

JAN RYŚ, TOMASZ KASPEREK*

DOBÓR WSPÓŁCZYNNIKÓW KOREKCJI
W PRZEKŁADNIACH PLANETARNYCHSELECTION OF MODIFICATION COEFFICIENTS
IN PLANETARY GEAR TRANSMISSION

Streszczenie

Celem niniejszej pracy jest prezentacja procedury obliczeniowej określającej dobór współczynników korekcji w planetarnych przekładniach zębatych z zazębieniem zewnętrznym kół. Tak więc po obróbce cieplnej konstrukcja przekładni planetarnej charakteryzuje się bardzo wysoką obciążalnością, zależną jednak od doboru współczynników korekcji. Jako przykład przyjęto koncepcję przekładni planetarnej o uproszczonej technologii, gdy koła centralne i słoneczne mają identyczną geometrię, a satelity różną ilość zębów, lecz procedura może być zastosowana do dowolnej przekładni planetarnej z zazębieniem zewnętrznym. Wymiary geometryczne będą opisane na bazie dopuszczalnej korekcji oraz warunków w odniesieniu do wymagań normy ISO oraz literatury.

Słowa kluczowe: planetarne przekładnie zębate, geometria kół zębatych, współczynniki korekcji, wytrzymałość postaciowa i kontaktowa zębów przekładni

Abstract

The aim of this article is to present design procedure of modification coefficient of toothed wheels of involutes planetary gear train with external conjunction of teeth. It is possible to obtain a better dimensional accuracy thanks to grinding process. Therefore, after heating treatment, the construction of these planetary gear is characterized by a higher load-carrying capacity which depends also with correction coefficient. As an example we take into consideration one conception of planetary gears with simplifying technology, when the same geometry of sun gear and central gear and different number satellite teeth, but the same procedure can be applied to other planetary external gear. Geometrical dimensions will be described for the sake of technological teeth correction scope and inequality restriction conditions are determined with respect to the ISO standards recommendations and the literature.

Keywords: planetary gear transmission, geometry of toothed wheels, modification coefficients, surface and bending strength of teeth.

* Prof. dr hab. inż. Jan Ryś, dr inż. Tomasz Kasperек, Instytut Konstrukcji Maszyn, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska.

1. Wstęp

Powszechną tendencją jest obecnie dążenie do zmniejszenia wymiarów zewnętrznych przekładni przy równoczesnym dążeniu do uproszczenia technologii oraz związanych z tym kosztów produkcji. Można zauważyć duże zainteresowanie przekładniami planetarnymi z zazębieniem zewnętrznym. Punktem odniesienia jest przekładnia wg schematu na rys. 1.

Zębata przekładnia planetarna z zazębieniem zewnętrznym walcowym należy do grupy przekładni mechanicznych o małych gabarytach, których projektowanie wymaga jednak spełnienia wielu warunków geometrycznych związanych z przełożeniem, liczbą zębów, ilością satelitów oraz doбором współczynników korekcji [6, 7].

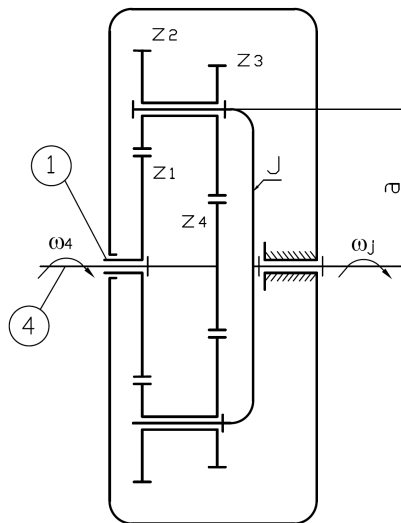
Przekładnia planetarna ma dwa stopnie swobody, dlatego jej przełożenie zależy od zablokowania jednego z trzech członów: jarzma – j lub koła – 1, lub koła – 4.

Przy zablokowaniu jarzma – j otrzymujemy tzw. przełożenie bazowe [1, 8].

$$\omega_j = 0, \quad i_o = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{z_4 z_2}{z_3 z_1} \quad (1)$$

Gdy:

$$\omega_1 = 0, \quad i_{j4} = \frac{\omega_4}{\omega_j} = 1 - \frac{1}{i_o} = 1 - \frac{z_3 z_1}{z_4 z_2} \quad (2)$$



Rys. 1. Schemat kinematyczny przekładni planetarnej z zazębieniem zewnętrznym

Fig. 1. Kinematical diagram of planetary gears, with external conjunction of teeth

W szczególnych przypadkach przekładni o uproszczonej technologii [5, 6, 9]:

$$A. \quad z_1 = z_4 \quad \wedge \quad z_3 = z_2 - z_1 \quad \wedge \quad z_1 = 1, 2, 3 \Rightarrow \quad (3)$$

$$i_{j4} = \frac{\omega_4}{\omega_j} = \frac{z_2}{z_4}$$

$$B. \quad z_2 = z_3 \quad \wedge \quad z_1 = z_4 - z_2 \quad \wedge \quad z_2 = 1, 2, 3 \Rightarrow \quad (4)$$

$$i_{j4} = \frac{\omega_4}{\omega_j} = \frac{z_2}{z_4}$$

Projektowana przekładnia wg rys. 1 musi spełniać warunki sąsiedztwa s-satelitów

$$(z_1 + z_2) \cdot \sin \frac{\pi}{s} - z_2 - 2 \cdot y - 2 \geq 0 \quad , \quad (z_3 + z_4) \cdot \sin \frac{\pi}{s} - z_3 - 2 \cdot y - 2 \geq 0 \quad (5)$$

i warunek równomiernego rozmieszczenia satelitów

$$\frac{z_1 \cdot z_3 - z_4 \cdot z_2}{s} = N_1 \cdot z_3 - N_2 \cdot z_2 \quad , \quad (N_1 \wedge N_2) \in N. \quad (6)$$

Ostatnim podstawowym warunkiem jest warunek współosiowości tak, aby oś obrotu satelitów była wspólna, zgodnie z rys. 1:

$$a = (z_1 + z_2) \cdot m'_w = (z_3 + z_4) \cdot m''_w \quad (7)$$

$$\cos \alpha'_w = \frac{a_{o1}}{a} \cos \alpha \quad , \quad \cos \alpha''_w = \frac{a_{o2}}{a} \cos \alpha \quad , \quad a_{o1} = (z_1 + z_2) \cdot m \quad , \quad a_{o2} = (z_3 + z_4) \cdot m$$

gdzie: m – moduł narzędzia (zębatki odniesienia), α – kąt zarysu narzędzia (zębatki odniesienia), a_{o1} , a_{o2} – zerowe odległości osi, m'_w , m''_w – moduły na kołach tocnych odpowiednio z_1/z_2 oraz z_3/z_4 ; α'_w , α''_w – kąty przyporu odpowiednio par kół z_1/z_2 oraz z_3/z_4 .

2. Zakres dopuszczalnej korekcji

Niezależnie czy pary kół będą miały korekcję P0 czy konstrukcyjną P [2, 8], poprawna geometria zazębienia wymaga spełnienia równań Fölmara dla każdej pary kół w formie:

$$x_1 + x_2 = c1 = \frac{\{[\tan(\alpha'_w) - \alpha'_w] - \tan(\alpha) + \alpha\} \cdot (z_1 + z_2)}{2 \cdot \tan(\alpha)} \quad (8)$$

$$x_3 + x_4 = c2 = \frac{\{[\tan(\alpha'_w) - \alpha'_w] - \tan(\alpha) + \alpha\} \cdot (z_3 + z_4)}{2 \cdot \tan(\alpha)}$$

gdzie x_1 , x_2 , x_3 , x_4 – współczynniki korekcji kół zębatych o ilości zębów z_1 , z_2 , z_3 , z_4 .

Dla każdego koła zębatego współczynnik korekcji jest ograniczony od góry ze względu na dopuszczalne zaostrenie głowy zęba oraz ze względu na położenie koła podziałowego w strefie zarysu ewolwentowego.

$$x \leq \frac{19}{289} + 10 \cdot \frac{z}{289} \quad \text{dla } 10 \leq z \leq 24 \quad \wedge \quad x \leq 1 \quad \text{dla } z \geq 25 \quad (9)$$

Dla każdego koła zębatego współczynnik korekcji jest ograniczony od dołu ze względu na niedopuszczenie do podcinania stopy zęba oraz ze względu na położenie koła podziałowego w strefie zarysu ewolwentowego.

$$x \geq 1 - \frac{z}{17} \quad \text{dla } 10 \leq z \leq 32 \quad \wedge \quad x \geq -0.9 \quad \text{dla } z \geq 33 \quad (10)$$

W rezultacie każdy ze współczynników x_1 , x_2 , x_3 , x_4 ma przedział ograniczoności wg (9), (10), ponadto muszą być spełnione równania (8). W konsekwencji rozwiązanie zadania nie jest jednoznaczne, dlatego można poszukiwać takiego określenia współczynników korekcji, aby wytrzymałość kontaktowa i postaciowa zębów była największa.

3. Sformułowanie zadania

W praktyce inżynierskiej zgodnie z normą ISO [3, 4] stosuje się dwa kryteria: na naprężenia u podstawy zębów:

$$\sigma_{F1,2} = \frac{F_t K_F}{b_w m_n} Y_{FS1,2} Y_\epsilon Y_\beta \leq \sigma_{FP}, \quad (11)$$

gdzie σ_F oznacza obliczeniowe naprężenie u podstawy zęba, a σ_{FP} jest dopuszczalnym naprężeniem u podstawy zęba i warunku wytrzymałościowego na zmęczenie powierzchniowe zęba (pitting) w jednoparowym punkcie zazębienia.

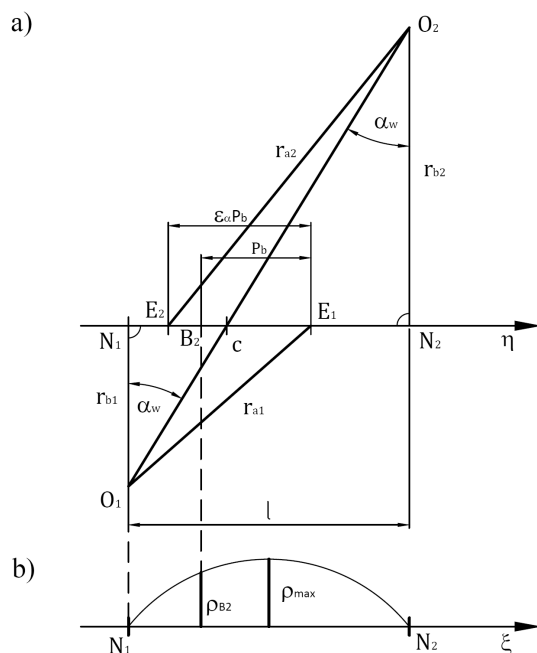
$$\sigma_H = Z_E Z_H Z_\epsilon Z_\beta \sqrt{\frac{F_t K_H}{b_w d_1} \frac{u+1}{u}} \leq \sigma_{HP}, \quad (12)$$

gdzie σ_H oznacza obliczeniowe naprężenie stykowe (kontaktowe), a σ_{HP} jest dopuszczalnym naprężeniem stykowym. W powyższych wzorach F_t jest nominalną siłą obwodową w zazębieniu na okręgu podziałowym, a b_w jest czynną szerokością uzębienia, d_1 jest średnicą podziałową koła o mniejszej ilości zębów.

Oznaczenia i obliczenia występujących we wzorach (11) i (12) współczynników K_F , K_H , Y_{FS} , Y_ϵ , Y_β , Z_H , Z_E , Z_ϵ , Z_β i naprężeń dopuszczalnych określone są normą ISO [4]. Ograniczenia obowiązują dla każdej pary kół zębatych przekładni planetarnej wg rys. 1.

Na wartość naprężeń σ_F i σ_H ma wpływ korekcja zębów kół poprzez zależność $Y_{FS}(x, z)$ i $Z_H(\rho_{B2})$, gdzie $\rho_{B2}(x, z_1, z_2)$ – promień zastępczej krzywizny współpracujących zębów w punkcie jednoparowego zazębienia $B2$ wg rys. 2a, na którym dla pary kół zaznaczono odcinek przyporu E_1E_2 , promienie kół zasadniczych r_{b1} , r_{b2} , promienie kół

wierzchołkowych r_{a1} , r_{a2} , podziałkę na kołach zasadniczych p_b oraz kąt przyporu α_w , liczbę przyporu ε_α .



Rys. 2. Współpraca zębów a) na linii przyporu $E_1E_2 \subset N_1N_2$, b) zmienność zastępczego promienia krzywizny na linii przyporu $\rho(\xi)$

Fig. 2. Cooperation of teeth a) path of contact $E_1E_2 \subset N_1N_2$, b) changing of equivalent radii of teeth along line of action $\rho(\xi)$

Z rys. 2b wynika, że zastępczy promień krzywizny współpracujących zębów zmienia się wg paraboli na odcinku $N_1N_2 = l$, osiąga maksymalną wartość w środku odcinka N_1N_2 wartość $l/4$. Można, więc zbudować funkcję, która określi wpływ korekcji na względny promień krzywizny w punkcie jednoparowego zazębienia, a w konsekwencji obliczeniowe naprężenia stykowe.

$$\kappa(x) = \frac{4 \cdot \rho_{B2}(x)}{l} \quad (13)$$

Z punktu widzenia obniżenia naprężeń stykowych (kontaktowych) funkcja $\kappa(x)$ powinna być maksymalnie bliska jedności, ponadto określenie zgodnie z (8), (9), (10) zakresu współczynnika korekcji $\langle x \rangle$ pozwala wybrać wartość optymalną ze względu na wytrzymałość zmęczeniową powierzchni zębów.

Dla zakresu $\langle x \rangle$ można także określić kolejną funkcję mającą wpływ na wytrzymałość postaciową zmęczeniową u podstawy zębów, ponieważ współczynnik kształtu zębów zależy od współczynnika korekcji $Y_{Fa}(x, z)$ – zależność określona w normie ISO [4].

Ostatecznie, dla określonego zakresu współczynnika korekcji $\langle x \rangle$ można szukać rozwiązania, gdy również bezwymiarowa funkcja

$$\lambda(x) = \frac{1,9}{Y_{Fa}} \quad (14)$$

osiąga maksymalną wartość (1,9 – jest minimalną wartością Y_{Fa} dla zębatki odniesienia $\alpha=20^\circ$, $h_{ao}/m=1,25$, $\rho/m = 0,2$), we wzorach (13 i (14) x – oznacza współczynniki korekcji oddzielnie dla obu współpracujących kół spełniających warunek (8).

4. Wyznaczenie funkcji $\kappa(x)$

W celu wyznaczenia funkcji $\kappa(x)$ dla dwóch dowolnych kół zębatych z dowolną korekcją i znaną ilościach zębów $z_1 \leq z_2$ zastosujemy zależność na zastępczy promień krzywizny zębów, który wg [8] opisuje wzdłuż odcinka $N_1 N_2 = l$ zależność:

$$\rho(\xi) = \xi \cdot \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) \quad (15)$$

zilustrowaną na rys. 2b.

Oznaczając współrzędną w punkcie jednoparowego zazębienia ξ_B możemy funkcję $\kappa(x)$ zapisać w formie

$$\kappa(x) = 4\eta(x) \cdot (1 - \eta(x)) \quad , \quad \eta(x) = \frac{\xi_B}{l} \quad (16)$$

ponieważ

$$\xi_B = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} - p_b \quad , \quad l = a \cdot \sin(\alpha_w) = a_o \cdot \cos(\alpha) \cdot \operatorname{tg}(\alpha_w) \quad (17)$$

to podstawiając

$$\frac{p_b}{a_o} = \frac{2 \cdot \pi}{z_1 + z_2} \cos(\alpha) \quad , \quad \frac{r_{b1}}{a_o} = \frac{z_1}{z_1 + z_2} \cos(\alpha) \quad , \quad \frac{r_{a1}}{a_o} = \frac{z_1 + 2 \cdot (1 + x_1)}{z_1 + z_2} \quad (18)$$

otrzymamy dla pary kół zależność na $\eta(x)$ z ograniczeniami

$$\eta(x) = \frac{\sqrt{[z_1 + 2 \cdot (1 + x_1)]^2 - [(z_1 \cos(\alpha))]^2} - 2 \cdot \pi \cos(\alpha)}{(z_1 + z_2) \cdot \cos(\alpha) \cdot \tan(\alpha_w)} \quad (19)$$

$$\cos(\alpha_w) = \frac{a}{a_o} \cos(\alpha)$$

$$x_1 + x_2 = c1 = \frac{\{[\tan(\alpha'_w) - \alpha'_w] - \tan(\alpha) + \alpha\} \cdot (z_1 + z_2)}{2 \cdot \tan(\alpha)}$$

$$x_{1\min} \leq x_1 \leq x_{1\max} \quad \wedge \quad x_{2\min} \leq x_2 \leq x_{2\max}$$

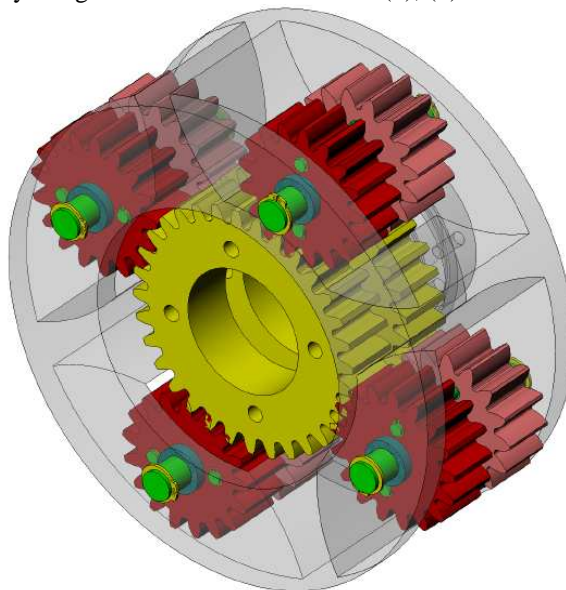
Podstawiając (19) do (16), można dla obu współpracujących kół wykreślić funkcję $\kappa(x_1) \vee \kappa(x_2)$, gdyż x_2 związane jest zależnością $x_1 + x_2 = c1$.

5. Przykład obliczeń

Celem obliczeń będzie przedstawienie wpływu współczynników korekcji dla przekładni planetarnej o uproszczonej technologii wg konstrukcji jak na rys. 3, o przełożeniu

$$i_{j4} = \frac{\omega_4}{\omega_j} = \frac{z_z}{z_2} = \frac{1}{17}$$

Do obliczeń przyjęto dane zawarte w tabeli 1 spełniające warunek sąsiedztwa i symetrycznego rozmieszczenia satelitów (5), (6).



Rys. 3. Przekładnia planetarna o identycznej geometrii kół centralnych i satelitów o różnej ilości zębów

Fig. 3. Planetary gear with the same geometry of sun and central wheel and different number of satellite teeth

Zgodnie z wzorami (8), (9), (10) określono zakres dopuszczalnych współczynników korekcji przy dodatkowym warunku $x_1 = x_4$ (koła o ilości zębów $z_1 = z_4$ będą obrabiane w pakiecie).

Tabela 1

Dane geometryczne przekładni o uproszczonej technologii

$m = 3$	$y = 1$	$\alpha_1 = 20$	$a = 72.72$	$\alpha = \alpha_1 \cdot \frac{\pi}{180}$
$z_1 = 32$	$z_2 = 17$	$z_3 = 16$	$z_4 = 32$	$\alpha = 20^\circ$
		$\cos \alpha = 0,939693$	$\alpha = 0,349066$	
		$a_0' = m \cdot \frac{(z_1 + z_2)}{2}$	$a_0' = 73.5$	
		$a_0'' = m \cdot \frac{(z_3 + z_4)}{2}$	$a_0'' = 72$	

Wyniki ograniczeń korekcji przedstawia tabela 2. W tabeli 3 natomiast umieszczono wartości graniczne współczynników korekcji: dla identycznych kół nr 1 i nr 4 oznaczono je jako x_{14} , a dla satelitów nr 2 i nr 3 odpowiednio x_{22} i x_{33} , zamieszczono także graniczne wartości współczynników kształtu $Y_{F\alpha}$.

Na podstawie (16) i (19a) można dla każdej pary kół zbudować wykresy $\kappa(x_1)$, $\kappa(x_4)$ określające wytrzymałość kontaktową par kół zębatach z_1/z_2 oraz z_3/z_4 .

Tabela 2

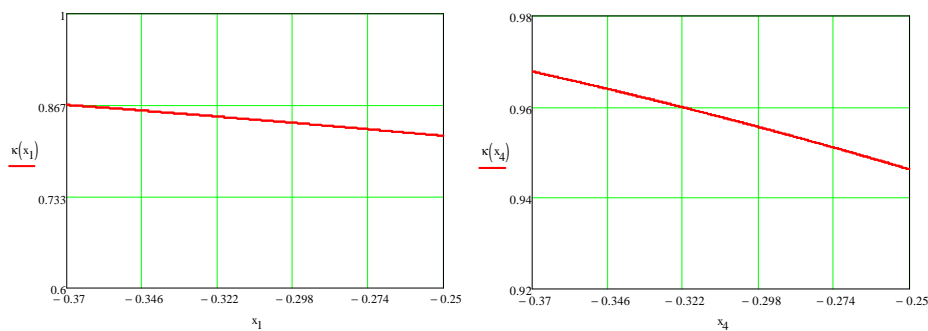
Ograniczenia na współczynniki korekcji kół zębatach

$m_w' = 2 \cdot \frac{a}{z_1 + z_2}$	$m_w' = 2,968163$	$m_w'' = 2 \cdot \frac{a}{z_3 + z_4}$	$m_w'' = 3,03$
$\alpha_w' = \arccos\left(\frac{a_0' \cdot \cos \alpha}{a}\right)$	$\alpha_w' = 0,31829$	$\alpha_{ws}' = \alpha_w' \cdot \frac{180}{\pi}$	$\alpha_{ws}' = 18,236693$
$\alpha_w'' = \arccos\left(\frac{a_0'' \cdot \cos \alpha}{a}\right)$	$\alpha_w'' = 0,375324$	$\alpha_{ws}'' = \alpha_w'' \cdot \frac{180}{\pi}$	$\alpha_{ws}'' = 21,504507$
$c_1 = \frac{(z_1 + z_2)(\operatorname{tg} \alpha_w' - \alpha_w' - \operatorname{tg} \alpha + \alpha)}{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}$		$c_1 = 0,249171$	
$c_2 = \frac{(z_3 + z_4)(\operatorname{tg} \alpha_w'' - \alpha_w'' - \operatorname{tg} \alpha + \alpha)}{2 \cdot \operatorname{tg} \alpha}$		$c_2 = 0,248757$	
$x_{3\max} = \frac{19}{289} + 10 \cdot \frac{z_3}{289}$	$x_{3\max} = 0,619377$	$x_{3\min} = 1 - \frac{z_3}{17}$	$x_{3\min} = 0,058824$
$x_{2\max} = \frac{19}{289} + 10 \cdot \frac{z_2}{289}$	$x_{2\max} = 0,653979$	$x_{2\min} = 1 - \frac{z_2}{17}$	$x_{2\min} = 0,058824$
$x_{1\min} = \left(1 - \frac{z_1}{17}\right)$		$x_{1\min} = -0,882353$	$x_{1\max} = 1$
$x_{4\min} = x_{1\min}$		$x_{4\max} = x_{1\max}$	

Tabela 3

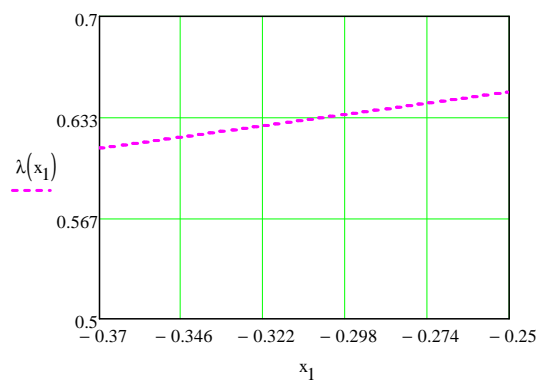
Graniczne wartości współczynników korekcji $\langle x \rangle$ oraz odpowiadające wartości $\langle Y_{F\alpha} \rangle$

$c_2 - x_{3\min} = 0,189934$	$c_2 - x_{3\max} = -0,37062$	
$c_1 - x_{2\min} = -0,249171$	$c_1 - x_{2\max} = -0,90315$	
$x_{14\max} = -0,249$	$Y_{F\alpha 14\min} = 2,922$	
$x_{14\min} = -0,370$	$Y_{F\alpha 14\max} = 3,10$	
$x_{22\max} = c_1 - x_{14\min}$	$x_{22\max} = 0,120829$	$Y_{F\alpha 2} = 2,90$
$x_{22\min} = c_1 - x_{14\max}$	$x_{22\min} = -1,70502 \times 10^{-4}$	$Y_{F\alpha 2} = 3,10$
$x_{33\max} = c_2 - x_{14\min}$	$x_{33\max} = 0,618757$	$Y_{F\alpha 3} = 2,21$
$x_{33\min} = c_2 - x_{14\max}$	$x_{33\min} = 0,497757$	$Y_{F\alpha 3} = 2,46$



Rys. 4. Zależność wytrzymałości kontaktowej (stykowej) dla pary kół zębatach $z_1/z_2 - \kappa(x_1)$ oraz dla pary kół $z_3/z_4 - \kappa(x_4)$

Fig. 4. Diagram of contact strength for engaged wheels $z_1/z_2 - \kappa(x_1)$ and for wheels $z_3/z_4 - \kappa(x_4)$



Rys. 5. Zależność wytrzymałości zmęczeniowej zębów kół $z_1 = z_4$ od współczynnika korekcji $x_1 = x_4$

Fig. 5. Diagram of fatigue strength of teeth engaged wheels $z_1 = z_4$ as a function of coefficients $x_1 = x_4$

Jak można było przypuszczać, wytrzymałość kontaktowa obu par kół okazała się na dobrym poziomie niezależnie od wyboru współczynnika korekcji w dopuszczalnym przedziale. Natomiast wytrzymałość postaciowa decydująca o wytrzymałości zmęczeniowej kół $z_1 = z_4$ wymaga zastosowania korekcji $x_1 = x_4 = -0,25$ jako najkorzystniejszej. W wynik może być bardzo różny, dlatego każdy przypadek konstrukcji należy rozpatrywać oddzielnie. Przykład obliczeń liczbowych przedstawionych powyżej, świadczy o tym, że metoda postępowania i procedura obliczeniowa jest skuteczna i może być zastosowana przy wyborze współczynników korekcji w dowolnej przekładni planetarnej z zazębieniem zewnętrznym.

6. Wnioski

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że do projektowania przekładni planetarnych z zazębieniem zewnętrznym można wykorzystać zaproponowane funkcje $\kappa(x)$ oraz $\lambda(x)$ aby można było zdecydować, jakie współczynniki korekcji będą najkorzystniejsze ze względu na wytrzymałość zmęczeniową i kontaktową zębów przekładni. Jako przykład przyjęto koncepcję przekładni planetarnej o uproszczonej technologii, kiedy koła centralne i słoneczne mają identyczną geometrię, a satelity różną ilość zębów, lecz procedura może być zastosowana do dowolnej przekładni planetarnej z zazębieniem zewnętrznym.

Z uwagi na fakt, że działanie wyżej wymienionej funkcji jest przeciwstawne, można w ogólnym przypadku podjąć zagadnienie polioptymalizacji (z ograniczeniami) współczynników korekcji.

Literatura

- [1] *Podstawy Konstrukcji Maszyn*, pod redakcją Marka Dietricha, PWN, Warszawa 1995.
- [2] Müller L., *Przekładnie zębate. Projektowanie*, WNT, Warszawa 1996.
- [3] Osiński Z., Wróbel J., *Teoria konstrukcji maszyn*, PWN, Warszawa 1993.
- [4] PN-ISO 6336-1/2/3.
- [5] Kasperek T., Ryś J., *Projekt przekładni planetarnej o identycznej geometrii satelitów*, Materiały XXI Konferencji „Problemy Rozwoju Maszyn Roboczych”, Zakopane 2008.
- [6] Ryś J., Kasperek T., *Geometria przekładni planetarnej z zazębieniem zewnętrznym o uproszczonej technologii*, Czasopismo Techniczne, z. 1, 1-M/2006.
- [7] Ryś J., Sendyka B., *Ustalenie obszaru rozwiązywalności II poprawki kół o zarysach ewolwentowych*, Czasopismo Techniczne, z. 6, 1978.
- [8] Ryś J., Skrzyszowski Z., *Podstawy konstrukcji maszyn*, t. 2, Wyd. PK, Kraków 2003.
- [9] Ryś J., Kasperek T., *Project of planetary gear with the same geometry of a satellite wheel*, The Archive of Mechanical Engineering, Vol. 55, No. 3, 2008, s. 265-273.