

JACEK RYSIŃSKI, KRYSPIŃ MIROTA*

OSZACOWANIE LICZEBNOŚCI REPREZENTACYJNEJ
PRÓBEK KÓŁ DO BADAŃ NA STANOWISKU
MOCY ZAMKNIĘTEJ

EVALUATION OF THE NUMBER ELEMENTS
IN REPRESENTATIVE SAMPLE OF GEARED WHEELS
FOR THE POWER-CLOSED-LOOP TEST STAND
INVESTIGATION

Streszczenie

W niniejszej pracy przedstawiono dwie zasadnicze metodyki i sposoby podejścia do problemu losowania próbek oraz wynikające stąd konsekwencje dla postaci estymatorów statystyk populacji w kontekście wyznaczenia empirycznej krzywej Wöhlera na stanowisku mocy zamkniętej.

Słowa kluczowe: stanowisko mocy zamkniętej, krzywa Wöhlera, badania doświadczalne

Abstract

Two basic methods and approaches to the problem of drawing of geared wheels are presented in the paper. The consequences of the chosen methodology are the types of estimators of random variables representing the population of outcomes-taking into account the purpose of investigations i.e. determining the Wöhler curve based upon test performed on the power-closed-loop test stand.

Keywords: power-closed-loop test stand, Wöhler curve, measurement

* Dr inż. Jacek Rysiński, dr inż. Kryspin Mirola, Katedra Podstaw Budowy Maszyn, Wydział Budowy Maszyn i Informatyki, Akademia Techniczno-Humanistyczna w Bielsku-Białej.

Oznaczenia

a, b	– parametry empiryczne równania regresji
c	– stała materiałowa
k	– współczynnik zależny od rozciągłości krzywej zmęczeniowej
n	– liczebność próby
N	– liczba cykli obciążenia w zakresie ograniczonej wytrzymałości
$N_{F \text{ lim}}$	– teoretyczna graniczna liczba cykli
m	– przedział klasowy
m_F	– współczynnik kierunkowy pochylonej części wykresu Wöhlera
P	– prawdopodobieństwo wystąpienia zniszczenia zmęczeniowego
r	– współczynnik korelacji z próby
s	– odchylenie standardowe
\hat{s}	– skorygowane odchylenie standardowe
t_α	– zmienna losowa rozkładu t-Studenta
u_α	– zmienna losowa rozkładu normalnego Gaussa
x, y	– zmienne losowe
\tilde{y}	– oszacowanie wartości zmiennej zależnej
α	– poziom istotności
γ	– współczynnik zmienności wariancji granicy zmęczenia
δ	– błąd pomiaru, oszacowanie przedziału ufności cechy θ
θ	– wartość estymowana cechy populacji generalnej
ν_i	– częstość w obrębie przedziału klasowego i
σ_a	– amplituda naprężeń [MPa]
$\bar{\sigma}_a$	– średnia wartość amplitudy naprężeń [MPa]
$\sigma_{F \text{ lim}}$	– nieograniczona wytrzymałość zmęczeniowa podstawy zęba [MPa]
σ_w	– granica wytrzymałości [MPa]

1. Wstęp

Przystępując do badań eksperymentalnych, stajemy przed problemem wyboru spośród zbiorowości statystycznej tak, aby uzyskana próba odtwarzała sposób kształtowania się wybranej cechy lub cech populacji generalnej. Sposób próbkowania populacji generalnej, a więc przyjęty schemat losowania, może być zrealizowany zasadniczo na dwa sposoby, jako losowanie:

- niezależne, kiedy wylosowany element jest każdorazowo zwracany tak, że może być wylosowany powtórnie,
- zależne, czyli losowanie bez zwracania, kiedy dany element może być wylosowany tylko jednokrotnie,

różniące się nie tylko oszacowaniem minimalnej liczebności próby reprezentatywnej, ale co nie mniej istotne – postacią estymatorów statystyk populacji generalnej [1, 3, 5].

2. Koncepcja opracowania wyników z badań doświadczalnych

Jednym z podstawowych zadań aplikacyjnych rozstrzyganych na gruncie statystyki matematycznej jest estymacja przedziałowa wybranej cechy θ populacji generalnej, mającej na celu stworzenie przedziału ufności $\langle -\delta, \delta \rangle$, w którym z zadaniem prawdopodobieństwem p , zlokalizowana będzie wartość θ . Niestety może się okazać, że przy ustalonej z góry liczebności próby n szerokość tego przedziału, a więc i błąd oszacowania δ wartości θ będzie nadmiernie duży. Tak też w metodzie reprezentacyjnej formuluje się to zadanie w sposób odwrotny, jak dobrać liczebność próby n , aby oszacowanie parametru θ odbyło się z zadaniem z góry błędem δ . Aby możliwe było jednoznaczne rozstrzygnięcie tego problemu, potrzebna jest na wstępie znajomość postaci rozkładu dla szacowanego parametru. W kontekście rozpatrywanych tu zagadnień regułą jest założenie o charakterze normalnym rozkładu (lub zbliżonym do normalnego). Zatem abstrahując od rodzaju badanej cechy, zmienna losowa x posiada aproksymatę rozkładu funkcji gęstości prawdopodobieństwa w postaci równania

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1)$$

gdzie σ reprezentuje wariancję, zaś m – wartość oczekiwaną badanej cechy. Jest to założenie o tyle słuszne, że dotyczy zmiennych losowych, których wartość zmienia się pod wpływem dużej ilości niezależnie działających czynników. Oprócz postaci rozkładu, na sposób oszacowania minimalnej liczebności próby istotny wpływ ma, co nie może być zaskoczeniem, rodzaj parametru rozkładu, jaki podlega estymacji, jak i przyjęty schemat losowania. Przykładowo nie jest możliwe, w ogólności stworzenie tego rodzaju oszacowanie dla wariancji populacji σ^2 . Szczęśliwie dla większości rozpatrywanych tu zastosowań praktycznych szacowaniu podlega najczęściej wartość oczekiwana populacji m , kiedy to liczebność n jest warunkowana miarami dyspersji, których określenie na drodze doświadczalnej jest stosunkowo łatwe.

Rozpatrzmy na początek schemat losowania niezależnego, cechy o rozkładzie $N(m, \sigma)$, dla której estymacji podlegać będzie wartość oczekiwana. Jeżeli znana jest wartości wariancji σ^2 , a poziom ufności wynosi $1-\alpha$, to błąd szacunku nie przekroczy δ , jeżeli liczebność będzie nie mniejsza niż [1, 3, 5]

$$n = \frac{u_\alpha \sigma^2}{\delta^2}, \quad (2)$$

przy czym u_α reprezentuje wartość zmiennej losowej rozkładu standaryzowanego $N(0, 1)$, tak że $P\{-u_\alpha < u < u_\alpha\}$. Ponieważ zwykle wartość wariancji σ^2 nie jest znana, możemy

wykorzystać celem jej oszacowania inną miarę dyspersji w postaci odchylenia standardowego uzyskanego z pewnej wstępnej próby o liczebności n_0

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{n_0 - 1} \sum_{i=1}^{n_0} (x_i - \bar{x})^2, \quad (3)$$

choć w tym przypadku będziemy już mieli do czynienia z rozkładem t-Studenta

$$n = \frac{t_\alpha^2 \hat{s}^2}{\delta^2}, \quad (4)$$

przy czym t_α jest wartością zmiennej t-Studenta odpowiadającą poziomowi ufności $1 - \alpha$, dla próby o $n_0 - 1$ stopniach swobody. Dla tak założonej liczebności próby przedział ufności dla średniej m populacji określa

$$P\left\{ \bar{x} - t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n-1}} < m < x + t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n-1}} \right\} = 1 - \alpha, \quad (5)$$

lub równoważnie

$$P\left\{ \bar{x} - t_\alpha \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} < m < x + t_\alpha \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} \right\} = 1 - \alpha, \quad (6)$$

gdzie odchylenie

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad (7)$$

i odchylenie skorygowane

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}. \quad (8)$$

Jeżeli populacja generalna będzie miała skończoną liczbą elementów N , a wylosowano z niej zależnie pewną skończoną liczbą elementów n , w obrębie, której dyspersja może być oszacowana odchyleniem skorygowanym \hat{s} , to przedział ufności dla średniej populacji, przy zadanym poziomie ufności $1 - \alpha$, w przeciwieństwie do wcześniejszej zależności jako, [3, 5]

$$P\left\{ \bar{x} - t_\alpha \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{n}{N}} < m < \bar{x} + t_\alpha \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{n}{N}} \right\} = 1 - \alpha, \quad (9)$$

lub kiedy znana jest wariancja σ^2

$$P\left\{\bar{x} - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{n}{N}} < m < \bar{x} + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{n}{N}}\right\} = 1 - \alpha. \quad (10)$$

Oszacowanie niezbędnej liczebności próby reprezentacyjnej ma postać, [3, 5]

$$n = \frac{N}{1 + \frac{N \delta^2}{u_\alpha^2 \sigma^2}}, \quad (11)$$

dla założonego poziomu ufności α .

3. Praktyczna metoda oszacowania liczebności próby

Oszacowanie liczebności próby reprezentacyjnej w przypadku ogólnym, jest zawsze problematyczne i może przysporzyć niemało trudności, nawet jeżeli estymacja przedziałowa ograniczać się będzie do wartości oczekiwanej badanej cechy. W każdym przypadku konieczna jest znajomość miary dyspersji oraz identyfikacja odniesienia przyjętego próbkowania w właściwej klasie schematów losowania.

W gruncie rzeczy można by powiedzieć, że każdy, bądź prawie każdy, z ogólnie stosowanych sposobów próbkowania stanowi schemat zależny. Znajduje to konsekwencje nie tylko w sposobie szacowania liczebności próby, ale – co gorsza – skutecznie utrudnia późniejszą analizę uzyskanych wyników. Przykładowo, dla warunków losowania niezależnego estymator wartości oczekiwanej, czyli średnia z próby, ma już wariancję $\sigma^2/n \cdot (N-n)/(N-1)$. Gdyby spróbować odnieść się do problematyki badań przekładni/kół zębatych, to w rozpatrywanym w niniejszej pracy kontekście wybór określonego egzemplarza i prowadzenie ma nim badań wiąże się nierozzerwalnie z jego finalnym zniszczeniem. W rezultacie nie może on podlegać zwracaniu i być ponownie wylosowany, co potwierdza fakt zaistnienia losowania zależnego. Z drugiej jednak strony kolejne egzemplarze do badań nie są pobierane z wąskiej i szczególnie zróżnicowanej populacji, ale stanowią jeden z bardzo wielu mało różniących się egzemplarzy powstających według ściśle sprecyzowanej i powtarzalnej technologii ich wytwarzania. Tak też prawdopodobieństwo ponownego wylosowania egzemplarza o zbliżonych wartościach cechy jest tu duże, a rozpatrywanie schematu losowania zależnego nie znajduje – w tym przypadku – uzasadnienia praktycznego.

Założmy teraz, że możliwe jest przyjęcie ciągu narastających wartości amplitudy naprężeń σ_{ai}

$$\sigma_{a1}, \sigma_{a2}, \sigma_{a3}, \dots, \sigma_{am},$$

odpowiednio do oczekiwanej postaci wykresu Wöhlera, nazwijmy ją aprioryczną, właściwą dla konkretnego stanowiska badawczego i przedmiotu badań. Uzyskujemy w ten sposób m przedziałów klasowych, w obrębie, których częstości względne wyniosą

$$v_1 = \frac{n_1}{n}, v_2 = \frac{n_2}{n}, v_3 = \frac{n_3}{n}, \dots, v_m = \frac{n_m}{n},$$

co daje średnią wartość amplitudy naprężeń

$$\bar{\sigma}_a = \frac{\sum_{i=1}^m v_i}{\sum_{i=1}^m \sigma_{ai}^2} \cdot \quad (12)$$

Wówczas dla niezbędnej liczebności próby przyjąć można oszacowanie

$$n = \frac{\gamma_{0,5}^2}{\delta_{0,5}^2 \sigma_{0,5}^2} s_{\sigma_{0,5}}^2 \quad (13)$$

wykorzystując wprost estymator przedziałowy podany wcześniej dla wartości oczekiwanej, obliczony tym razem dla wartości mediany amplitudy naprężeń $\sigma_{0,5}$. Wartość odchylenia dla amplitudy naprężeń, przy założeniu m przedziałów klasowych wynosi:

$$s_{\sigma_{0,5}}^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^m \frac{v_i}{\sigma_{ai}^2}} + \frac{(\sigma_{0,5} - \bar{\sigma}_a)}{\sum_{i=1}^m v_i \left(1 - \frac{\bar{\sigma}_a}{\sigma_{ai}}\right)} \quad (14)$$

W przeciwieństwie do podanego wcześniej estymatora średniej, tutaj wprowadzono medianę $\sigma_{0,5}$, dla której znacznie łatwiej o oszacowanie aprioryczne. Według danych literaturowych można przyjąć w tym celu

$$\sigma_{0,5} = (0,55 - 0,0001 \sigma_w) \sigma_w \quad (15)$$

gdzie: σ_w – reprezentuje umowna granicę wytrzymałości.

Pozostaje jeszcze przyjąć oszacowania dla błędu względnego $\delta_{0,5}$ oraz współczynnik zmienności wariancji $\gamma_{0,5}$. Niestety o ile dla błędu względnego jest to niezwykle proste i oczywiste, to już dla współczynnika $\gamma_{0,5}$ jest już mocno problematyczne. Zamiast tego niektórzy autorzy proponują raczej rozpatrywanie tych parametrów łącznie, jako:

$$k_{0,5} = \frac{\gamma_{0,5}}{\delta_{0,5}}, \quad (16)$$

bo jak pokazuje to praktyka badań przekładni, może on być przyjęty, z dostatecznie dużą dokładnością, $k_{0,5} = 5 \dots 10$, dla badań w warunkach wysokiej dokładności, 2,86...4, średniej i 2...2,5 niskiej, odpowiednio do potrzeb i możliwości określonych warunkami realizowanych badań. W takim razie jako ostateczne oszacowanie niezbędnej liczebności próby reprezentatywnej przyjmujemy

$$n = \left(1 - \frac{k_{0,5}}{\sigma_{0,5}} \right)^2 \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^m \frac{v_i}{\sigma_{ai}^2}} + \frac{(\sigma_{0,5} - \bar{\sigma}_a)^2}{\sum_{i=1}^m v_i \left(1 - \frac{\bar{\sigma}_a}{\sigma_{ai}} \right)^2} \right). \quad (17)$$

4. Empiryczna krzywa Wöhlera

Zadanie ustalenia współzależności między dwiema zmiennymi losowymi, do czego sprowadza się określenie empirycznej krzywej Wöhlera, na gruncie statystyki matematycznej nosi nazwę „analizy regresji”. W praktyce wyróżnia się dwie metody realizacji analizy regresji zmiennych losowych (X, Y) :

- regresja pierwszego rodzaju, kiedy poszukiwana jest funkcja $f(X)$, która minimalizuje wartość oczekiwaną $(Y - f(X))^2$, a więc wartość oczekiwaną warunkowego rozkładu zmiennej losowej Y względem X ,
- regresja drugiego rodzaju, również zakłada poszukiwanie funkcji minimalizującej wartość oczekiwaną $(Y - f(X))^2$, aczkolwiek wybierana jest *a priori* funkcja określonej klasy (zwykle liniowa).

W kontekście rozpatrywanego problemu poszukiwania empirycznej krzywej Wöhlera, zadanie w oczywisty sposób sprowadza się do przypadku regresji drugiego rodzaju.

Analiza regresji liniowej

Założmy na wstępie, że dla zadania regresji drugiego rodzaju wybrano funkcję liniową postaci ogólnej

$$y = a \cdot x + b. \quad (18)$$

Zadanie analizy regresji sprowadza się do poszukiwania minimum funkcji

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - a \cdot x_i - b)^2, \quad (19)$$

co z zastosowaniem klasycznej analizy matematycznej, po obliczeniu pochodnych i przekształceniu, prowadzi do, [2, 4]

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (20)$$

czyli ostatecznie

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}. \quad (21)$$

Składnik b równania regresji możemy teraz łatwo obliczyć, podstawiając

$$b = \bar{y} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} \cdot \bar{x}. \quad (22)$$

W takim przypadku można wprowadzić miarę dyspersji próby losowej, względem uzyskanej funkcji regresji, tradycyjnie w postaci odchylenia standardowego

$$s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{y}_i)^2}{n-2}, \quad (23)$$

gdzie \tilde{y}_i reprezentuje wartość zmiennej zależnej określoną według równania regresji liniowej, co pozwala skonstruować przedział ufności estymowanych wartości zmiennej zależnej w populacji generalnej, dla dowolnie wybranego prawdopodobieństwa $1-\alpha$, w postaci

$$\tilde{y}_i \pm t_\alpha s_y \sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right)}. \quad (24)$$

gdzie t_α określa wartość statystyki t-Studenta dla wybranego poziomu istotności α i n -stopni swobody.

Weryfikację jakości związku między obiema zmiennymi losowymi x i y można zweryfikować za pomocą testu serii.

Analiza regresji dla przypadku funkcji nieliniowej

W istocie jednak zależność liniowa nie często jest obserwowana w praktyce, przez co możliwości bezpośredniego zastosowania metod analizy regresji drugiego rodzaju dla funkcji liniowej są ograniczone. Z drugiej zaś strony modele probabilistyczne są dość dobrze sformalizowane i łatwe do zastosowania (w przeciwieństwie do metod regresji nieliniowej [4]). Szczęśliwie wiele z przypadków regresji nieliniowej można drogą prostych przekształceń sprowadzić do przypadku liniowego. Przykłady tego rodzaju funkcji zestawiono w tabeli.

Tabela 1

Przykłady zamiany funkcji nieliniowych

Model nieliniowy	Zamiana zmiennych		Współczynniki	
	y	x	a	b
$u = \alpha + \frac{\beta}{v}$	u	$\frac{1}{v}$	α	β
$u = \frac{\alpha}{\beta + v}$	$\frac{1}{u}$	v	$\frac{\beta}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha}$
$u = \frac{v}{\beta + v}$	$\frac{1}{u}$	$\frac{1}{v}$	$\frac{\beta}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha}$
$u = \alpha \cdot \beta^v$	$\log u$	v	$\log \alpha$	$\log \beta$
$u = \alpha \cdot v^\beta$	$\log u$	$\log v$	$\log \alpha$	β
$u = \alpha \cdot e^{\beta v}$	$\ln u$	v	$\ln \alpha$	β
$u = \alpha \cdot e^{\frac{\beta}{v}}$	$\ln u$	$\frac{1}{v}$	$\ln \alpha$	β
$u = \alpha + \beta \cdot v^n$	u	v^n	α	β

W takim razie przypadek empirycznej krzywej Wöhlera

$$N = c \left(\frac{\sigma}{\bar{\sigma}} \right)^n, \quad (25)$$

można łatwo sprowadzić do zagadnienia regresji liniowej poprzez logarytmowanie

$$\log N = \log \left(c \left(\frac{\sigma}{\bar{\sigma}} \right)^n \right), \quad (26)$$

$$\log N = \log c - n \log \bar{\sigma} + n \log \sigma, \quad (27)$$

$$\log N = \log \left(c \left(\frac{\sigma}{\bar{\sigma}} \right)^n \right), \quad (28)$$

$$\log N = \log c + \log \left(\frac{\sigma}{\bar{\sigma}} \right)^n, \quad (29)$$

oraz

$$\log N = \log c + n (\log \sigma - \log \bar{\sigma}), \quad (30)$$

$$\log N = \log c - n \log \bar{\sigma} + n \log \sigma, \quad (31)$$

czyli piąte podstawienie z wymienionych w tabeli. Dokonując odwrotnej transformacji, otrzymamy

$$y = \log N, \quad (32)$$

$$x = \log \sigma, \quad (33)$$

oraz

$$a = n, \quad (34)$$

$$b = \log c - n \log \bar{\sigma}, \quad (35)$$

czyli piąte podstawienie z wymienionych w tabeli. Dokonując odwrotnej transformacji, otrzymamy

$$N = 10^x, \quad (36)$$

$$\sigma = 10^y \quad (37)$$

i równocześnie

$$c = 10^{b + n \log \bar{\sigma}}. \quad (38)$$

Weryfikację na ile skuteczna okazała się linearyzacji, można przeprowadzić, wykorzystując wymieniony wcześniej test serii lub obliczając współczynnik korelacji r z linearyzowanej próby, [2, 4]

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (39)$$

choć estymacja współczynnika korelacji dla populacji nie jest równie prosta.

Podejmując próbę utworzenia empirycznej krzywej, pozostaje jeszcze uwzględnić fakt, że badania często prowadzone są w taki sposób, iż tworzy się m -przedziałów klasowych naprężeń m_j . W takim przypadku przed przystąpieniem do analizy regresji konieczne jest wprowadzenie uśrednień w obrębie przedziałów klasowych, obliczając

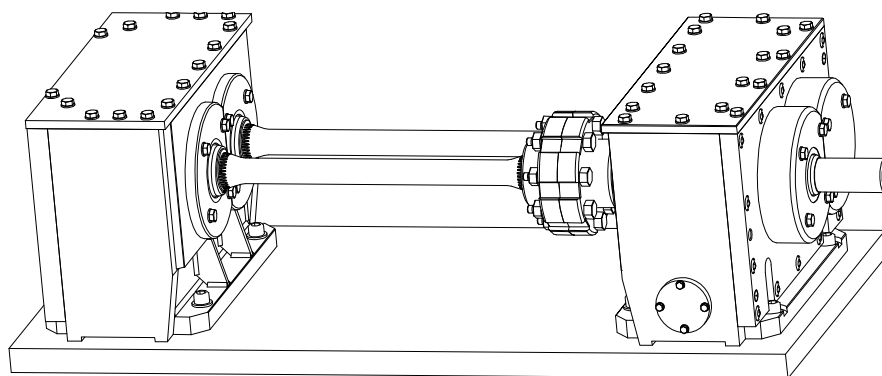
$$\bar{x}_i = \frac{\sum_{j=1}^{m_i} x_{ji}}{m_i} \quad (43)$$

oraz

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{m_i} y_{ji}}{m_i}. \quad (44)$$

5. Badania doświadczalne

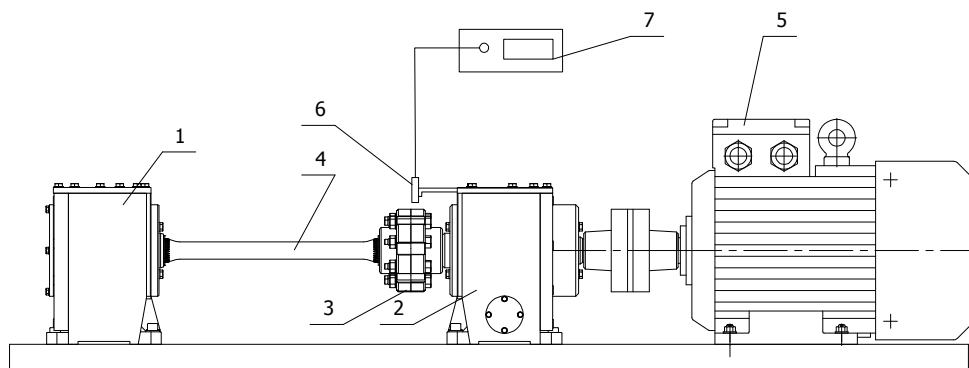
Weryfikację doświadczalną prezentowanej metody przeprowadzono na stanowisku mocy zamkniętej, własnej konstrukcji (rys. 1, rys. 2). W przekładni badawczej (1) zamontowane są koła próbki, z których zębniak jako najszabszy jest kołem pomiarowym. Skrzynka (2) stanowi przekładnię zamykającą układ mocy krążącej. Moment obciążający przekładnię realizuje się poprzez skręcenie wałów (4) przy użyciu sprzęgła napinającego (3). Za pomocą czujnika (6) można zmierzyć prędkość obrotową wałka skrętnego.



Rys. 1. Stanowisko badawcze

Fig. 1. Functional scheme of the test stand

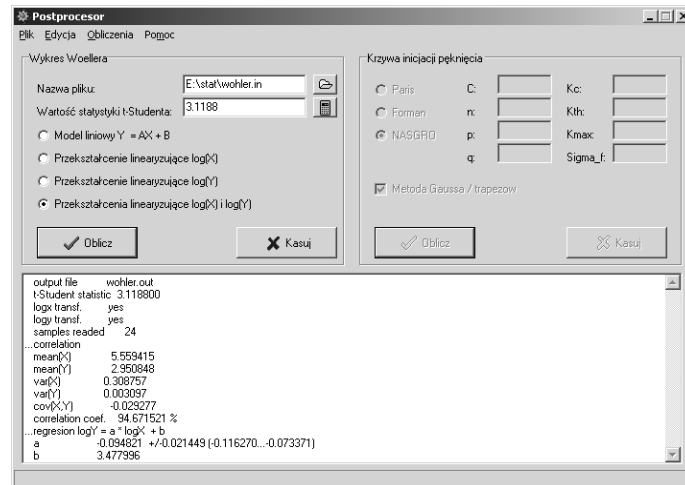
Koła – próbki przygotowane były do badań zgodnie z zaleceniami projektu normy ISO 6336. W trakcie wszystkich badań koła-próbki bada się na tego samego typu stanowiskach, a najlepiej na jednym wybranym kontrolując, co pewien czas stabilność zadawanych poziomów naprężenia. Koła-próbki wykonane były ze stali 17HMN.



Rys. 2. Stanowisko mocy zamkniętej: 1 – przekładnia badana, 2 – przekładnia zamykająca, 3 – sprzęgło napinające, 4 – wałek skrętny, 5 – silnik, 6 – czujnik prędkości obrotowej, 7 – rejestrator

Fig. 2. Closed-power-loop test stand: 1 – investigated gear, 2 – closing gear, 3 – tighten clutch, 4 – twisted shaft, 5 – motor, 6 – gauge of rotational velocity, 7 – computer registering the results of measurements

W celu analizy statystycznej wyników badań napisano program umożliwiający wykonanie analizy regresji liniowej i nieliniowej oraz wyznaczenie współczynnika korelacji (rys. 3).



Rys. 3. Analiza wyników pomiarów – wygląd okna programu

Fig. 3. Sample window in the prepared computer program

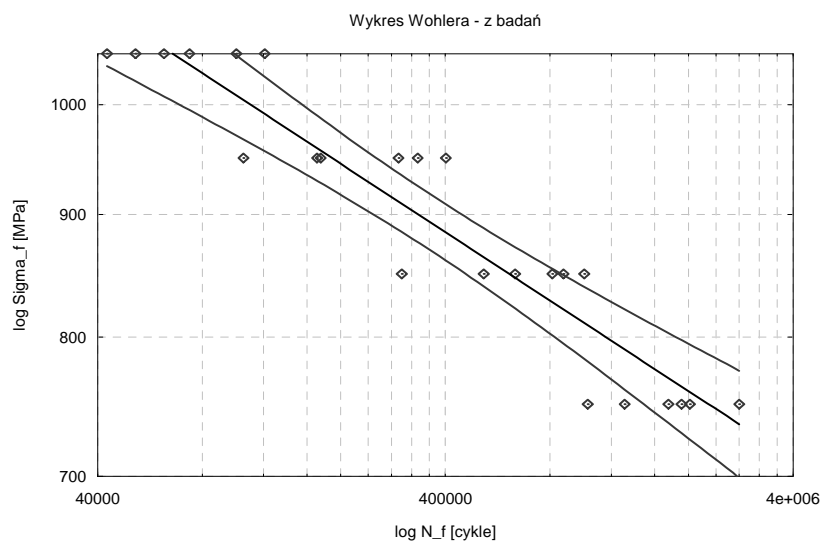
Wykonano po sześć prób wytrzymałościowych na każdym z czterech poziomów naprężeń w celu określenia trwałości zębów kół próbek wykonanych ze stali 17HMN. Kryterium wytrzymałościowym było wyłamanie zęba koła zębatego. Wyniki pomiarów przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2

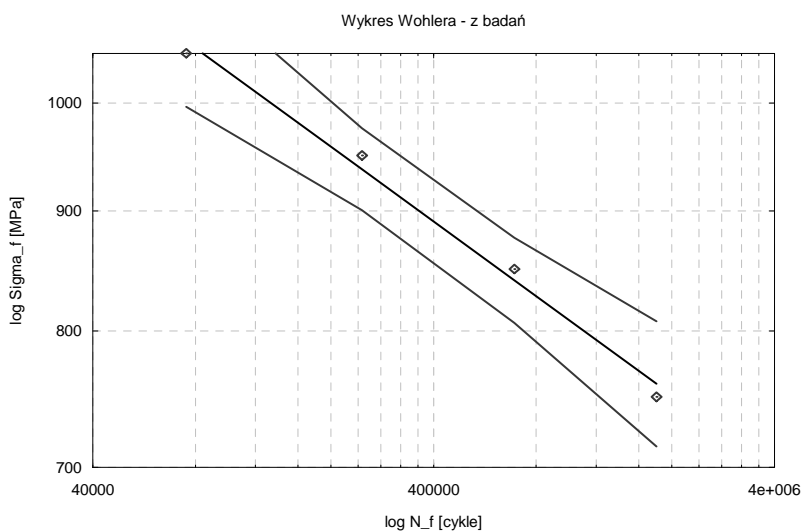
Wyniki pomiarów na stanowisku mocy zamkniętej

Naprężenie σ_F [MPa]	1	2	3	4	5	6
750	1 026 700	1 310 800	1 750 500	1 910 800	2 020 400	2 800 100
850	299 900	515 800	634 500	812 200	875 000	1 003 400
950	105 100	171 100	175 200	293 200	333 100	401 200
1050	42 600	51 400	62 100	73 500	100 300	120 900

W wyniku wykonanych obliczeń otrzymano wykres nachylonej części wykresu Wöhlera, przy założonym 5% przedziale ufności (rys. 4.).



Rys. 4. Statystycznie opracowany wykres zmęczeniowy Wöhlera dla pojedynczych wyników
 Fig. 4. Statistically analyzed Wöhler curve prepared for the single (non-aggregated) results



Rys. 5. Statystycznie opracowany wykres zmęczeniowy Wöhlera wykonany dla średniej trwałości
 Fig. 5. Statistically analyzed Wöhler curve prepared for the average fatigue life

Dla bazowej liczby cykli $N_{F \text{ lim}} = 3 \cdot 10^6$ otrzymano bazową wytrzymałość na złamanie $\sigma_{F \text{ lim}} = 731$ MPa, $m_F = 10,51$ oraz współczynnik korelacji 94,67 % dla nieliniowej

funkcji regresji. W niektórych opracowaniach można spotkać się z obliczeniami statystycznymi dla średniej wartości trwałości na poszczególnych poziomach naprężeń. W wyniku analizy otrzymano dla bazowej liczby cykli $N_{F\lim} = 3 \cdot 10^6$ bazową wytrzymałość na złamanie $\sigma_{F\lim} = 720$ MPa, $m_F = 9,44$ oraz współczynnik korelacji 99,52%. Do dalszej analizy wytrzymałościowej przyjmuje się wykres Wöhlera wykonany dla pojedynczych wyników (rys. 5).

6. Wnioski

W celu wykonania poprawnych obliczeń wytrzymałości części maszyn, a w szczególności kół zębatach, konieczna jest znajomość wykresu zmęczeniowego dla zastosowanego materiału. Możemy go otrzymać na podstawie badań stanowiskowych lub za pomocą symulacji.

W przypadku symulacji wystarczy znać model matematyczny krzywej zmęczeniowej i kilka jego parametrów. Może on być oparty na podejściu teoretycznym do zagadnienia zmęczenia lub na danych doświadczalnych.

W wyniku rozwiązania teoretycznego modelu otrzymuje się równanie statystyczne krzywej zmęczeniowej, wyrażające związek między naprężeniem rzeczywistym a liczbą cykli do zniszczenia. Reasumując, równanie to umożliwia określenie trwałości zmęczeniowej współpracujących elementów.

Wyniki uzyskane z badań stanowiskowych umożliwiają weryfikację modelu teoretycznego oraz w jednoznaczny sposób wyznaczają kierunki optymalizacji konstrukcji.

Rezultatem może być zmniejszenie masy elementów przy jednoczesnym utrzymaniu lub zwiększeniu wytrzymałości.

Jak wykazano, dokładność wyników zależy od jakości przygotowanych próbek badawczych, dokładności planowania i przeprowadzenia badań oraz analizy statystycznej wyników.

Literatura

- [1] Bracha C., *Teoretyczne podstawy metody reprezentacyjnej*, PWN, Warszawa 1996.
- [2] Kornacki J., Mielniczuk J., *Statystyka*, WNT, Warszawa 2001.
- [3] Lemeshov S., Levy P.S., *Sampling of Populations. Methods and Applications*, John Willey & Sons, New York 1999.
- [4] Oktaba W., *Metody statystyki matematycznej w doświadczeniu*, PWN, Warszawa 1986.
- [5] Thomson S.K., *Sampling*, John Willey & Sons, New York 2002.