BUDOWNICTWO
CZASOPISMO TECHNICZNE
TECHNICAL TRANSACTIONS
CIVIL ENGINEERING
WYDAWNICTWO POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ
4-B/2010
ZESZYT 19
ROK 107
ISSUE 19
YEAR 107

MARIA RADWAŃSKA, JERZY PAMIN*, CZESŁAW CICHOŃ**

METODY OBLICZENIOWE W MECHANICE MATERIAŁÓW I KONSTRUKCJI ROZWIJANE W INSTYTUCIE METOD KOMPUTEROWYCH W INŻYNIERII LĄDOWEJ POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

COMPUTATION METHODS IN MECHANICS OF MATERIALS AND STRUCTURES DEVELOPED AT INSTITUTE OF COMPUTER METHODS IN CIVIL ENGINEERING, CRACOW UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Streszczenie

Artykuł przedstawia krótki przegląd działalności naukowej pracowników Instytutu Metod Komputerowych w Inżynierii Lądowej Politechniki Krakowskiej w latach 1992–2006 w zakresie metod obliczeniowych w mechanice materiałów i konstrukcji.

Słowa kluczowe: *mechanika konstrukcji i materiałów*, *MES*

Abstract

The paper presents a short overview of the scientific activity at the Institute of Computer Methods in Civil Engineering, Cracow University of Technology, in years 1992–2006 in the field of computational methods in structural and material mechanics.

Keywords: *mechanics of materials and structures*, *MES*

* Dr hab. inż. Maria Radwańska, prof. PK, dr hab. inż. Jerzy Pamin, prof. PK, Instytut Technologii Informatycznych w Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska.
** Prof. zw. dr hab. inż. Czesław Cichoń, Katedra Informatyki Stosowanej, Politechnika Świętokrzyska.

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

1. Wstęp

Działalność naukowa i dydaktyczna pracowników Instytutu Metod Komputerowych w Inżynierii Lądowej (IMKIL), który istniał na Wydziale Inżynierii Lądowej Politechniki Krakowskiej w latach 1992–2006[1], była związana z komputerową analizą różnorodnych zagadnień inżynierii lądowej. Obejmowała tworzenie modeli obliczeniowych opartych na podstawach teoretycznych mechaniki materiałów i konstrukcji oraz zastosowania najnowszych osiągnięć technologii informacyjnej. Tak szerokie podejście do rozwiązywanych problemów pozwoliło na owocną pracę naukową i dydaktyczną. Należy tu wymienić udział w licznych projektach badawczych[2], szereg publikacji w czasopismach naukowych, prezentację referatów generalnych i sesyjnych na konferencjach naukowych, a ponadto opracowanie podręczników akademickich. W ramach badań rozwijano własne oprogramowanie i korzystano z komercyjnych programów obliczeniowych.

Tematyka badań naukowych w IMKIL koncentrowała się wokół dwu grup metod obliczeniowych: klasycznych („twardych") i bazujących na sztucznej inteligencji („miękkich"). Pierwsza grupa jest związana z dominującą metodą dyskretyzacyjną, tj. Metodą Elementów Skończonych (MES) i jej coraz bardziej zaawansowanymi zastosowaniami w mechanice materiałów i konstrukcji. Prace prowadzone w IMKIL, rozwijające tę grupę metod, są opisane w niniejszym artykule.

Znaczące osiągnięcia IMKIL związane ze Sztucznymi Sieciami Neuronowymi (SSN) i ich zastosowaniami w inżynierii lądowej zostały opisane szczegółowo w [27].

Aktualne problemy z dziedziny mechaniki stanowią często złożone zadania badawcze lub inżynierskie. Rozwiązywano je na drodze zaawansowanych teoretycznych rozważań, prowadzących do modeli obliczeniowych, dostosowanych do użycia określonej metody dyskretyzacyjnej (zazwyczaj MES) i wykonywania złożonych obliczeń przy użyciu zaawansowanego oprogramowania.

Przy rozwiązywaniu skomplikowanych problemów z mechaniki materiałów i konstrukcji wykorzystywane są osiągnięcia z następujących dziedzin:

– teoretyczne podstawy tworzenia modeli obliczeniowych MES dla konstrukcji,
– modelowanie złożonych właściwości materiałowych z uwzględnieniem zjawisk zachodzących w zaawansowanych stanach deformacji i wytężenia (głównie w konstrukcjach metalowych, żelbetowych i gruncie),
– optymalizacja algorytmów obliczeniowych niezbędnych do analizy numerycznej przyjętych modeli,
– prace informatyczno-programistyczne, skierowane na rozbudowywanie własnego lub komercyjnego oprogramowania, ulepszanie procesu generacji danych (np. siatek elementów skończonych), rozszerzanie sposobów wizualizacji wyników i oszacowywanie dokładności rozwiązań numerycznych.

---

[1] W roku 2006 IMKIL wraz z Samodzielnym Zakładem Metod Komputerowych w Mechanice zostały przekształcone w Instytut Technologii Informatycznych w Inżynierii Lądowej.

[2] W okresie 1995–2005 pracownicy Instytutu kierowali dziesięcioma projektami badawczymi KBN o numerach 3 P404 060 06, 7 T07E 056 11, 7 T07A 036 12, 8 T11F 022 14, 7 T07A 040 15, 8 T07E 002 20, 8 T07A 031 20, 8 T07A 006 20, 8 T07A 006 21, 4 T07E 008 28, a Z. Waszczyszyn był laureatem Subsydium FNP dla Uczonych nr 13/2001 na lata 2001–2003.

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

W dalszej części artykułu zostanie podana charakterystyka wykonanych badań połączonych w dwie grupy tematyczne, choć w wielu rozwiązywanych zagadnieniach występuje sprzężenie tematyki mechaniki konstrukcji i materiałów.

2. Zastosowania MES w mechanice konstrukcji

Jako kontynuacja prac z wcześniejszego okresu, z końcem lat 90-tych powstały publikacje zamykające kompleksową analizę statyki i stateczności specyficznych obiektów inżynierskich, jakimi są powłoki chłodni kominowych. Prace dotyczyły modelu obliczeniowego dla powłoki żelbetowej, ujmującego nieliniowe związki kinematyczne, opis właściwości betonu, stali i ich współpracy, doboru powierzchniowych elementów skończonych, tworzenia obrazu numerycznego powłoki hiperboloidalnej (idealnej lub z imperfekcjami geometrycznymi), oraz rozbudowy własnego systemu komputerowego ANKA.

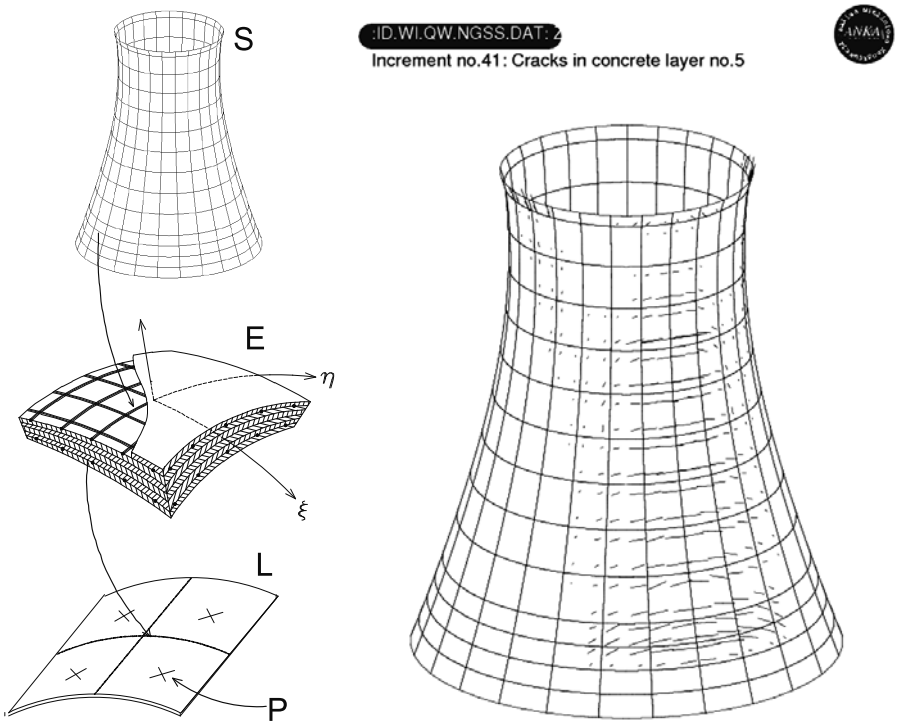
Modele obliczeniowe służą zazwyczaj do wyznaczania obciążenia granicznego, charakteryzującego materiałowo-sztywnościowe uszkodzenie konstrukcji (powstanie znacznych stref zarysowanego betonu i niedopuszczalnych deformacji, towarzyszących spadkowi sztywności konstrukcji lub utracie jej stateczności), por. [31]. Kolejnym aspektem analizy numerycznej jest rozwiązanie algebraicznego problemu własnego dla liniowego zagadnienia wyboczenia, dostarczającego wartości krytycznych obciążeń i postaci wyboczenia powłok idealnych lub z imperfekcjami geometrycznymi (wyznaczonymi w wyniku pomiarów geodezyjnych na obiekcie rzeczywistym albo modelowanymi komputerowo na podstawie postaci wyboczenia układu idealnego), por. [20, 7]. Opisana powyżej tematyka ściśle wiąże się z aktywnością naukową w zakresie teorii stateczności [26], zastosowań metody elementów skończonych do analizy statyki i stateczności konstrukcji [28] oraz do analizy numerycznej zjawisk nieliniowych zachodzących podczas deformacji konstrukcji żelbetowych.

Prace teoretyczne i informatyczne zostały skierowane na stworzenie nowych wersji programu ANKA, umożliwiających materiałowo i geometrycznie nieliniową analizę dowolnych konstrukcji powierzchniowych żelbetowych i stalowych. W wyniku tych prac powstał m.in. artykuł [19], zawierający opis dwu- i trójwymiarowych modeli MES, strategie numerycznej analizy sprężysto-plastycznej na poziomie zdyskretyzowanej konstrukcji (por. rys. 1a) i opis całkowania sprężysto-plastycznych równań na poziomie punktu. Przykładowo, na rys. 1b przedstawiono numeryczną symulację zarysowania żelbetowej powłoki chłodni kominowej pod wzrastającym obciążeniem wiatrem. Szczegółową analizę tego zagadnienia zawiera praca [31].

Począwszy od roku 1996 podjęto prace badawcze z zakresu sformułowań wariacyjnych jedno- i wielopolowych modeli MES oraz opisu aproksymacji wewnątrz elementu skończonego i wyprowadzenia z zasad wariacyjnych macierzy charakteryzujących dany model. Dokonano oprogramowania wybranych elementów skończonych z użyciem własnego programu MES MANKA i pakietu matematycznego MATLAB (toolbox CALFEM). Zajęto się też graficzną prezentacją na diagramach zależności między definiowanymi polami i macierzami opisującymi dany model MES. Diagramy te służą lepszemu zrozumieniu i sprawniejszemu nauczaniu MES. Powstały w tym zakresie 4 prace dyplomowe oraz publikacje [35, 17, 18].

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

W badaniach i w dydaktyce podjęto wysiłek wdrożenia do praktyki obliczeniowej profesjonalnych systemów obliczeniowych DIANA, ANSYS i FEAP. Mając odpowiedni model numeryczny można przeprowadzić analizę parametryczną danego zagadnienia, bowiem modyfikując w łatwy sposób dane dotyczące geometrii, warunków brzegowych lub obciążeń można odtworzyć nie tylko zachowanie się konstrukcji pod wpływem określonych oddziaływań zewnętrznych, a także zbadać wpływ różnych czynników na odpowiedź układu. W takich seryjnych obliczeniach dostrzega się olbrzymią rolę dobrych pre- i postprocesorów, umożliwiających szybką generację danych oraz jakościową i ilościową analizę wyników. Do analizy numerycznej powierzchniowych ustrojów konstrukcyjnych wykorzystano możliwości oferowane przez system ANSYS, w szczególności związane z tworzeniem odpowiedniego obiektu geometrycznego, będącego fizycznym modelem powierzchni środkowej dowolnie ukształtowanego ustroju powierzchniowego.



Rys. 1. Poziomy analizy teoretycznej i numerycznej. Symulacja zarysowania powłoki chłodni kominowej
Fig. 1. Levels of theoretical and numerical analysis. Simulation of cracking in cooling tower shell

Zarówno do weryfikacji własnych nowych wyników, jak i do dydaktyki potrzebna jest baza testowych rozwiązań (benchmarków), której tworzenie rozpoczęto w roku 2003. Wśród testowych zadań znajdują się takie, dla których istnieją rozwiązania ścisłe (analityczne). Należy bowiem tworzyć pomost między konstrukcją rzeczywistą a jej modelem

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

obliczeniowym, dostosowanym do przyjętego schematu ustroju ciągłego, utworzonego po przyjęciu założeń i hipotez upraszczających, w taki sposób, aby było możliwe analityczne rozwiązanie zagadnienia. Drugi pomost wprowadzamy przechodząc od ustroju ciągłego do układu dyskretnego, w ramach idei dyskretyzacji np. MES. Konfrontacja rozwiązania analitycznego i numerycznego, służąca w wielu przypadkach do określenia własności elementów skończonych, jest przydatna do uwiarygodnienia wyników złożonych zadań, które są możliwe do otrzymania jedynie na drodze obliczeń komputerowych.

Zajmowano się też zagadnieniami mechaniki konstrukcji prętowych, w tym zastosowaniem tzw. ścisłych elementów skończonych w analizie skończonych deformacji ram [29], wprowadzeniem techniki superlementu do symulacji sprężysto-plastycznego zachowania się ram [30] i analizą wyboczenia konstrukcji cienkościennych [2]. Kolejnym polem zastosowań były wybrane problemy biomechaniki. W szczególności metodę Trefftza zastosowano w zagadnieniu wymiany materiału bez redystrybucji naprężeń [10, 11].

3. Metody obliczeniowe w mechanice materiałów

Prace naukowo-badawcze z zakresu metod obliczeniowych w mechanice materiału można sklasyfikować w kilku grupach opisanych poniżej.

Pierwsza grupa prac dotyczy sformułowania modelu matematycznego opisującego metodami teorii plastyczności nieliniowe właściwości betonu. Uznano, że dobry model dla płaskiego stanu naprężenia pozwala na analizę szeregu praktycznie ważnych konstrukcji, takich jak belki, ustroje ramowe i tarcze, a przy wykorzystaniu modelu warstwowego w metodzie elementów skończonych również płyt i powłok. Wyniki prac są przedstawione w pracy doktorskiej [33] oraz dwuczęściowej publikacji [34].

Druga grupa prac jest skoncentrowana na doskonaleniu metod komputerowych. Wykorzystując przesłanki fizyczne opracowano modele obliczeniowe do analizy rozwoju rys w konstrukcjach dwuwymiarowych wykonanych z materiałów quasi-kruchych. W rezultacie otrzymano cztery warianty metody komputerowej integrującej metodę elementów skończonych z bezelementową metodą Galerkina (BMG). Do opisu propagacji rysy uogólniono model rysy fikcyjnej Hillerborga, uwzględniając łączne działanie obciążeń prowadzących do pękania typu I i II (rozciąganie ze ścinaniem). Na tej podstawie opracowano oryginalny program komputerowy FracLess, który wykorzystano do obliczeń przykładów. Wyniki prac stanowią przedmiot pracy doktorskiej [5] oraz publikacji [6]. Przykładową dyskretyzację belki i wynik symulacji zarysowania przedstawia rys. 2.

Do trzeciej grupy prac należy zaliczyć prace związane z opisem degradacji konstrukcji betonowych pod stałym obciążeniem mechanicznym, poddanych dwóm mechanizmom zniszczenia na skutek dyfuzji chlorków i wymywania jonów wapnia. Wykorzystując mechanikę zniszczenia opracowano trójparametrowy model matematyczny i na tej podstawie model obliczeniowy, wykorzystując metodę elementów skończonych. Przykłady obliczano wprowadzając własne modyfikacje do systemu FEAP. Rezultaty prac są zawarte w pracy doktorskiej [22] oraz w publikacji [23].

Kolejną grupą są publikacje na temat opisu ośrodka ciągłego wyższego rzędu i symulacji odkształceń zlokalizowanych. Wiele materiałów traci stateczność zachowania na

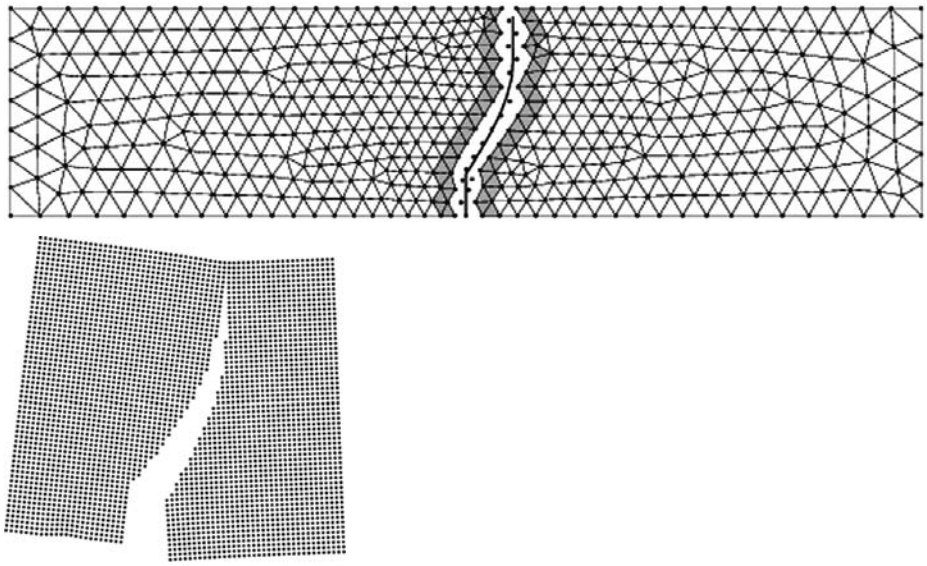
BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

pewnym etapie deformacji. Konsekwencją tego faktu jest zjawisko lokalizacji odkształceń, często prowadzące do zniszczenia układu. Lokalizacja oznacza, że od pewnego momentu cała deformacja układu koncentruje się w wąskim pasmie, zaś pozostałe części układu ulegają odciążeniu.

Materiały wykazujące osłabienie (np. beton) są opisywane w obliczeniach numerycznych za pomocą opadającej zależności naprężeń od odkształceń. W klasycznym sformułowaniu równań mechaniki ośrodka ciągłego opis ten prowadzi do źle postawionego zagadnienia brzegowego (początkowego), bowiem równania równowagi (ruchu) przestają być eliptyczne (hiperboliczne) po wejściu na ścieżkę opadającą. W obliczeniach numerycznych za pomocą np. metody elementów skończonych otrzymuje się w konsekwencji wyniki silnie zależne od dyskretyzacji, ponieważ metoda symuluje lokalizację w najmniejszej możliwej objętości materiału, a ta zależy od przyjętej siatki elementów.

a)

b)



Rys. 2. Dyskretyzacja czteropunktowo zginanej belki podczas propagacji rysy w metodzie MES-BMG oraz postać deformacji w pobliżu rysy w teście tarczy analizowanej BMG (zaczerpnięte z [5])

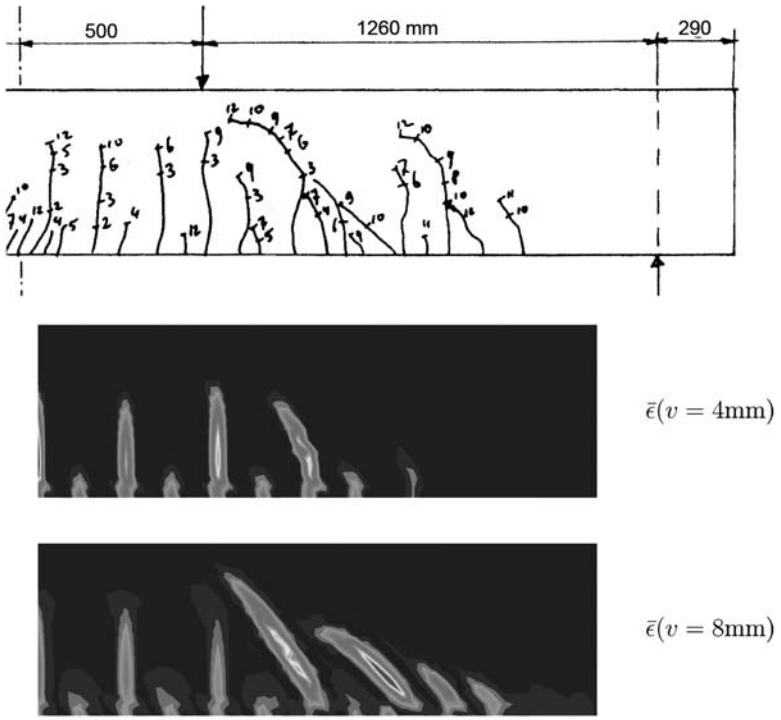
Fig. 2. Discretization of beam in four-point bending with crack propagation simulated using FEM-EFG; deformation around a crack in a test panel analyzed using EFG (quoted from [5])

Istnieją dwa sposoby rozwiązania tego problemu. Jednym z nich jest koncentracja deformacji w specjalnych elementach interfejsowych, dla których związki konstytutywne są zapisane jako zależność sił brzegowych od względnych przemieszczeń dwu powierzchni elementu. Jest to podejście umotywowane fizycznie w przypadku konstrukcji z materiałów quasi-kruchych, które ulegają makroskopowemu zarysowaniu, ale często niedogodne ze względu na konieczność przewidzenia położenia rys lub wielokrotnej zmiany topologii układu podczas analizy nieliniowej. Z tego powodu rozwijane są od pewnego czasu udoskonalone (zregularyzowane) teorie kontinuum, mające charakter nielokalny i uwzględ-

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

niające w opisie konstytutywnym wyższe gradienty deformacji. Teorie te zawierają tzw. wewnętrzną skalę długości, która jest dodatkowym parametrem materiału i definiuje (niezerową) szerokość pasma lokalizacji. Zastosowanie takiej teorii usuwa patologiczną zależność numerycznych symulacji od dyskretyzacji. Użyteczność takiego modelu jest jednakże uwarunkowana określeniem wewnętrznego parametru (lub parametrów) długości na podstawie doświadczalnej lub z analizy mechanicznej materiału niejednorodnego na mikroskopowym poziomie opisu jego deformacji.

W prowadzonych badaniach zastosowano najpierw warianty specjalnej teorii plastyczności, w której funkcja płynięcia zależy od przestrzennych gradientów drugiego rzędu niezmienniczej miary deformacji plastycznej. Prowadzi to do dyskretyzacji tej miary i dwupolowych elementow skończonych. Teoria ta została zastosowana w symulacjach niestatecznego zachowania gruntów [24] oraz do analizy zarysowania betonu i betonu zbrojonego w jedno i dwuosiowych stanach naprężenia [13].



Rys. 3. Dwuwymiarowa symulacja zarysowania powłoki belki żelbetowej czteropunktowo zginanej za pomocą modelu gradientowej mechaniki uszkodzeń. Rysy zaobserwowane w eksperymencie [25] i rozkład uśrednionej miary odkształcenia dla dwóch wartości przemieszczenia pionowego v pod siłą

Fig. 3. Two-dimensional simulation of cracking in reinforced concrete beam under four-point bending using gradient damage model. Cracks observed in experiment [25] and distribution of averaged strain measure for two values of vertical displacement v under applied force

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Badania te były też przedmiotem współpracy międzynarodowej w ramach projektu 3.2 *Reinforced Concrete* europejskiego programu ALERT „Geomaterials", który koncentrował się na symulacji zachowania betonu w stanach dwuosiowych charakterystycznych dla kołkowego działania zbrojenia [4].

Następnie zastosowano gradientową teorię mechaniki uszkodzeń, wywodzącą się z pracy [16]. Szczególnie efektywny okazał się tzw. model niejawny, w którym równania równowagi są sprzężone z równaniem uśredniającym miarę odkształceń w punkcie. Jako przykład zastosowania gradientowej mechaniki uszkodzeń pokazano na rys. 3 połowę analizowanej belki w stanie czteropunktowego zginania, por. [14]. Belka jest zbrojona na zginanie, natomiast nie zawiera strzemion. Wzór rys został zaobserwowany w eksperymencie [25]. Rys. 3 przedstawia symulowaną ewolucję uśrednionej (nielokalnej) miary odkształcenia. W [3, 15] pokazano, że gradientowa mechanika uszkodzeń może być łatwo sprzężona z teorią plastyczności ze wzmocnieniem, prowadząc do bardziej uniwersalnego modelu kontinuum dla kompozytów.

Szczególnie interesującym polem badań w ostatnim okresie istnienia IMKIL były zagadnienia integracji skal opisu ośrodków niejednorodnych z zastosowaniem homogenizacji obliczeniowej, która była przedmiotem pracy doktorskiej [8]. W podejściu tym symuluje się właściwości i zachowanie materiału niejednorodnego bez jawnego formułowania efektywnych związków konstytutywnych. Zamiast tego prowadzi się analizę dwuskalową: dla wybranego zbioru punktów w skali makro rozwiązuje się problem brzegowy dla reprezentatywnego elementu objętości w skali mikro, wnioskując z jego deformacji o reprezentatywnych naprężeniach i sztywności.

4. Wnioski

Artykuł zawiera zwięzłą prezentację działalności pracowników naukowo-dydaktycznych Instytutu Metod Komputerowych w Inżynierii Lądowej Politechniki Krakowskiej, związanej z zastosowaniami metod obliczeniowych w mechanice konstrukcji i materiałów. Prace dotyczące zastosowań sztucznych sieci neuronowych na tym polu zostały opisane w [27]. Szeroki przegląd dokonań polskiego środowiska mechaników, a także wizja rozwoju mechaniki konstrukcji zostały przedstawione w [9].

Należy wspomnieć aktywną działalność pracowników IMKIL w Sekcji Mechaniki Konstrukcji (od roku 2004 Sekcji Mechaniki Konstrukcji i Materiałów) KILiW PAN, kierowanej przez prof. Z. Waszczyszyna. Instytut był głównym organizatorem kongresu Second European Conference on Computational Mechanics ECCM-2001, 26–29.06.2001, który zgromadził w Krakowie ponad 500 specjalistów z dziedziny mechaniki obliczeniowej.

Warto też zwrócić uwagę na włączenie treści związanych z metodami obliczeniowymi do programów prowadzonych zajęć dydaktycznych z przedmiotów *mechanika budowli, metody komputerowe, ustroje powierzchniowe* oraz *mechanika materiałów i konstrukcji*. Należą do nich komputerowa wersja metody przemieszczeń, wyniki analizy licznych przykładów MES, a także komputerowa symulacja zjawisk zachodzących podczas deformacji interesujących nas konstrukcji prętowych i powierzchniowych. Proces dydaktyczny został ułatwiony dzięki opracowanym podręcznikom [32, 1, 12, 21].

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

IMKIL sprawował merytoryczną i organizacyjną opiekę nad unikalną w skali polskiej specjalnością *Mechanika Komputerowa* na kierunku studiów magisterskich *Budownictwo* na Wydziale Inżynierii Lądowej PK. Wniósł także znaczący wkład w uruchomienie na tym wydziale kierunku *Informatyka*, rozszerzając ofertę dydaktyczną o przedmioty dotyczące zastosowań informatyki w inżynierii lądowej.

Literatura

[1] Cichoń Cz., Cecot W., Krok J., Pluciński P.. *Metody komputerowe w liniowej mechanice konstrukcji*, Politechnika Krakowska, Kraków 2002.

[2] Cichoń Cz., Pluciński P., Waszczuk S.. *Buckling of thin-walled frames with partial warping restraint*, Archiwum Inżynierii Lądowej, XLVI, 2, 2000, 244-254.

[3] de Borst R., Pamin J., Geers M.G.D., *On coupled gradient-dependent plasticity and damage theories with a view to localization analysis*, Eur. J. Mech. A/Solids, 18(6), 1999, 939-962.

[4] di Prisco M., Ferrara L., Meftah F., Pamin J., de Borst R., Mazars J., Reynouard J.M., *Mixed mode fracture in plain and reinforced concrete: some results on benchmark tests*, Int. J. Fracture, 103, 2000, 127-148.

[5] Jaśkowiec J., *Integracja MES z BMG w dwuwymiarowej analizie propagacji pękania quasi-kruchego*, Praca doktorska, Politechnika Krakowska, Kraków 2003.

[6] Jaśkowiec J., Cichoń Cz., *Coupling of FEM and EFGM with dynamic decomposition in 2D quasi-brittle crack growth analysis*, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, 11, 2004, 293-320, 2004.

[7] Jamroży Z., Radwańska M., *Oszacowanie stateczności hiperboloidalnej chłodni kominowej ze znacznymi imperfekcjami geometrycznymi*, Polska Akademia Nauk, Oddział w Krakowie, Kraków 1995, 49-64.

[8] Kaczmarczyk Ł., *Numeryczna analiza wybranych problemów mechaniki ośrodków niejednorodnych*, Praca doktorska, Politechnika Krakowska, 2006.

[9] Kączkowski Z., Rakowski G., Waszczyszyn Z., *Polish structural mechanics at the turn of the 20th century*, Archiwum Inżynierii Lądowej, LI, 4, 2005, 431-470.

[10] Matuszak A., *Partial material replacement without stress redistribution*, Archiwum Mechaniki Stosowanej, 54(1), 2002, 35–54.

[11] Matuszak A., *Częściowa wymiana materiału bez zmiany stanu naprężenia w płaskich zagadnieniach teorii sprężystości*, Praca doktorska, Politechnika Krakowska, Kraków 2003.

[12] Olszowski B., Radwańska M., *Mechanika budowli*, Politechnika Krakowska, Krakow 2003.

[13] Pamin J., de Borst R., *Simulation of crack spacing using a reinforced concrete model with an internal length parameter*, Archive of Applied Mechanics, 68(9), 1998, 613-625.

[14] Pamin J., de Borst R., *Gradient-enhanced damage and plasticity models for plain and reinforced concrete*, In W. Wunderlich (ed.) Proc. European Conf.

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

on Computational Mechanics ECCM'99, Technical University of Munich, art. nr 636, Munich 1999, 482-483.

[15] Pamin J., de Borst R., *Stiffness degradation in gradient-dependent coupled damage-plasticity*, Archiwum Mechaniki Stosowanej, 51(3-4), 1999, 407-433.

[16] Peerlings R.H.J., de Borst R., Brekelmans W.A.M., de Vree J.H.P., *Gradient-enhanced damage for quasi-brittle materials*, Int. J. Numer. Meth. Engng., 39, 1996, 3391-3403.

[17] Radwańska M., *A survey of various FE models with conceptual diagrams for linear analysis*, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, 13, 2006, 209-233.

[18] Radwańska M., *An overview of selected plate and shell FE models with graphic presentation of governing equations*, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, 14, 2007, 431-456.

[19] Radwańska M., Bielski J., *Computational problems of the FE-analysis of elasto-plastic surface structures*, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, 8, 2001, 17-44.

[20] Radwańska M., Waszczyszyn Z., *Buckling analysis of a cooling tower shell with measured and theoretically-modelled imperfections*, Thin-walled Structures, 23, 1995, 107-121.

[21] Radwańska M., *Metody komputerowe w wybranych zagadnieniach mechaniki konstrukcji*, Politechnika Krakowska, Kraków 2004.

[22] Romanowski P., *Analiza numeryczna trwałości elementów konstrukcji betonowych poddanych obciążeniom chemiczno-mechanicznym*, Praca doktorska, Politechnika Krakowska, 2005.

[23] Romanowski P., Cichoń Cz., *Chemo-mechanical finite element model of deterioration of plain concrete structures*, Archiwum Inżynierii Lądowej, LI, 1, 2005, 85-106.

[24] Stankiewicz A., Pamin J., *Simulation of instabilities in non-softening Drucker-Prager plasticity*, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, 8, 2001, 183-204.

[25] Walraven J.C., *The influence of depth on the shear strength of lightweight concrete beams without shear reinforcement*, Technical Report 5-78-4, Stevin Laboratory, Delft University of Technology, Delft, 1978.

[26] Waszczyszyn Z., *Stability problems and methods of analysis of FEM equations*, In: M. Kleiber (ed.), *Handbook of Computational Solid Mechanics - Survey and Comparison of Contemporary Methods*, Springer, Berlin-Heidelberg 1999, 253-333.

[27] Waszczyszyn Z., *Artificial neural networks in civil and structural engineering: Ten years of research in Poland*, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, 13, 2006, 489-512.

[28] Waszczyszyn Z., Cichoń Cz., Radwańska M., *Stability of Structures by Finite Element Methods*, Elsevier, Amsterdam, 1994.

[29] Waszczyszyn Z., Janus-Michalska M., *Numerical approach to the 'exact' finite element analysis of in-plane finite displacements of framed structures*, Comput. & Struct., 69, 1998, 525-535.

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

[30] Waszczyszyn Z., Pabisek E., *Elastoplastic analysis of plane steel frames by a new superelement*, Archiwum Inżynierii Lądowej, XLVIII, 2, 2002, 159-181.
[31] Waszczyszyn Z., Pabisek E., Pamin J., Radwańska M., *Nonlinear analysis of a RC cooling tower with geometrical imperfections and a technological cut-out*, Engineering Structures, 22, 2000, 480-489.
[32] Waszczyszyn Z. (red.), *Mechanika budowli. Ujęcie komputerowe*, Tom 3, Wyd. I, Arkady, Warszawa 1995.
[33] Winnicki A., *Model betonu przy obciążeniach doraźnych. Teoria i weryfikacja numeryczna dla płaskiego stanu naprężenia*, Praca doktorska, Politechnika Krakowska, Kraków 1995.
[34] Winnicki A., Cichoń Cz., *Plastic model for concrete in plane stress state*. I: *Theory*, II: *Numerical validation*, ASCE J. Eng. Mech., 124(6), 1998, 591-602, 603-613.
[35] Wosatko A., Radwańska M., *Naprężeniowo-przemieszczeniowe elementy skończone w analizie płaskiego stanu naprężenia*, Met. Komp. w Inż. Ląd., Nr 5, 2001, 21-44.

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ