

ADAM JAGIEŁŁO*

ENERGETYCZNY MODEL MATEMATYCZNY
MAGNESOWANIA FERROMAGNETYKÓWMATHEMATICAL MODEL OF ENERGY
FERROMAGNETIC MAGNETIZATION

Streszczenie

W artykule zaproponowano model matematyczny pozwalający na opis krzywych magnesowania materiałów ferromagnetycznych o strukturze domenowej przy wykorzystaniu typowych dla domen parametrów takich jak: stała anizotropii, powierzchniowa gęstość energii, wymiar liniowy i namagnesowanie. Ponieważ z wymienionych wielkości jedynie namagnesowanie jest wielkością niezależną od technologii produkcji magnesowanej próbki, więc model ten wykorzystuje takie wielkości „eksperymentalne” jak pole koercji i indukcję remanencji. Artykuł w zakończeniu zawiera przykładowe przebiegi krzywych magnesowania dla różnych typów funkcji pola magnesującego.

Słowa kluczowe: materiał ferromagnetyczny, domeny magnetyczne, histereza magnetyczna

Abstract

The paper proposes a mathematical model allowing the description of magnetization curves of ferromagnetic materials on the structure of domain using the domain for typical parameters such as anisotropy constant, surface energy density, linear dimension and the magnetization. Because of the volume is only the size of the magnetization is independent of the production technology of magnetic samples, so this model uses the volume of such “experimental” as a field coercivity and remanence induction. An article in the end contains the sample magnetization curves for different types of functions magnetizing field.

Keywords: ferromagnetic materials, magnetic domains, magnetic hysteresis

* Prof. dr hab. inż. Adam Jagiełło, Katedra Trakcji i Sterowania Ruchem, Wydział Inżynierii Elektrycznej i Komputerowej, Politechnika Krakowska.

Oznaczenia

- D – szerokość domeny magnetycznej
 E_w – energia wymiany
 E_p – energia związana z objętością ścianek domenowych
 E_a – energia anizotropii magnetokrystalicznej
 E_a – gęstość powierzchniowa energii magnetokrystalicznej
 E_{ms} – energia magnetostatyczna
 E_{LL} – całkowita energia według L.D. Landaua i J.M. Lipszyca
 E_{LL} – całkowita gęstość powierzchniowa energii według L.D. Landaua i J.M. Lipszyca
 E_K – całkowita energia według Ch. Kittela
 E_K – całkowita gęstość powierzchniowa energii według Ch. Kittela
 E_H – energia oddziaływania domen z zewnętrznym polem magnetycznym
 E_H – gęstość powierzchniowa energii oddziaływania domen z zewnętrznym polem magnetycznym
 θ – kąt między wektorem namagnesowania a wyróżnioną osią
 \vec{H} – wektor natężenia pola magnetycznego na powierzchni materiału magnesowanego
 \vec{M} – wektor namagnesowania domeny
 \vec{M}_z – wektor namagnesowania domeny zamykającej
 σ_w – zastępcza powierzchniowa gęstość energii ścianki domenowej

1. Wstęp

Modeli matematycznych magnesowania ferromagnetyków, również tych makroskopowych, jest wiele, jednak wszystkie zakładają istnienie granicznej pętli histerezy, a tym samym pomijają istnienie domenowych prądów wirowych [3, 5, 6, 12]. Wysiłek autorów tych modeli koncentruje się zatem na możliwie dokładnym odzwierciedleniu samej pętli granicznej, a także na umieszczeniu wewnątrz niej „krzywych cząstkowych” dla pola magnesującego niebędącej funkcją okresową. Założenie, że krzywą magnesowania daje się „złożyć” z funkcji wykładniczych, jest pozbawione podstaw fizycznych, aczkolwiek może dawać poprawne rezultaty pod względem jakościowym [6, 7, 10]. Oczywiście podejmowane były próby zbudowania modelu matematycznego na podstawie danych materiałowych [8, 9], jednak zakładały one wyłącznie ruch rotacyjny momentów magnetycznych domen. W niniejszym artykule skoncentrujemy się na stworzeniu modelu matematycznego magnesowania materiału ferromagnetycznego cienkowieńcowego o strukturze domenowej prostej, w której występują zarówno zjawiska rotacji części domen (tzw. zamykających), jak i przemieszczania się ścian domenowych zwanych ścianami Blocha.

2. Energie występujące w magnesowanych materiałach ferromagnetycznych

Teoria magnetyzmu wymienia kilka rodzajów energii odpowiedzialnych za powstawanie domen magnetycznych oraz określonego kształtu charakterystyki magnesowania. Pierwsza z nich to **energia wymiany** określana relacją [2]:

$$E_w = -J \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^z \vec{S}_i \vec{S}_j \quad (2.1)$$

gdzie:

N – całkowita liczba spinów w kryształach,

z – liczba najbliższych sąsiadów danego spinu,

\vec{S}_i, \vec{S}_j – spiny atomów w i -tym i j -tym węzle sieci,

J – wielkość nie mająca analogii w fizyce klasycznej.

Sumowanie w relacji (1.1) obejmuje każdą parę spinów tylko raz. Przykładowo, dla pary oddziałujących ze sobą spinów energia ta zostaje opisana relacją:

$$E_w = -JS_i S_j \cos \phi$$

gdzie:

ϕ – kąt pomiędzy spinami \vec{S}_i i \vec{S}_j .

Energia ta odpowiedzialna jest głównie za wartość grubości ścianek domenowych. W dalszych rozważaniach grubość ta, ze względu na jej znikomą wartość w porównaniu do rozmiaru domeny magnetycznej, zostanie pominięta.

Druga z tych energii to **energia anizotropii magnetokrystalicznej** opisywana wzorem [1], [2]:

$$E_a = \sum_i V k_{ai} \sin^{2i} \theta \quad (2.2)$$

gdzie:

k_{ai} – stałe anizotropii magnetokrystalicznej,

V – objętość domeny magnetycznej,

θ – kąt między wektorem namagnesowania a wyróżnioną osią.

W wielu przypadkach wygodniej jest posługiwać się kątem $\phi = \frac{\pi}{2} - \theta$, stąd wyrażenie 1.2 przyjmie postać:

$$E_a = \sum_i V k_{ai} \cos^{2i} \phi \quad (2.3)$$

Dla opisu tej energii w przypadku większości materiałów ferromagnetycznych jednoosiowych wystarczającą jest jedna stała k_a .

Trzecim rodzajem energii to **energia magnetostatyczna** [1, 2], która jest najtrudniejsza do obliczeń. Korzysta się tu zazwyczaj z fenomenologicznego przybliżenia wynikającej z równań Maxwella formalnej analogii między statycznymi polami mag-

netycznymi i elektrycznymi. Konsekwencją powyższego jest wprowadzenie pojęcia gęstości biegunów zdefiniowanych relacją:

$$\rho = -\operatorname{div}\vec{M} \quad (2.4)$$

gdzie:

\vec{M} – wektor namagnesowania.

Przy takich założeniach energię magnetostaticzną oblicza się ze wzoru:

$$E_{\text{ms}} = \frac{1}{8\mu_0} \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{\rho(r_1)\rho(r_2)}{r_{12}} dV_1 dV_2 \quad (2.5)$$

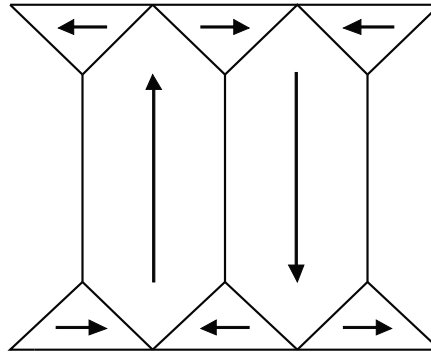
gdzie:

r_{12} – jest odległością między punktami o współrzędnych odpowiednio r_1 i r_2 .

Wyodrębnienie wyżej wymienionych energii pozwala na wyznaczenie grubości ścianki domenowej oraz szerokość domen. Wyróżnia się przy tym zasadniczo dwie struktury domenowe: zamkniętą, zaproponowaną przez L.D. Landaua i J.M. Lipszyca, i otwartą – zaproponowaną przez Ch. Kittela. W zależności od stałych materiałowych, przy braku pola zewnętrznego domeny przyjmują albo strukturę zamkniętą, to znaczy taką, w której występują domeny zamykające, albo otwartą. W jednym i w drugim przypadku można wyznaczyć szerokość danej domeny.

Struktura zamknięta

Przykładowy kształt struktury domenowej zamkniętej [1] przedstawia rysunek 1.



Rys. 1. Struktura domenowa zamknięta

Fig. 1. Closed domain structure

Całkowita gęstość powierzchniowa energii E_{LL} jest sumą powierzchniowych gęstości energii związanych z objętością ścianek domenowych E_p i energii anizotropii magnetycznej związanej z istnieniem domen zamykających E_a [1]. Pierwszą z nich opisuje wyrażenie:

$$E_p = \frac{\sigma_w h}{x} \quad (2.6)$$

gdzie:

σ_w – zastępcza powierzchniowa gęstość energii ścianki domenowej,
 h – wysokość ścianki domenowej w kierunku łatwego magnesowania.

Gęstość powierzchniowa energii anizotropii wyraża się wzorem:

$$E_a = \frac{k_a x}{2} \cos^2 \varphi \quad (2.7)$$

Zatem szerokość domeny można wyznaczyć z warunku na minimum energii:

$$\frac{dE_{LL}}{dx} = \frac{k_a \cos^2 \varphi \sigma_w h}{2 x^2} = 0 \quad (2.8)$$

Stąd

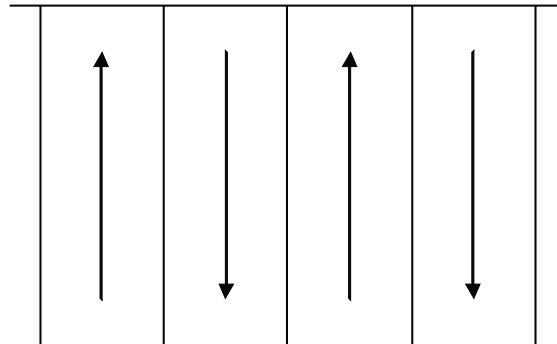
$$D = \sqrt{\frac{2\sigma_w h}{k_a \cos^2 \varphi}} \quad (2.9)$$

Dla typowych domen zamykających, dla których $\varphi = 0$ wyrażenie 2.9 przyjmie postać:

$$D = \sqrt{\frac{2\sigma_w h}{k_a}} \quad (2.10)$$

Struktura otwarta

Przykładowy model struktury domenowej otwartej [2] przedstawia rys. 2.



Rys. 2. Struktura domenowa otwarta
 Fig. 2. Open domain structure

Całkowita gęstość powierzchniowa energii E_K jest sumą powierzchniowych gęstości energii związanych z objętością ścianek domenowych E_p i gęstością energii magneto-statycznej związanej z obecnością biegunów magnetycznych na powierzchni płytki E_m [2].

Gęstość energii magneto-statycznej najczęściej opisuje się ją wzorem:

$$E_{ms} = \frac{M^2 x}{8\mu_0} \quad (2.11)$$

natomiast powierzchniowa gęstość energii związanej z objętością ścianek domenowych opisana jest jak poprzednio wzorem (1.6).

Zatem szerokość domeny można wyznaczyć z warunku na minimum energii E_K :

$$\frac{dE_K}{dx} = \frac{M^2}{8\mu_0} - \frac{\sigma_w h}{x^2} = 0 \quad (2.12)$$

Stąd szerokość domeny o strukturze otwartej D wyrazi się wzorem:

$$D = \sqrt{\frac{8\mu_0 \sigma_w h}{M^2}} \quad (2.13)$$

Porównując energię struktury zamkniętej z energią struktury otwartej, można wyciągnąć wniosek, że dla przypadku, w którym zachodzi nierówność:

$$\sqrt{4\mu_0} > \frac{M}{\sqrt{k_a}} \quad (2.14)$$

w układzie dominować będzie struktura otwarta. W istocie jednak nierówność (2.14) jest jedynie warunkiem koniecznym na istnienie struktury otwartej. Tymczasem w wielu ferromagnetykach o strukturze domenowej występują obok siebie domeny zamknięte i otwarte. W dalszych rozważaniach zostanie przyjęte założenie, że magnesowany materiał ferromagnetyczny cienkowiekowy zawiera w sobie jedynie strukturę domenową zamkniętą i wymiary tego materiału mieszczą w sobie parzystą liczbę domen równą $2N$. W przeciwnym przypadku materiał taki nie mógłby być całkowicie rozmagnesowany lub założenie o jednorodnej strukturze domenowej zamkniętej, magnesowanej próbki byłoby nie do utrzymania.

3. Struktura domenowa w zewnętrznym polu magnetycznym

Umieszczenie materiału ferromagnetycznego o idealnej strukturze domenowej w jednorodnym polu magnetycznym skierowanym równoległe do osi łatwego magnesowania powoduje ruch ścian domenowych. Dla domen, których namagnesowanie jest równoległe do wektora natężenia pola, ściany przemieszczając się, powiększają ich szerokość kosztem tych domen, których namagnesowanie jest antyrównoległe do wektora pola zewnętrznego.

Energia oddziaływania domen z zewnętrznym polem magnetycznym o natężeniu H ma postać:

$$E_H = -\int_V (\vec{M}\vec{H}) dV \quad (3.1)$$

W przypadku tej samej wartości wektora natężenia pola \vec{H} w całej objętości domeny relacja 2.1 przyjmie postać:

$$E_H = -\vec{M}\vec{H}V \quad (3.2)$$

Energia oddziaływania domen z zewnętrznym polem magnetycznym dla przypadku idealnych prostopadłościennych domen przyjmie postać:

$$E_H = -\vec{M}\vec{H}S_D x \quad (3.3)$$

gdzie:

S_D – jest powierzchnią boczną domeny.

Dla przypadku jednorodnego pola płaskiego mamy:

$$E_H = -MHS_D x \sin \varphi \quad (3.4)$$

a w przypadku wektora pola równoległego do kierunku łatwego magnesowania, wyrażenie (2.4) przyjmie postać:

$$E_H = -MHS_D x \quad (3.5)$$

Umieszczenie ferromagnetyka o idealnej strukturze domenowej w zewnętrznym polu magnetycznym będzie powodowało przemieszczanie się ścian tych domen w ten sposób, że domeny o namagnesowaniu \vec{M} zgodnym z kierunkiem pola \vec{H} będą się poszerzały kosztem domen o namagnesowaniu przeciwnym. Liczba obydwu rodzajów domen niech będzie równa i niech wynosi N .

Dla przypadku struktur zamkniętych występują jeszcze domeny o kierunku namagnesowania prostopadłym do kierunku wektora natężenia pola. W zewnętrznym polu magnetycznym wektor tego namagnesowania wykonuje rotacje w kierunku zwrotu wektora natężenia pola zewnętrznego. Bilans energetyczny w tym przypadku przyjmie postać:

Struktura otwarta (model dwudomenowy)

$$E_H + E_p + E_m = E_K \quad (3.6)$$

gdzie $E_H = -2MHx$

$$E_m = \left\{ \frac{M^2 (D+x)}{8\mu_0} + \frac{M^2 (D-x)}{8\mu_0} \right\} \cos(\varphi)$$

przy czym $\varphi = 0$

$$E_p = \left(\frac{\sigma_w h}{D+x} + \frac{\sigma_w h}{D-x} \right).$$

Teraz można napisać:

$$\frac{dE_K}{dx} = \left\{ 2MH - \frac{\sigma_w h}{(D-x)^2} + \frac{\sigma_w h}{(D+x)^2} \right\} = 0 \quad (3.7)$$

Na podstawie powyższej relacji można przedstawić, jak zmieniałyby się grubość domen, dla materiału o strukturze domenowej otwartej w zależności od wartości natężenia zewnętrznego pola magnetycznego w warunkach występowania wyłącznie procesów odwracalnych i przy braku domenowych prądów wirowych.

Przykładowe obliczenia przedstawione na rysunku 3 zostały wykonane dla domen

o danych: $\sigma_w = 1,1 \cdot 10^{-3} \frac{\text{J}}{\text{m}^2}$, $h = 0,2 \text{ m}$, $D = 0,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

Struktura zamknięta (model dwudomenowy)

Umieszczenie ferromagnetyka, o idealnej strukturze domenowej zamkniętej, w zewnętrznym polu magnetycznym wywołuje procesy bardziej złożone od analogicznych procesów w warunkach struktury domenowej otwartej. Jest to spowodowane faktem, że obok domen podstawowych o namagnesowaniu równoległym i przeciwrównoległym względem pola zewnętrznego występują domeny zamykające, których kierunek łatwego namagnesowania jest prostopadły względem kierunku pola zewnętrznego – rysunek 1. Zatem całkowite namagnesowanie układu domen będzie sumą geometryczną namagnesowania domen podstawowych i zamykających. Bilans energetyczny dla tego przypadku ma postać:

$$E_{LL} = E_H + E_p + E_a \quad (3.8)$$

gdzie:

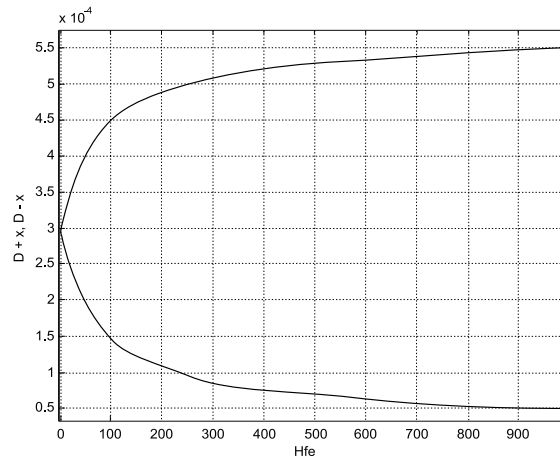
$$E_H = -MHx - 2M_z H \sin \varphi, \quad E_a = k_a D \cos^2 \varphi$$

$$E_p = \left(\frac{\sigma_w h}{D+x} + \frac{\sigma_w h}{D-x} \right) \cos \varphi, \quad E_m = \frac{M^2 D}{4\mu_0} \cos \varphi$$

W tym przypadku, warunek na minimum energii będzie się składał z dwóch równań:

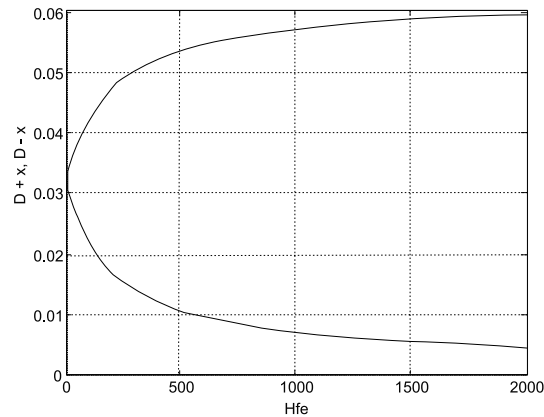
$$\frac{dE_{LL}}{dx} = -MH + \left(\frac{\sigma_w h}{(D-x)^2} - \frac{\sigma_w h}{(D+x)^2} \right) \cos \varphi = 0 \quad (3.9a)$$

$$\frac{dE_{LL}}{d\varphi} = -2M_z H \cos \varphi + \left[\left(\frac{\sigma_w h}{D+x} + \frac{\sigma_w h}{D-x} \right) + 2Dk_a \cos \varphi \right] \sin \varphi + \frac{M^2 D}{4\mu_0} \sin \varphi = 0 \quad (3.9b)$$



Rys. 3. Zależność zmiany szerokości sąsiednich domen magnetycznych otwartych o przeciwnych namagnesowaniach, umieszczonych w zewnętrznym polu magnetycznym

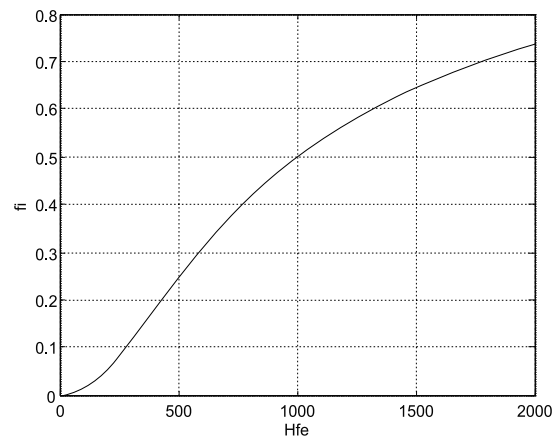
Fig. 3. Dependence of changes in the width of the adjacent magnetic domains magnetized open on the contrary, placed in an external magnetic field



Rys. 4. Zależność zmiany szerokości sąsiednich domen magnetycznych zamkniętych o przeciwnych namagnesowaniach, umieszczonych w zewnętrznym polu magnetycznym

Fig. 4. Dependence of changes in the width of the adjacent magnetic domains magnetized closed on the contrary, placed in an external magnetic field

Na podstawie powyższych relacji można pokazać, jak zmieniałyby się grubość domen głównych i kątów położenia momentów magnetycznych domen zamykających w zależności od wartości natężenia zewnętrznego pola magnetycznego, jeśli przyjąć, że w domenach występują jedynie procesy odwracalne i nie występują domenowe prądy wirowe.



Rys. 5. Kąt obrotu wektora namagnesowania domeny zamykającej umieszczonej w zewnętrznym polu magnetycznym

Fig. 5. The angle of rotation of magnetization vector of the domain closing placed in the magnetic field

Tak więc przebiegi przedstawione na rysunkach 3, 4, 5 mają charakter testowy dla równań odpowiednio (3.7) i (3.9).

4. Zjawisko pozostałości magnetycznej oraz domenowych prądów wirowych

Podczas magnesowania materiału ferromagnetycznego obserwuje się dwa zjawiska. Pierwsze z nich dotyczy występowania pozostałości magnetycznej po zaniknięciu pola magnesującego. Mówimy o takim procesie, że może mieć charakter nieodwracalny. Ponieważ wartość i biegunowość pozostałości magnetycznej zależy od wartości i znaku pola magnesującego, to w przypadku magnesowania polem zmiennym obserwuje się krzywą zamkniętą, zwaną histerezą. Jej cechą jest to, że kształt oraz zawarte wewnątrz niej pole powierzchni zależy od amplitudy pola magnesującego. Drugie zjawisko polega na występowaniu zależności kształtu histerezy od szybkości zmian pola magnesującego. Zazwyczaj pierwsze z tych zjawisk tłumaczy się zawieszaniem się ścianek domenowych na nieregularnościach energetycznych kryształu [1, 2]. Zawieszanie to można przyrównać do zjawiska tarcia suchego w mechanice [9]. Drugie ze zjawisk wynika z występowania tzw. domenowych prądów wirowych [9]. Pozostaje zatem opisać te zjawiska językiem matematyki. Jeśli nadać interpretację fizyczną równaniom (2.9), to łatwo zauważyć, że równanie (2.9a) jest równaniem sił działających na jednostkę powierzchni ściany domenowej, natomiast równanie (2.9b) jest równaniem momentów obrotowych działających na jednostkę powierzchni wypadkowego momentu magnetycznego domen zamykających. Siłę działającą na jednostkę powierzchni ściany domenowej przeciwstawiającą się ruchowi tej ściany można wyrazić relacją:

$$F_h = F_{sh}(B, H) \operatorname{sign}(\dot{x}) \quad (4.1a)$$

gdzie:

$F_{sh}(B, H)$ – funkcyjna wartość bariery potencjałowej zależna od wartości gęstości energii pola magnesującego charakterystyczna dla ruchu ściany domenowej,

\dot{x} – prędkość liniowa przemieszczania się ściany domenowej.

Nieodwracalnością może się charakteryzować nie tylko proces przemieszczania się ścian domenowych, ale także proces rotacji momentów magnetycznych domen zamykających. Dla tego zjawiska zapiszemy:

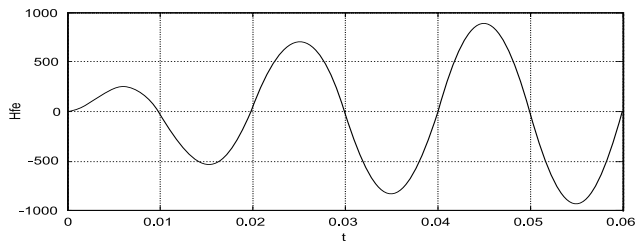
$$T_h = T_{zh}(B, H) \operatorname{sign}(\dot{\phi}) \quad (4.1b)$$

gdzie:

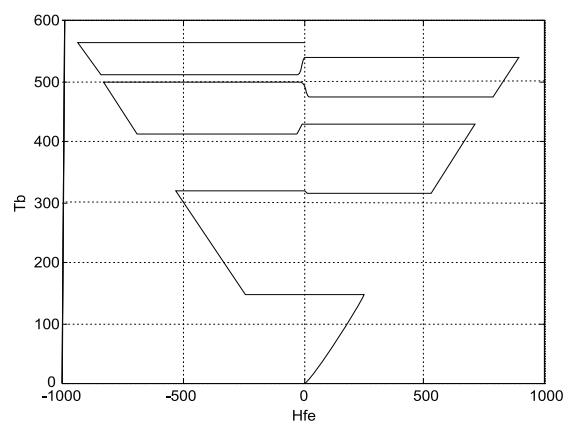
$T_{zh}(B, H)$ – funkcyjna zależność „bariery potencjałowej” zależna od wartości energii pola magnesującego charakterystyczna dla rotacji momentów magnetycznych domen zamykających,

$\dot{\phi}$ – prędkość rotacji momentu magnetycznego domeny zamykającej.

Problem modelowania matematycznego zależności wartości „bariery potencjałowej” sprowadza się do zauważenia, że nie jest ona jednoznaczna funkcją natężenia pola, oraz w istotny sposób zależy od jej lokalnych ekstremów. Dla przypadku magnesowania polem przemiennym o narastającej amplitudzie jak na rys. 6 kształt funkcji narastania wartości bariery potencjałowej przedstawiają rysunki 7 i 8.

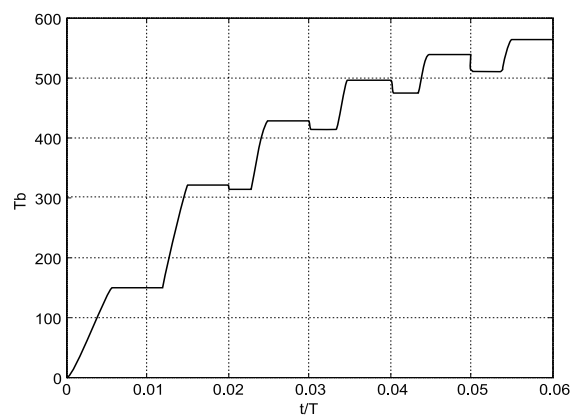


Rys. 6. Przebieg natężenia pola magnesującego w czasie
Fig. 6. Mileage magnetizing field strength at the time



Rys. 7. Zależność wartości „bariery potencjalowej” od narastającej w czasie funkcji przemagnesowywania sinusoidalnego

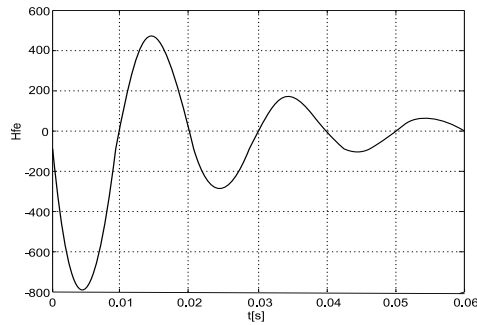
Fig. 7. The dependence of „Potential barriers” from growing during the sinusoidal function demagnetization



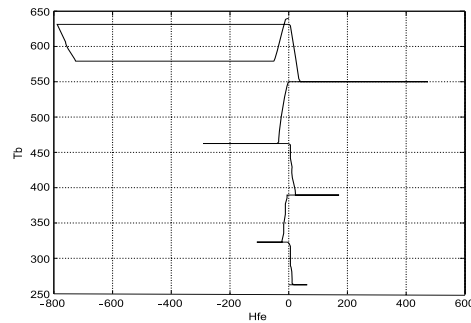
Rys. 8. Zmiany w czasie wartości „bariery potencjalowej” w zależności od narastającej w czasie funkcji przemagnesowywania sinusoidalnego

Fig. 8. Changes in the time value of „Potential barriers” in the light of growing during the demagnetization sinusoidal function

Dla przypadku rozmagnesowywania materiału ferromagnetycznego analogiczne funkcje mają postać:

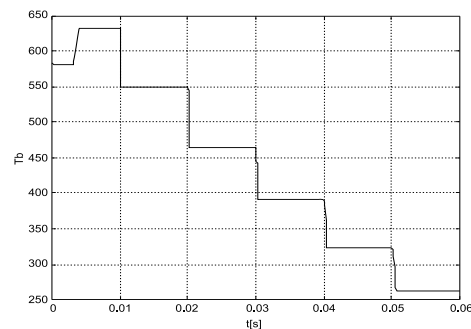


Rys. 9. Przebieg natężenia pola magnesującego w czasie
Fig. 9. Mileage magnetizing field strength at the time



Rys. 10. Przebieg zmian wartości „bariery potencjałowej” w funkcji natężenia pola podczas procesu odmagnesowania

Rys. 10. Course of changes in the value of „Potential barriers” as a function of field strength during the demagnetization



Rys. 11. Przebieg zmian wartości „bariery potencjałowej” w funkcji czasu podczas procesu odmagnesowania

Fig. 11. Course of changes in the value of „Potential barriers” as a function of time during the demagnetization process

Jak łatwo zauważyć, proces budowania bariery potencjałowej nie jest procesem odwrotnym do jej demontażu. Oddziaływanie domenowych prądów wirowych można przedstawić relacjami:

$$F_w = D_{wx} \dot{x} \quad (4.2a)$$

$$T_w = D_{w\phi} \dot{\phi} \quad (4.2b)$$

gdzie:

D_{wx} i $D_{w\phi}$ – współczynniki dyssypacji w ruchu liniowym ścian Blocha i kątowym dla wypadkowego momentu magnetycznego domen zamykających.

5. Model matematyczny magnesowania materiału ferromagnetycznego o jednorodnej strukturze domenowej

Rzeczywiste materiały ferromagnetyczne są zazwyczaj pewną mieszaniną struktur ferromagnetycznych domenowych zamkniętych i otwartych. W niniejszym rozdziale zostanie sformułowany model dla wyidealizowanego materiału ferromagnetycznego składającego się wyłącznie ze struktur domenowych zamkniętych. Pozornie można przypuszczać, że model ten składać się powinien z układu równań utworzonych z równań (2.9) i (3.1). Jednak zmiana energii magnesowanej próbki wskutek przesunięcia granic domen przebiega nierównomiernie na skutek lokalnych zmian powodowanych odkształceniami, domieszkami czy różnymi wymiarami kryształów, a to powoduje nierównomierne przemieszczanie się zarówno całych ścian Blocha, jak i poszczególnych jej spinów. Konstatacja ta prowadzi do rozbudowania modelu matematycznego w stosunku do modelu wynikającego z równań (2.9) i (3.1). I tak równania dla przemieszczających się ścian domenowych przyjmują postać:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{D_{wx}} \left[MH - 2k_a D \frac{D^2 x_1}{(D^2 - x_1^2)^2} \cos \varphi - F_{sh}^1(B, H) \operatorname{sign} \left(\frac{dx_1}{dt} \right) \right] \quad (5.1.1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{D_{wx}} \left[MH - 2k_a D \frac{D^2 x_2}{(D^2 - x_2^2)^2} \cos \varphi - F_{sh}^2(B, H) \operatorname{sign} \left(\frac{dx_2}{dt} \right) \right] \quad (5.1.2)$$

⋮
⋮
⋮

$$\frac{dx_n}{dt} = \frac{1}{D_{wx}} \left[MH - 2k_a D \frac{D^2 x_n}{(D^2 - x_n^2)^2} \cos \varphi - F_{sh}^n(B, H) \operatorname{sign} \left(\frac{dx_n}{dt} \right) \right] \quad (5.1.n)$$

Natomiast równania dla rotacji momentów magnetycznych domen zamykających następująca:

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{1}{D_{w\varphi}} \left\{ 2M_z H \cos \varphi_1 - 2k_a D \left[\frac{0,5D^2}{D^2 - x^2} + \cos \varphi_1 \right] \sin \varphi_1 - \right. \\ \left. - \frac{M_z^2 D}{4\mu_0} \sin \varphi_1 - T_{zh}^1(B, H) \operatorname{sign} \left(\frac{d\varphi_1}{dt} \right) \right\} \quad (5.2.1)$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{1}{D_{w\varphi}} \left\{ 2M_z H \cos \varphi_2 - 2k_a D \left[\frac{0,5D^2}{D^2 - x^2} + \cos \varphi_2 \right] \sin \varphi_2 - \right. \\ \left. - \frac{M_z^2 D}{4\mu_0} \sin \varphi_2 - T_{zh}^2(B, H) \operatorname{sign} \left(\frac{d\varphi_2}{dt} \right) \right\} \quad (5.2.2)$$

⋮
⋮
⋮

$$\frac{d\varphi_m}{dt} = \frac{1}{D_{w\varphi}} \left\{ 2M_z H \cos \varphi_m - 2k_a D \left[\frac{0,5D^2}{D^2 - x^2} + \cos \varphi_m \right] \sin \varphi_m - \right. \\ \left. - \frac{M_z^2 D}{4\mu_0} \sin \varphi_m - T_{zh}^m(B, H) \operatorname{sign} \left(\frac{d\varphi_m}{dt} \right) \right\} \quad (5.2.m)$$

gdzie:

$$x = \sum_{i=1}^n w_x^i x_i, \quad \varphi = \sum_{i=1}^m w_\varphi^i \varphi_i, \quad w_x^i; w_\varphi^i - \text{współczynniki wagi.}$$

Relacje między wartościami F_{sh}^i oraz wartościami T_{zh}^i są niezmiernie trudne do określenia ze względu na fakt, że wynikają one głównie z defektów magnesowanej próbki. Ponieważ jednak proces magnesowania tak w obszarze przesuwania ścian Blocha, jak i obrotów momentu magnetycznego domen zamykających, może mieć charakter odwracalny, jak i nieodwracalny (w obszarze małych natężeń pola), zatem jedna z wielkości F_{sh}^i oraz T_{zh}^i musi przyjąć wartość zerową. Z powyższego układu równań wynika, że kształt krzywej magnesowania zdeterminowany jest grubością domen magnetycznych (D), stałą anizotropii magnetokrystalicznej (k_a) oraz lokalnych defektów kryształów (F_{sh}^i, T_{zh}^i).

Biorąc pod uwagę fakt, że podczas procesu magnesowania objętość domen zamykających nie ulega zmianie [2], należy przyjąć, że zmienia się ich kształt oraz kierunek wypadkowego namagnesowania. Zatem wartość pola indukcji na zewnątrz magnesowanej próbki w osi wektora natężenia pola wyrazi się wzorem:

$$B = \mu_0 H + (M - 2M_z) \frac{x}{D} + 2M_z \sin \varphi \quad (5.3)$$

6. Przykłady modelowania matematycznego charakterystyk magnesowania

Równania modelu matematycznego (5.1) i (5.2) są równaniami różniczkowymi nieliniowymi, zatem wymagają numerycznych metod ich rozwiązywania. Symulacja magnesowania w niniejszym artykule zostanie przeprowadzona z wykorzystaniem środowiska MATLAB (licencja nr 214849).

Cykliczna zmiana pola magnesującego (H) wywołuje zmianę namagnesowania i indukcji po zamkniętej krzywej, zwanej pętlą histerezy. Pętlę histerezy charakteryzują trzy parametry: indukcja nasycenia (B_s), indukcja remanencji (B_r) i pole koercji (H_c). Z wymienionych wielkości jedynie B_s jest parametrem jednoznacznie zależnym od magnesowanego materiału. Pozostałe parametry zależą od parametrów struktury domenowej, rodzaju defektów i ich rozkładu a zatem od obróbki technologicznej.

Dla potrzeb przykładowego wykazania możliwości prezentowanego modelu przyjęto liczbę równań opisujących przesuwanie się ściany domenowej n i obrotu momentu namagnesowania domen zamykających m sobie równą i wynoszącą 6. W przypadku współczynników wagi w również założono, że są one sobie równe i wynoszą $\frac{1}{6}$. Dla potrzeb

modelowania konieczne jeszcze jest określenie relacji F_{sh}^i oraz T_{zh}^i dla poszczególnych wartości wskaźnika i . Ponieważ proces tak przesuwania ścian domenowych, jak i rotacji momentów magnetycznych domen zamykających, może mieć charakter odwracalny i nieodwracalny, przyjęto, że:

$$F_{sh}^i(B, H) = F_{sh}(B, H) \frac{i-1}{5} \quad \text{dla } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad \text{oraz}$$

$$T_{zh}^i(B, H) = T_{zh}(B, H) \frac{i-1}{5} \quad \text{dla } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Wobec braku danych eksperymentalnych (literaturowych) przyjęto, że relacja liczbową pomiędzy funkcjami $F_{sh}(B, H)$ i $T_{zh}(B, H)$ jest równa relacji pomiędzy objętościami domeny głównej i zamykającej.

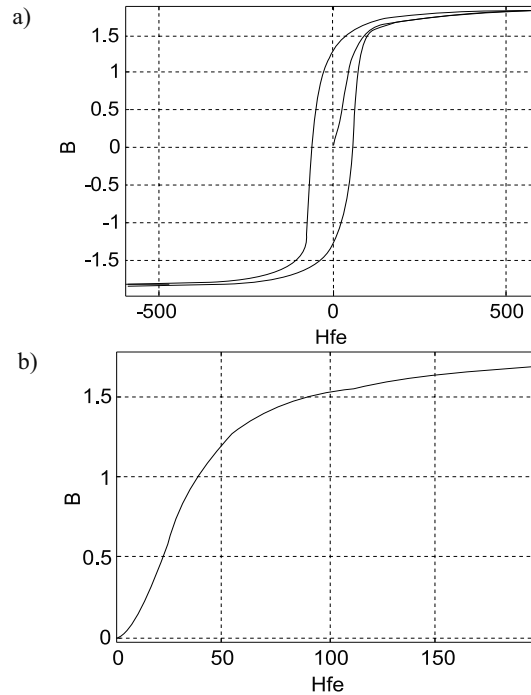
W modelowanym przykładzie wynosi on 15%, zatem $T_{zh} = 0,15 T_{sh}$. Jednocześnie uznano, że obniżanie „bariery potencjałowej” zachodzi tylko wtedy, gdy $BH > 0$.

Na rysunku 12a przedstawiono pętlę histerezy łącznie z krzywą magnesowania wstępnego, natomiast na rysunku 12b wyłącznie krzywa magnesowania wstępnego, jednak o mniejszym zakresie zmiany natężenia pola H . Zostało to spowodowane chęcią uwypuklenia początkowego kształtu tej krzywej. W obydwu przypadkach, początkowo materiał ferromagnetyczny jest całkowicie rozmagnesowany.

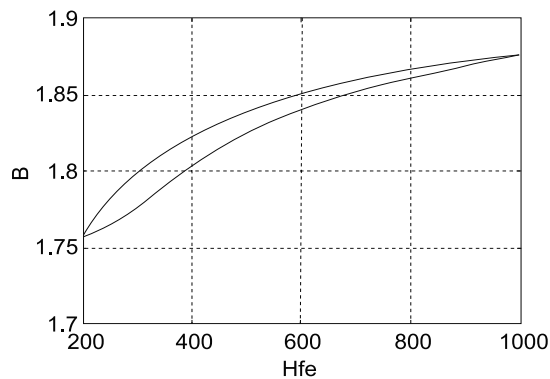
W wielu urządzeniach działających na bazie materiału ferromagnetycznego występuje sytuacja współistnienia pola magnetycznego stałego w czasie i pola przemienne. Rysunek 13 przedstawia możliwości modelu dla takiego przypadku.

Najtrudniejszym problemem do rozwiązania przy budowaniu modelu matematycznego magnesowania ferromagnetyka jest proces rozmagnesowywania go za pomocą pola przemienne. Prezentowany tu model ten problem rozwiązuje z powodzeniem, a wynik

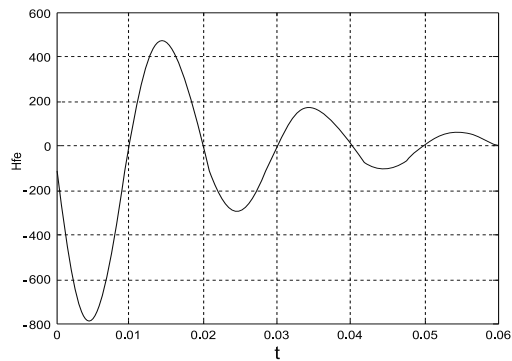
przedstawiają rysunki 14, 15, 16. Oddzielnym zagadnieniem jest liczba okresów (przemagnesowań), które muszą nastąpić, aby materiał został rozmagnesowany.



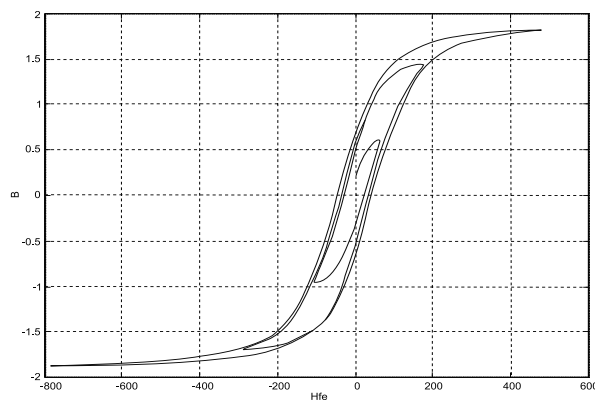
Rys. 12. Krzywa magnesowania ferromagnetyka: a) pętla histerezy, b) krzywa magnesowania wstępnego
 Fig. 12 Magnetization curve of ferromagnetic material: a) hysteresis loop, b) curve of initial magnetization



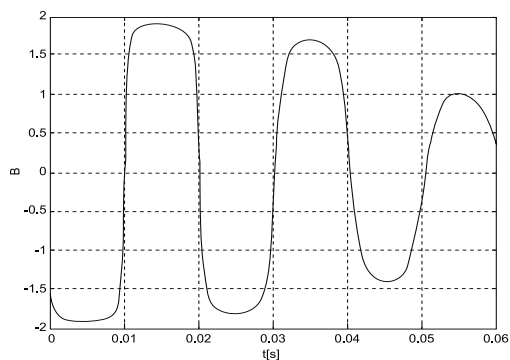
Rys. 13. Krzywa magnesowania ferromagnetyka z polem podmagnesowującym o stałej wartości 600 A/m
 Fig. 13. Magnetization curve of ferromagnetic material with a field initially magnetising a constant value 600 A/m



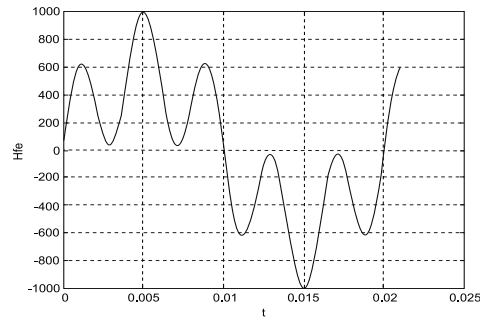
Rys. 14. Funkcja natężenia pola rozmagnesującego materiał ferromagnetyczny
 Fig. 14. Function degaussing field strength ferromagnetic material



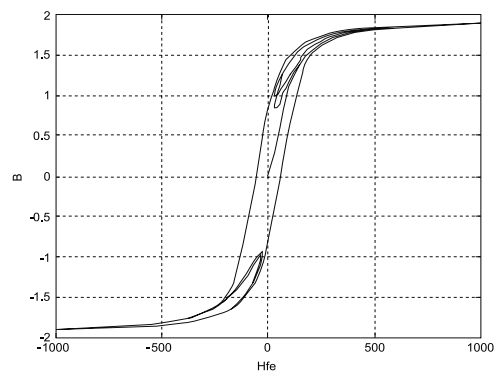
Rys. 15. Krzywe procesu rozmagnesowywania materiału ferromagnetycznego
 Fig. 15. Curves of ferromagnetic materials, the process of demagnetizing



Rys. 16. Przebieg w czasie indukcji magnetycznej podczas rozmagnesowywania materiału ferromagnetycznego polem o kształcie jak na rysunku 14
 Fig. 16. Time course of magnetic induction in the demagnetizing field of ferromagnetic material shaped as shown in Figure 14

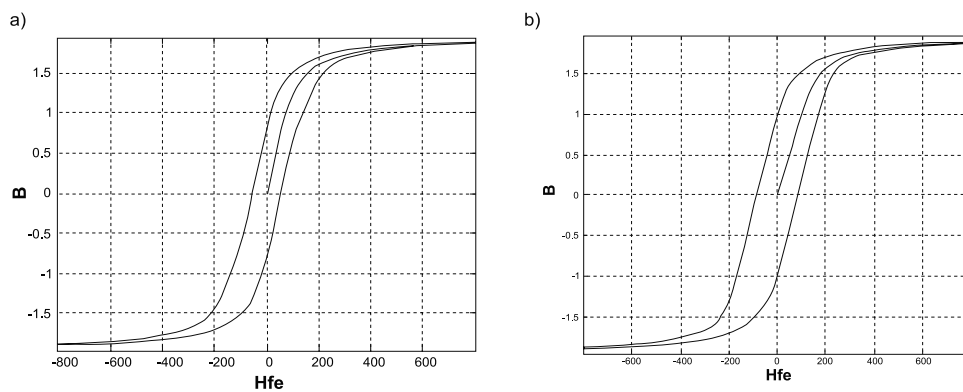


Rys. 17. Odształcona funkcja natężenia pola magnetycznego
Fig. 17. Deflected function of magnetic field strength



Rys. 18. Krzywa indukcji magnetycznej B powstała w wyniku magnesowania odształconym w czasie natężeniem pola H

Fig. 18. The curve of magnetic induction B is the result of magnetization intensity during a deformed field H



Rys. 19. Histereza magnesowania próbki ferromagnetycznej natężeniem pola H_{Fe} o kształcie sinusoidalnym w czasie, przy częstotliwości: a) 50 Hz oraz b) 250 Hz

Fig. 19. Ferromagnetic hysteresis magnetization of the sample field intensity H -shaped sinusoidal in time, at a frequency of: a) 50 Hz and b) 250 Hz

Już samo występowanie w obwodach elektrycznych elementów indukcyjnych zawierających rdzenie ferromagnetyczne powodowało odkształcenia prądu lub/i napięcia. Dodatkowo proces ten pogłębiło wprowadzenie elementów energoelektronicznych. Na rysunku 18 przedstawiono pętle, nazwijmy ją nadal histerezową, w przypadku magnesowania polem o kształcie jak na rysunku 17.

Aby wykazać, że prezentowany tu model uwzględnia wpływ różnych częstotliwości przemagnesowywania na kształt charakterystyk magnesowania, a wynikający z istnienia domenowych prądów wirowych, przedstawiono na rysunku 19 dwie pętle histerezy, jedna dla przemagnesowywania z częstotliwością 50 Hz (rys. 19a) i druga z częstotliwością 250 Hz (rys. 19b).

Wszystkie obliczenia zobrazowane powyższymi przebiegami wykonano z wykorzystaniem układu jednostek SI, zatem osie przebiegów na rysunkach są zwymiarowane w tych jednostkach.

7. Wnioski

Przedstawiony w niniejszym artykule model matematyczny magnesowania materiału ferromagnetycznego o strukturze domenowej umożliwia analizę relacji $B(H)$ dla różnych kształtów, jako funkcji czasu, natężenia pola magnetycznego. Pozwala on na modelowanie przypadków: przemagnesowywania symetrycznego i niesymetrycznego (z podmagnesowaniem), magnesowania funkcją odkształconą, uwzględnia wpływ szybkości magnesowania na kształt funkcji indukcji. W przypadku przemagnesowywania cyklicznego symetrycznego wpływ wartości częstotliwości uwidacznia się różną powierzchnią pętli histerezy. Wraz ze wzrostem tej częstotliwości różnie pole powierzchni pętli. W tym miejscu prezentowany model różni się zasadniczo od większości znanych modeli, które zakładają istnienie pętli granicznej. Model sformułowano dla struktury domenowej charakterystycznej dla materiałów ferromagnetycznych cienkowarstwowych. Pozostają do rozstrzygnięcia wartości liczbowe układu równań (5.1) i (5.2). Niewątpliwie całkowita liczba równań ($n + m$) powinna się równać liczbie „skoków Barkhausena” przy przejściu od materiału rozmagnesowanego do stanu nasycenia. W praktyce jednak należy ograniczyć się do znacznie mniejszej liczby, gdyż wymaga tego kompromis między dokładnością modelowania a czasem obliczeń. Należy jeszcze zaznaczyć, a wynika to z doświadczeń symulacyjnych prezentowanego modelu, że nie można dobrać parametrów „bariery potencjałowej” w sposób niezależny od parametrów domen (D, k_d). Zabieg taki może prowadzić do zakwestionowania liczby samych równań (wielkości $n + m$), a nawet do niestabilności modelu. Relacje między tymi wielkościami wymagają jednak jeszcze dalszych analiz.

Literatura

- [1] Morrish A.H., *Fizyczne podstawy magnetyzmu*, Warszawa 1970.
- [2] Kittel C., *Wstęp do fizyki ciała stałego*, Warszawa 1974.

- [3] Mayergoyz I.D., *Mathematical Models of Hysteresis*, Springer-Verlag 1991.
- [4] Roman A., *Analiza efektów wiropądowych w materiałach magnetycznie miękkich o uporządkowanej strukturze domenowej*, Seria Monografie, 36, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 1995.
- [5] Włodarski Z., Włodarska J., *Simplified determination of complex hysteresis loop*, Proceedings XVI Symposium „Electromagnetic Phenomena in Nonlinear Circuits”, Poznań-Kraków 2000.
- [6] Mazgaj W., *Properties of magnetic hysteresis models*, Archives of Electrical Engineering, Vol. LV, No. 2, 2006, 147-161.
- [7] Mazgaj W., *Application of an exponential function for description of flux density changes in ferromagnetic materials*, Archives of Electrical Engineering, Vol. LV, No. 3-4, 2006, 223-235.
- [8] Ivanyi A., *Hysteresis Models in Electromagnetic Computation*, Akademiai Kiado, Budapest 1997.
- [9] Jagiełło A.S., *Mathematical modelling of transformer sheet steel magnetization*, Journal of Magnetism and Magnetic Materials, Vol. 160, July 1996, 91-93.
- [10] Bogucki M., *Matematyczny model pętli magnesowania rdzeni ferromagnetycznych*, Archiwum Elektrotechniki, Tom XXX, zeszyt 3, 1981.
- [11] Chua L.O., Bass S.C., *A generalized hysteresis model*, IEEE Trans. on Circuit Theory, Vol. CT – 19, No. 1, 1972.
- [12] Bertotti G., *Dynamic Generalization of the Scalar Preisach Model of Hysteresis*, IEEE Trans. Magn., Vol. 28, No. 5, Sept. 1992.