatką elementów skończonych o gęstości 0,2 mm przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Podział modeli kół zębatach na czworokątne elementy skończone o gęstości siatki 0,2 mm

Fig. 1. The division of toothed gears into quadrilateral finite elements of 0,2 mm mesh density

Przygotowane modele dwuwymiarowe kół zębatach zaimportowano w postaci plików IGS do preprocesora programu ABAQUS, w którym przeprowadzono obliczenia numeryczne z zastosowaniem metody MES. W programie tym przygotowano modele oraz parametry pracy i współpracy modeli obliczeniowych kół zębatach. Ponieważ obliczenia numeryczne MES naprężeń zginających u podstawy zęba koła zębatego przeprowadzono z zastosowaniem dwuwymiarowych modeli powierzchniowych, założono także, że spełniają one kryteria pozwalające rozpatrywać całe zagadnienie jako płaski stan naprężenia. Rozpatrywane modele zostały obciążone w płaszczyźnie środkowej momentem $T_2 = 200 \text{ Nm}$, działającym równomiernie na całej szerokości koła $b = 20 \text{ mm}$.

Przyjęto, że koła mogą się jedynie obracać względem swoich własnych osi, które w modelu obliczeniowym zastąpiono punktami referencyjnymi (RP). Powiązanie modeli z ich środkami obrotu zrealizowano przy pomocy sztywnych łączy (*Rigid Links*). Dla modelu zębniaka określono wymuszenie obrotu wokół własnej osi o kąt 1,25 rad, by prześledzić współpracę kilku kolejnych par zębów. Obciążenie momentem skręcającym T_2 przypisano do modelu koła zębatego. Na powierzchniach bocznych zębów zdefiniowano powierzchniowe kontaktowe, dzięki czemu możliwe było zasymulowanie współpracy kół przekładni.

Szczególnie gęstą siatkę elementów skończonych zdefiniowano w obszarze wieńca zębatego, w celu dokładnego obliczenia naprężeń zginających u podstawy zęba [2, 6, 7, 8].

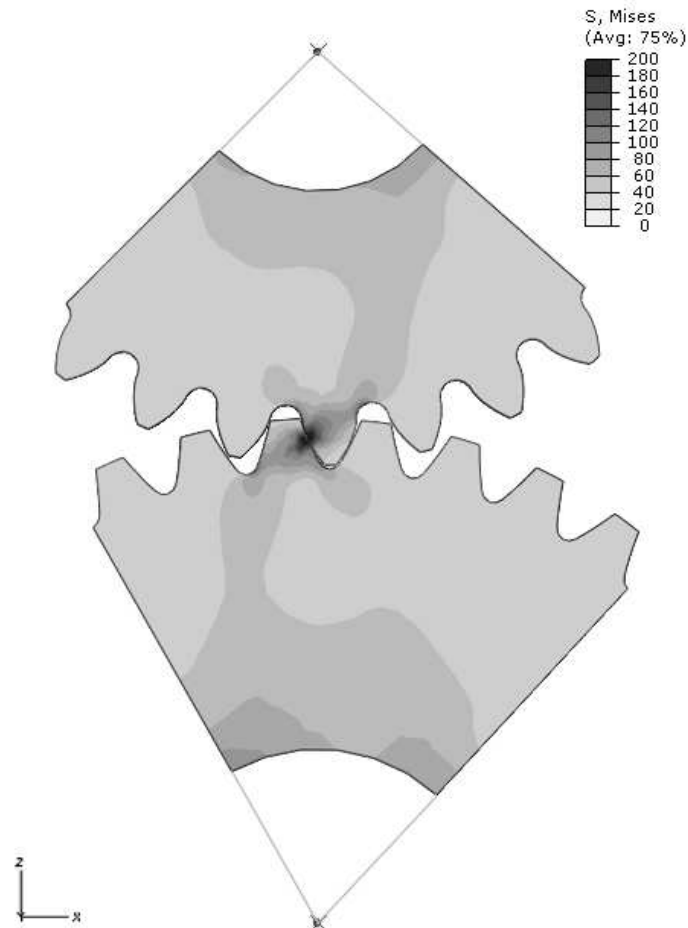
Aby określić wpływ gęstości siatki na jakość otrzymanych wyników dla wstępnie określonego modelu obliczeniowego, zmieniano w kolejnych etapach zagęszczenie węzłów elementów skończonych jedynie na obrysie zębów. W pozostałej części modelu gęstość siatki pozostała bez zmian.

Do kolejnych etapów, w analizowanym obszarze, przyjęto następujące rozmiary siatki: 1; 0,5; 0,4; 0,3; 0,2; 0,1; 0,05 oraz 0,01 mm. Utworzone modele płaskie poddane zostały w preprocesorze programu ABAQUS dyskretyzacji przy pomocy liniowych, czworokątnych elementów skończonych. W związku z różną gęstością siatki dla każdego z modeli utworzono inną liczbę węzłów siatki i elementów skończonych. Dla najrzadziej dyskretyzowanego modelu wygenerowano 1758 elementów skończonych i 1909 węzłów, natomiast dla siatki o gęstości 0,01 mm utworzono 298 763 węzłów oraz 306 262 elementów skończonych dla obydwu kół. W związku z powyższym także czas obliczeń numerycznych dla każdego z modeli był różny, wydłużając się dla bardziej gęstych podziałów. Dla modeli o odległości pomiędzy węzłami siatki wynoszącymi 0,5 mm obliczenia solvera trwały 1,5 godz. natomiast w przypadku modeli najdokładniejszych czas ten wydłużył się do 11 godzin.

Przy doborze elementów skończonych uwzględniono, że rozpatrywane zagadnienie jest geometrycznie nieliniowe, co wynika z uwzględnienia kontaktu współpracujących modeli kół oraz z zastosowanej w obliczeniach teorii dużych przemieszczeń. Wszystkie obliczenia podzielono na 100 kroków obliczeniowych (w czasie od 0 do 1), a wyniki dotyczące każdego kroku automatycznie zapisywano w celu późniejszego ich wykorzystania w analizie.

3. Wyniki

W wyniku obliczeń numerycznych MES określono wartości maksymalne naprężeń zginających u podstawy dla zębów zębniaka i koła, dla wszystkich analizowanych modeli. Obserwując formę graficzną otrzymanych rozkładów naprężeń dla ośmiu gęstości siatki, można zauważyć, że nieznacznie różnią się one pomiędzy sobą. Najwyższe wartości naprężeń wystąpiły w obszarze wieńca zębatego i były to naprężenia stykowe na powierzchniach bocznych zębów, które nie były przedmiotem analizy. Potencjalnie niebezpieczne dla trwałości kół są obszary podwyższonych naprężeń u podstawy zęba po stronie przeciwnej niż działające obciążenie, które wyraźnie widać na rys. 2.

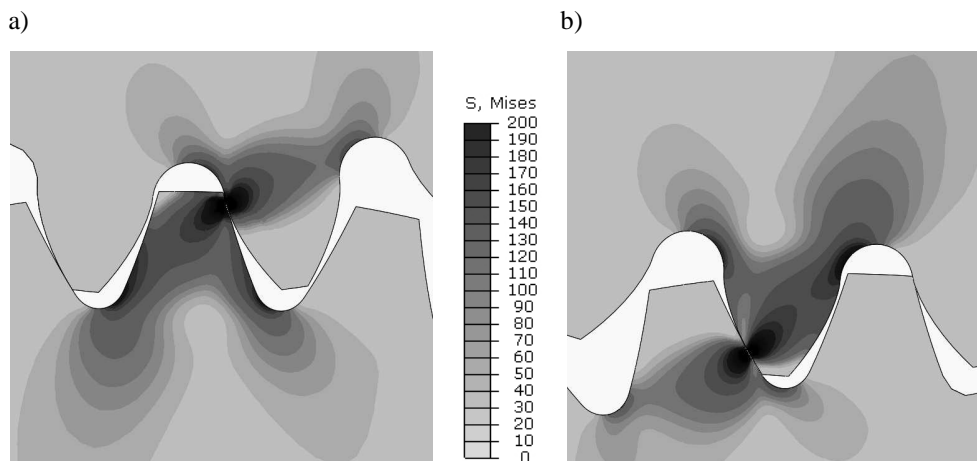


Rys. 2. Rozkład naprężeń zredukowanych dla współpracujących kół

Fig. 2. The distribution of reduced stresses for the mating toothed gears

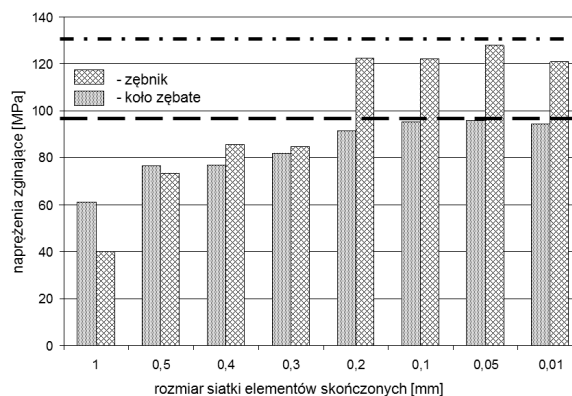
Charakterystyczny fragment modeli, ukazujący rozkład naprężeń w obszarze wieńców zębatych współpracujących kół będących w przyporze jednoparowym, przedstawiono na rys. 3. Zaprezentowano na nim współpracę w dwóch różnych fazach, na początku i na końcu jednoparowego odcinka przyporu [9, 12]. Pokazano wyniki obliczeń dla modeli poddanych dyskretyzacji przy pomocy elementów czworokątnych o gęstości siatki wynoszącej 0,2 mm.

Porównanie maksymalnych wartości naprężeń zginających u podstawy zębów uwiadczenia znaczne różnice w wynikach otrzymanych dla różnych gęstości siatki elementów skończonych. Wartości naprężeń zginających u podstawy zęba koła zębatego i zębika dla modeli o różnych gęstościach siatki przedstawione zostały w formie wykresu na rys. 4.



Rys. 3. Rozkład naprężeń zredukowanych dla współpracujących kół na początku (a) i końcu (b) jednoparowej współpracy zębów

Fig. 3. The distribution of reduced stresses for the mating toothed gears at the beginning (a) and end (b) of one gear pair teeth cooperation



Rys. 4. Wartości maksymalne naprężeń zginających dla modeli kół o różnych gęstościach siatki

Fig. 4. The maximum values of bending stresses for gear models with different mesh density

Dla małych gęstości siatki wynoszących 0,5; 0,4; 0,3 mm wartości naprężeń zginających u podstawy zęba – zarówno koła zębatego, jak i zębniaka, są na poziomie około 80 Nm. Dla mniejszej odległości pomiędzy węzłami siatki odpowiednie wartości naprężeń są wyraźnie wyższe i stabilizują się dla zębniaka na poziomie 122 MPa. Wartości maksymalne naprężeń zginających dla zęba koła zębatego są niższe i wynoszą około 92 MPa. Wyraźnie widać, że rozmiar elementów skończonych użytych do dyskretyzacji modelu obliczeniowego ma zasadniczy wpływ na jakość uzyskanych wyników [2, 8].

Aby określić, które z otrzymanych wyników są poprawne, przeprowadzono obliczenia analityczne naprężeń zginających zgodnie z normą PN-ISO 6336-3:2001 [9]. Dla

analizowanego modelu, naprężenia zginające obliczone według normy wynoszą 96,98 MPa dla koła zębatego, a dla zębniaka 131,20 MPa. Na wykresach wartości te zostały zaznaczone poziomymi liniami, kropkową dla zębniaka i przerywaną dla koła zębatego.

Wyniki otrzymane rozpatrywanymi metodami dla koła zębatego o gęstości siatki mniejszej i równej 0,2 mm są do siebie bardzo zbliżone, a maksymalna różnica wynosi w tym przypadku 2,6%. W przypadku zębniaka, dla obliczeń numerycznych z zastosowaniem modeli o gęstości siatki równej 0,05 mm, wartości naprężeń zginających są najbardziej zbliżone do analogicznych otrzymanych metodą analityczną. Maksymalne wartości naprężeń zginających u podstawy zęba zębniaka wyznaczone metodą MES są o 2,4% niższe niż otrzymane na podstawie obliczeń sprawdzających przeprowadzonych według zaleceń normowych i można uznać je za wystarczająco poprawne. Dla gęstości siatki wynoszących 0,2; 0,1; i 0,01 mm wartości naprężeń dla zębniaka wyznaczonych metodą numeryczną różnią się od obliczeń analitycznych o około 7%, co także należy uznać za wynik poprawny. Jednak, dla rozmiaru elementów większych niż 0,2 mm, różnica w otrzymanych rozwiązaniach jest zbyt duża, powyżej 35%, i takich wyników uzyskanych metodą MES nie można stosować w kolejnych etapach konstruowania kół zębatych. Należy zauważyć, że poprawne wyniki uzyskano w przypadku, gdy rozmiar elementów skończonych wynosił około 0,02 wysokości zęba rozważanego koła zębatego.

4. Wnioski

Analizując wyniki otrzymane w ramach niniejszej pracy, można zauważyć, że w obliczeniach numerycznych z zastosowaniem MES duży wpływ na ich poprawność ma właściwe przygotowanie modelu do obliczeń pod względem podziału na elementy skończone. Wykazano, że przyjęty sposób dyskretyzacji modeli obliczeniowych oraz ich gęstość wpływają na jakość otrzymanych wyników w zakresie naprężeń zginających u podstawy zęba. Wyniki analizy MES porównano z obliczeniami analitycznymi i ustalono, że dla gęstości siatki mniejszej od 0,02 wartości modułu kół otrzymuje się poprawne rozwiązania. W celu uzyskania wyników bardziej precyzyjnych, do analizy MES należy przyjąć modele obliczeniowe o jak najmniejszej odległości pomiędzy węzłami siatki.

Badania realizowane w ramach Projektu Nr POIG.0101.02-00-015/08 w Programie Operacyjnym Innowacyjna Gospodarka (POIG). Projekt współfinansowany przez Unię Europejską ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego.

Literatura

- [1] ABAQUS 6.8-3, Podręcznik użytkownika.
- [2] Kopecki H., Witek L., *Wpływ rodzaju oraz liczby elementów na błąd i zbieżność rozwiązania MES na przykładzie analizy stateczności pręta ściskanego*, V Konferencja Naukowo-Techniczna, WAT, IPPT PAN, Warszawa–Rynia 2000.
- [3] Kozik B., *Computer Simulated Generation of Teeth in the BBW Tothing Wheels*, International Scientific Conference „Progressive Technologies and Materials PRO-TECH-MA '07”, Bezmiechowa.

- [4] Kozik B., *Zmiana grubości zębów kół walcowych z zazębieniem wypukło-wklęsłym typu BBW*, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej nr 188, Mechanika z. 57, Rzeszów 2001.
- [5] Müller L., *Przekładnie zębate. Obliczenia wytrzymałościowe*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1972.
- [6] Niezgodziński M.E., Niezgodziński T., *Wytrzymałość materiałów*, PWN, Warszawa 1984.
- [7] Osiński J., *Obliczenia wytrzymałościowe elementów maszyn z zastosowaniem metody elementów skończonych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1998.
- [8] Pacana J., Budzik G., Kudasik T., *Wyznaczanie naprężeń zginających w kołach zębatych z zastosowaniem metody elementów skończonych*, Acta Mechanica Slovaca, 3-A/2008, PRO-TECH-MA Ročník 12, Kosiče 2008.
- [9] PN-ISO 6336-3:2001, *Przekładnie zębate walcowe. Obliczanie nośności kół. Wytrzymałość zęba na zginanie*.
- [10] Rakowski G., Kacprzyk Z., *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2005.
- [11] Rrusiński E., Czmochoowski J., Smolnicki T., *Zaawansowana metoda elementów skończonych w konstrukcjach nośnych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2000.
- [12] Wiktor J., *Analityczno numeryczne metody analizy parametrów geometrycznych, zakłóceń ruchu i wytrzymałości przekładni walcowych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 2004.