

ZDZISŁAW RAK*

MODELOWANIE PRZEKŁADNI PLANETARNYCH
O DOWOLNEJ KONFIGURACJIMODELLING OF PLANETARY GEARS WITH
AN ARBITRARY CONFIGURATION

Streszczenie

W niniejszym artykule przedstawiono metodę metodycznego budowania macierzy globalnych, liniowych matematycznych modeli drgań skrętnych przekładni planetarnych. Opracowana metoda umożliwia modelowanie przekładni planetarnych o dowolnej złożoności i konfiguracji. Metoda doskonale poddaje się procesowi algorytmizacji i zastosowaniu w metodach komputerowych. Jako przykład zastosowania metody zamieszczono model matematyczny przekładni planetarnej typu Ravigneaux.

Słowa kluczowe: przekładnia planetarna, model matematyczny, drgania skrętne

Abstract

Methodical building method of system matrices of torsional mathematical models of planetary gears in this paper is presented. The elaborated method enables modeling planetary gears with an arbitrary complexity and configuration. The method is perfectly suitable for making algorithms and numerical methods. As an example of the represented method a mathematical model of a Ravigneaux planetary gear is included.

Keywords: planetary gears, mathematical model, torsional vibrations

* Dr inż. Zdzisław Rak, Katedra Mechaniki Stosowanej, Wydział Mechaniczny Technologiczny, Politechnika Śląska.

Wybrane oznaczenia

| | |
|--|--|
| E_k, E_p, R | – odpowiednio energia kinetyczna, energia potencjalna oraz funkcja rozproszenia energii układu, |
| $k_{sc}, k_{sw}, k_{sj}, k_{ss}$ | – współczynniki sztywności elementów sprężysto tłumiących w przekładni planetarnej, |
| m | – liczba elementów sprężysto-tłumiących, |
| x_s, f_s, f_c, f_p, f_w | – odpowiednio przemieszczenie uogólnione środka masy satelity, oraz kątowe przemieszczenia uogólnione satelity, koła centralnego, jarzma i koła o uzębieniu wewnętrznym, |
| $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$ | – odpowiednio macierze kolumnowe przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń uogólnionych, |
| $\mathbf{K}_{sj}, \mathbf{K}_{sc}, \mathbf{K}_{sw}, \mathbf{K}_{ss}$ | – globalne macierze sztywności elementów sprężysto-tłumiących w przekładni planetarnej, |
| $\tilde{\mathbf{K}}_{sj}, \tilde{\mathbf{K}}_{sc}, \tilde{\mathbf{K}}_{sw}, \tilde{\mathbf{K}}_{ss}$ | – lokalne macierze sztywności elementów sprężysto-tłumiących w przekładni planetarnej, |
| $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$ | – odpowiednio globalne macierze bezwładności, tłumienia i sztywności przekładni, |
| \mathbf{Q} | – macierz kolumnowa sił zewnętrznych działających na przekładnię planetarną, |

1. Wstęp

Przeprowadzanie analizy dynamicznej przekładni zębatych, zarówno istniejących, jak również na etapie projektowania, jest bardzo ważne z punktu widzenia trwałości i niezawodności pracy tej przekładni. Niezbędna jest znajomość dynamicznych sił międzyzębnych, szczególnie w stanach niustalonych, które są podstawą do obliczeń wytrzymałościowych zębów kół zębatych. Istotne informacje na temat własności dynamicznych przekładni dostarcza również analiza modalna. Ponadto zmienne w czasie siły międzyzębne w ząbieniach satelitów z kołem centralnym i kołem o uzębieniu wewnętrznym są źródłem wzbudzeń wywołujących nadmierny hałas oraz drgania. Wymienione badania można wykonać na drodze eksperymentalnej, dla przekładni istniejących, lub teoretycznej, zarówno dla przekładni istniejących, jak i projektowanych. Podejście teoretyczne polega przede wszystkim na opracowaniu matematycznego modelu opisującego zjawiska dynamiczne zachodzące w przekładni. Model ten jest podstawą do kolejnych analiz. Modele matematyczne opracowuje się pod kątem zjawisk, które mają być analizowane. W pracach [5, 7] przedstawiono modele drgań skrętnych, w których uwzględniono zmienną sztywność ząbienia oraz luzy międzyzębne. Umożliwiają one wyznaczenie częstotliwości drgań własnych oraz odpowiadających im postaci drgań, jak również badanie zjawiska wzbudzenia drgań w wyniku nierównomiernego obciążenia satelitów [7]. Z drugiej strony zjawisko to autorzy artykułu [1] wykorzystali do eliminowania niekorzystnych postaci drgań, w których ruch wykonywały tylko koła satelitarne. Konwencję metody sztywnych elementów skończonych wykorzystano natomiast do uzyskania modelu przestrzennego przekładni planetarnych [6, 9]. Autorzy pracy [3] wykorzystali metodę grafów do analizy i syntezy przekładni planetarnych pod

kątem analizy kinematycznej i kineto statycznej. W pracy [8] topologiczne własności grafów opisujących przekładnię zastosowano w odwrotnej analizie dynamicznej. Opracowywano również metody modelowania przekładni planetarnej o dowolnej konfiguracji. W pracy [2] zdefiniowano osiem podstawowych struktur, z których można uzyskać, według autorów, wszystkie rodzaje przekładni planetarnych. Pewną niedogodnością może być duża liczba tych struktur oraz to, że wykorzystywany jest program do symulacji pod nazwą ITI-SIM. W pracy [10] zaproponowano metodę opartą na metodzie sztywnych elementów skończonych, w której stosując, stałe dla wszystkich przekładni planetarnych, połączenia sprężyste pomiędzy elementami sztywnymi (koła zębate, jarzma) metodycznie buduje się macierze bezwładności i sztywności. Niniejsza praca jest rozwinięciem tej ostatniej metody.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie metody budowania matematycznych modeli drgań skrętnych przekładni planetarnych o dowolnej konfiguracji. Umożliwia to metodyczny sposób budowy macierzy systemowych tych modeli, na podstawie parametrów geometrycznych i fizycznych kół przekładni i jarzm oraz wzajemnych ich połączeń. Na tym etapie pracy modele te są liniowymi modelami drgań skrętnych. Ponadto zakłada się idealne, symetryczne rozmieszczenie satelitów, bezodchyłkową geometrię zazębienia kół oraz idealne łożyska. Należy jednak podkreślić, że wprowadzenie nieliniowości, a więc uwzględnienie na przykład luzów międzyzębnych, czy zmiennej sztywności zazębienia, odbywa się w bardzo prosty sposób, dopiero na etapie rozwiązywania różniczkowych równań ruchu. Na uwagę zasługuje fakt, że otrzymany model matematyczny jest w postaci macierzowej, a to umożliwia wykorzystanie raz otrzymanego modelu do analizy dynamicznej przekładni z różnymi jej modyfikacjami, zależnymi od wyboru unieruchomionego elementu. Unieruchomienie wybranego elementu przekładni planetarnej polega w tym przypadku na usunięciu odpowiadającego mu stopnia swobody. W praktyce obliczeniowej polega to na usunięciu wiersza i kolumny w macierzach systemowych, odpowiadających współrzędnej uogólnionej związanej z tym elementem.

2. Model matematyczny

Do opracowania matematycznego modelu przekładni planetarnej o dowolnej konfiguracji zastosowano znaną metodę sztywnych elementów skończonych [11]. W metodzie tej układy rzeczywiste dyskretyzuje się za pomocą sztywnych elementów skończonych (SES) połączonych elementami sprężysto-tłumiącymi (EST). W przypadku przekładni planetarnych jako sztywne elementy skończone przyjęto koła satelitarne, koła słoneczne, koła o uzębieniu wewnętrznym oraz jarzma. Autor celowo użył liczby mnogiej w odniesieniu do każdego z elementu przekładni planetarnej, ponieważ przedstawiana tutaj metoda może być stosowana do modelowania rozbudowanych, wielostopniowych przekładni, w której liczba każdego rodzaju elementu takiej przekładni, nie licząc kół satelitarnych, może być większa od jeden. Sztywne elementy skończone posiadają charakterystyki opisane masami i masowymi momentami bezwładności elementów przekładni, natomiast elementy sprężysto-tłumiące posiadają charakterystyki wynikające ze sztywności zazębienia kół satelitarnych z kołem słonecznym i kołem o uzębieniu wewnętrznym oraz sztywności łożyskowania satelitów w jarzmie. Różniczkowe równanie ruchu wyprowadza się z równania Lagrange'a drugiego rodzaju (1) [4, 11]. Jako

współrzędne uogólnione przyjmuje się przemieszczenia kątowe wszystkich elementów przekładni i przemieszczenia liniowe środków mas satelitów oraz zestawia się w postaci:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) + \frac{\partial E_p}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{Q} \quad (1)$$

macierzy kolumnowej współrzędnych uogólnionych \mathbf{q} . Wobec tego energie występujące w równaniu (1) można obliczyć jako następujące formy kwadratowe:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \\ E_p &= \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \\ R &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (2)$$

Po podstawieniu zależności (2) do równania (1) i wykonaniu odpowiednich działań otrzymuje się różniczkowe równanie ruchu przekładni w postaci macierzowej:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{Q} \quad (3)$$

Obliczenie energii kinetycznej przekładni planetarnej nie następuje żadnych problemów, gdyż biorąc pod uwagę fakt, że w przypadku modelu drgań skrętnych, koła satelitarne wykonują ruch płaski, a wszystkie pozostałe elementy ruchu obrotowy względem stałych osi obrotu. Wobec tego globalna macierz bezwładności \mathbf{M} jest macierzą diagonalną, w której masy i masowe momenty bezwładności elementów przekładni występują wzdłuż przekątnej w takiej samej kolejności, w jakiej odpowiadające im współrzędne uogólnione występują w macierzy kolumnowej współrzędnych uogólnionych \mathbf{q} .

Energia potencjalna przekładni planetarnej jest równa sumie energii potencjalnych pojedynczych elementów sprężysto-tłumiących (4).

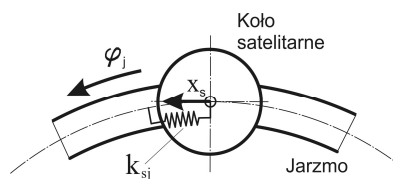
$$E_p = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \left(\sum_{k=1}^m \mathbf{K}_k \right) \mathbf{q} \quad (4)$$

Wyróżniono cztery typy tych elementów w przekładni planetarnej, w zależności od rodzaju elementów będących w sprzężeniu: typ *sj* – koło satelitarne i jarzmo, typ *sc* – koło satelitarne i koło słoneczne, typ *sw* – koło satelitarne i koło o uzębieniu wewnętrznym, typ *ss* – koło satelitarne i koło satelitarne. Na rys. 1, w sposób graficzny przedstawiono cztery typy połączeń pomiędzy elementami przekładni planetarnej. Macierze \mathbf{K}_k , występujące w równaniu (4), są globalnymi macierzami sztywności elementów EST.

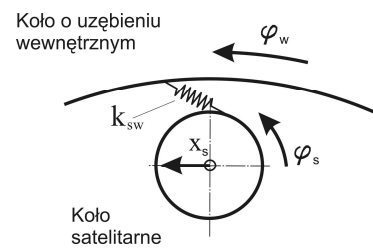
Zwroty wektorów przemieszczeń liniowych środków mas kół satelitarnych oraz kierunki przemieszczeń kątowych wszystkich kół przedstawione na rys. 1 przyjęto jako dodatnie. Wobec tego energie potencjalne tych połączeń obliczone jako połowa iloczynu kwadratu ich deformacji przez odpowiednie współczynniki sztywności przedstawiają zależności (5).

$$\begin{aligned}
 E_p^{sc} &= \frac{1}{2} k_{sc} (x_s - \varphi_s r_s - \varphi_c r_c)^2 & E_p^{sw} &= \frac{1}{2} k_{sw} (x_s + \varphi_s r_s - \varphi_w r_w)^2 \\
 E_p^{ss} &= \frac{1}{2} k_{ss} (x_{s1} + \varphi_{s1} r_{s1} - x_{s2} + \varphi_{s2} r_{s2})^2 & E_p^{sj} &= \frac{1}{2} k_{sj} (x_s - \varphi_j r_j)^2
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

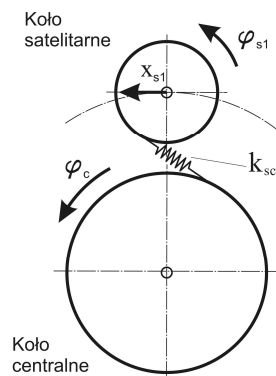
EST typu sj



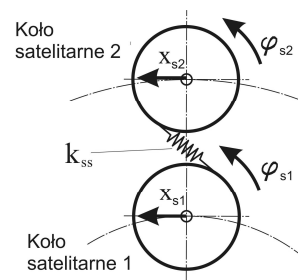
EST typu sw



EST typu sc



EST typu ss



Rys. 1. Typy elementów sprężysto-tłumiących w przekładni planetarnej

Fig. 1. The types of stiffness damping elements of a planetary gear

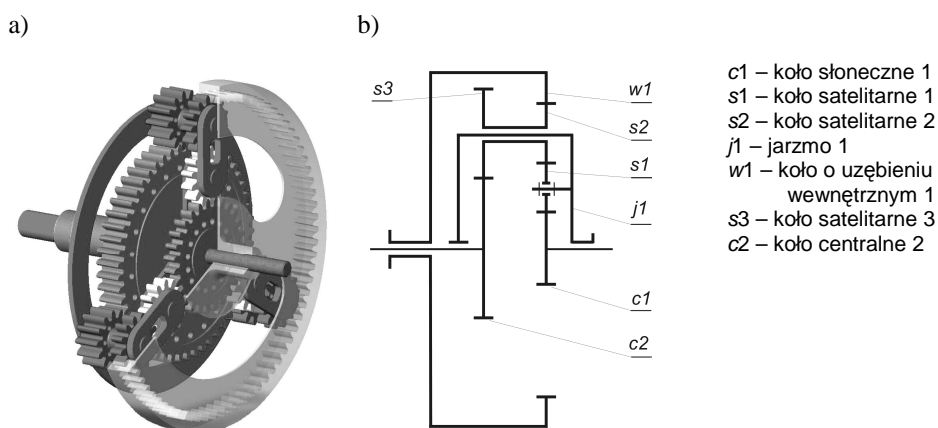
Na podstawie zależności (5) i przy wykorzystaniu równania Lagrange'a drugiego rodzaju, lokalne macierze sztywności odpowiadające poszczególnym typom elementów sprężysto-tłumiącym wyrażają zależności (6).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{sj} &= k_{sj} \begin{bmatrix} 1 & -r_j \\ \text{sym} & r_j^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_s \\ \varphi_j \end{matrix} & \mathbf{K}_{sw} &= k_{sw} \begin{bmatrix} 1 & r_s & -r_w \\ r_s^2 & -r_s r_w & r_w r_s \\ \text{sym} & & r_w^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_s \\ \varphi_s \\ \varphi_w \end{matrix} \\
 \mathbf{K}_{sc} &= k_{sc} \begin{bmatrix} 1 & -r_s & -r_c \\ r_s^2 & r_c r_s & r_c r_s \\ \text{sym} & & r_c^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_s \\ \varphi_s \\ \varphi_c \end{matrix} & \mathbf{K}_{ss} &= k_{ss} \begin{bmatrix} 1 & r_{s1} & -1 & r_{s2} \\ r_{s1}^2 & -r_{s1} & r_{s1} r_{s2} & \\ & & 1 & -r_{s2} \\ \text{sym} & & & r_{s2}^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_{s1} \\ \varphi_{s1} \\ x_{s2} \\ \varphi_{s2} \end{matrix}
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Wiersze i kolumny lokalnych macierzy sztywności EST (6) odpowiadają współrzędnym uogólnionym przypisanym elementom przekładni planetarnej występującym w tych połączeniach. Uwzględniając ten fakt, w celu otrzymania globalnej macierzy sztywności danego typu połączenia należy zdefiniować zerową macierz kwadratową o wymiarze równym wymiarowi macierzy kolumnowej współrzędnych uogólnionych \mathbf{q} , a następnie elementy lokalnej macierzy sztywności tego połączenia rozmieścić w wierszach i kolumnach odpowiadających współrzędnym uogólnionym jego elementów.

3. Przykład obliczeniowy

W celu zademonstrowania efektywności prezentowanej metody systematycznego budowania modeli matematycznych przekładni planetarnych przyjęto do analizy przekładnię typu Ravigneaux, która jest dwustopniową przekładnią planetarną z dwoma kołami centralnymi, jednym jazmem, jednym kołem o uzębieniu wewnętrznym i podwójnym rzędem satelitów. Stosowana jest powszechnie w automatycznych skrzyniach biegów pojazdów. Przykładowy model takiej przekładni przedstawiono na rys. 2a, a jej schemat kinematyczny na rys. 2b.



Rys. 2. Przekładnia planetarna typu Ravigneaux: a) model bryłowy [12], b) schemat kinematyczny

Fig. 2. Ravigneaux planetary gear: a) 3D CAD model [12], b) kinematic scheme

Współrzędne uogólnione uporządkowano w postaci następującej macierzy kolumnowej \mathbf{q} :

$$\mathbf{q} = [x_{s1}, \varphi_{s1}, \varphi_{c1}, \varphi_{j1}, x_{s2}, \varphi_{s2}, \varphi_{c2}, \varphi_{w1}]^T \quad (7)$$

Biorąc pod uwagę kolejność współrzędnych uogólnionych w macierzy \mathbf{q} (7), macierz bezwładności przekładni jest macierzą diagonalną, którą przedstawia zależność (8):

$$\mathbf{M} = \text{diag}(3m_{s1}, 3I_{s1}, I_{c1}, I_{j1}, 3m_{s2}, 3I_{s2}, I_{c2}, I_{w1}) \quad (8)$$

Globalną macierz tłumienia wyznacza się podobnie jak globalną macierz sztywności, z tą różnicą, że zamiast współczynników sztywności połączeń sprężysto-tłumiących bierze się pod uwagę współczynniki tłumienia lub oblicza się tę macierz jako kombinację liniową macierzy bezwładności \mathbf{M} i macierzy sztywności \mathbf{K} . Otrzymany model matematyczny odpowiada przypadkowi, gdy żaden z elementów przekładni nie jest zablokowany, a jego ruchliwość wynosi dwa. W celu uzyskania ruchliwości jeden, jeden z jej elementów powinien być zablokowany.

4. Wnioski

W niniejszej pracy przedstawiono metodę budowania modeli matematycznych przekładni planetarnych o dowolnej liczbie elementów i dowolnej konfiguracji. Modele te są dynamicznymi równaniami ruchu w postaci macierzowej. Forma taka umożliwia analizę dynamiczną przekładni z różnymi unieruchomionymi elementami, co jest cechą charakterystyczną i decydującą o szerokim zastosowaniu przekładni planetarnych w układach napędowych pojazdów i urządzeń. Metoda ta może być bardzo efektywną i wygodną w analizie dynamicznej pewnej klasy zagadnień, również zagadnień nieliniowych. Chociaż w pracy zademonstrowano budowę modelu matematycznego przekładni planetarnej w sposób „ręczny”, to metoda ta doskonale nadaje się do algorytmizacji procesu budowy modeli matematycznych i opracowania programu komputerowego.

Badania są realizowane w ramach projektu finansowego przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego, grant nr N504 340336.

Literatura

- [1] Amarisha V.K., Parker R.G., *Suppression of planet mode response in planetary gear dynamics through mesh phasing*, Journal of Vibration and Acoustic, Vol. 128, April 2006, s. 133-142.
- [2] Dresig H., Schreiber U., *Vibration analysis for planetary gears. Modeling and multibody simulation*, Proceedings of ICMEM2005, International Conference on Mechanical Engineering and Mechanics. 2005, October 26–28, Nanjing, China, Vol. 1, s. 24-28.
- [3] Drewniak J., Zawisłak S., *Linear-graph and contour-graph-based models of planetary gears*, Journal of Applied Mechanics, Vol. 48, No. 2, Warsaw 2010, s. 415-433.
- [4] Gutowski R., *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa 1971.
- [5] Kahraman A., *Free torsional vibration characteristics of compound planetary gear sets*, Mechanism and Machine Theory, Vol. 36, 2001, s. 953-971.
- [6] Mężyk A., *Analiza i kształtowanie cech dynamicznych napędów elektromechanicznych*, Monografia, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2002.

- [7] Parker R.G., Lin J., *Mesh Phasing Relationships in Planetary and Epicyclic Gears*, Journal of Mechanical Design Copyright, Vol. 126, March 2004, s. 365-370.
- [8] Pennestri E., *Dynamic Analysis of Epicyclic Gear Trains by Means of Computer Algebra*, Multibody System Dynamics, Vol. 7, 2002, s. 249-264.
- [9] Rak Z., Świtoński E., *Modelling of planetary gear*, Proceedings of the IIIrd Intern. Scien. Conf. on „Achievements in the Mechanical and Material Engineering”, Gliwice 1994, s. 301-310.
- [10] Rak Z., *Automatic building torsional mathematical models of planetary gears*, Modelling and optimization of physical systems, ZN Pol. Śl., Gliwice 2010.
- [11] Wittbrodt E., Kruszewski J., Sawiak S., *Metoda sztywnych elementów skończonych w dynamice konstrukcji*, WNT, Warszawa 1999.
- [12] Dokumentacja on-line pakietu SimDriveline[®] programu Matlab[®], firmy Mathworks, <http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/toolbox/physmod/drive/ravigneaux.html>.