

MICHAŁ RADZIK*

BADANIA NUMERYCZNE WPŁYWU SKŁADOWEJ
PRZEMIENNEJ MOMENTU MECHANICZNEGO
NA WIDMA PRĄDÓW I PRĘDKOŚCI KĄTOWEJ
MASZYNY SYNCHRONICZNEJNUMERICAL INVESTIGATIONS OF AN INFLUENCE
OF A MECHANICAL TORQUE AC COMPONENT
ON THE FOURIER SPECTRA OF CURRENTS
AND ANGULAR VELOCITY OF A SYNCHRONOUS MOTOR

Streszczenie

W artykule przedstawiono równania i zależności umożliwiające utworzenie algorytmu iteracyjnego Newtona-Raphsona dla wyznaczania ustalonych stanów pracy silnika synchronicznego obciążonego momentem mechanicznym zawierającym okresową składową przemienną. Algorytm ten pozwala, przy założeniu okresowości rozwiązań ustalonych, na bezpośrednie określanie współczynników szeregów Fouriera prądów, wahań kąta obrotu oraz prędkości kątowej silnika. W artykule zamieszczono wyniki badań numerycznych ilustrujące skuteczność oraz techniczną użyteczność tego algorytmu w postaci charakterystyk częstotliwościowych najważniejszych komponent prądu stojana i wzbudzenia oraz prędkości kątowej wywoływanych monoharmoniczną składową przemienną momentu obciążenia. Szczegółowo przebadano wpływ stopnia obciążenia oraz wzbudzenia silnika, a także momentu bezwładności na te dodatkowe komponenty rozwiązań ustalonych.

Słowa kluczowe: analiza spektralna, systemy elektromechaniczne, maszyny synchroniczne, stany ustalone

Abstract

This paper presents equations and relations necessary to create an iterative Newton-Raphson algorithm for determining steady-state solutions of synchronous motor loaded by a torque with a periodic alternating component. That algorithm allows to determine – when assuming periodicity of steady solutions - the Fourier coefficients of currents, disturbances of the rotary angle and angular velocity of a motor. In the paper are shown the results of numerical tests illustrating the efficiency and technical usefulness of that algorithm in the form of frequency characteristics for most important components arising in stator current, field current and rotor angular velocity due to mono-harmonic alternating component in load torque. An influence of load level, field current and moment of inertia on those additional components in the steady-state solutions is presented in details.

Keywords: spectral analysis, electromechanical systems, synchronous machines, steady-state performance

* Mgr inż. Michał Radzik, doktorant, Instytut Elektromechanicznych Przemian Energii, Wydział Inżynierii Elektrycznej i Komputerowej, Politechnika Krakowska.

1. Wstęp

Podstawowym zagadnieniem przy określaniu własności maszyn elektrycznych jest analiza stanów ustalonych, rozumianych jako praca maszyny przy stałej prędkości obrotowej spowodowanej równowagą momentu elektromagnetycznego i mechanicznego. W praktyce inżynierskiej istnieją jednak przypadki ustalonych stanów pracy maszyn synchronicznych, w których prędkość obrotowa nie jest stała. Mogą one wynikać ze specyfiki momentu obciążenia generowanego przez układy współpracujące (kompresory tłokowe) lub powstać na skutek uszkodzenia obwodów elektrycznych maszyny (zwarcia) jak i w wyniku uszkodzenia w mechanicznych węzłach maszyny (łożyska, sprzęgło). W następstwie tego w stanie ustalonym występują wahania prędkości obrotowej. To z kolei wymusza rozwiązywanie równań obwodów elektrycznych maszyny łącznie z równaniem mechanicznym, w wyniku czego powstaje do rozwiązania układ nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych. Tradycyjnym sposobem jego rozwiązywania jest całkowanie numeryczne. Rozwiązania ustalone w dziedzinie czasu otrzymuje się po odpowiednio długim okresie całkowania, w którym zanikną przebiegi przejściowe. Analiza jakościowa rozwiązań ustalonych wymaga dodatkowej obróbki przebiegów czasowych, co sprawia, że cały proces określania stanu ustalonego staje się złożony i jest czasochłonny [6]. Stan ustalony może być także określany po linearyzacji nieliniowych równań układu metodą małego odchylenia i zastosowaniu tradycyjnych metod wyznaczania rozwiązań ustalonych dla układów liniowych [3, 4]. Takie podejście ma jednak istotne ograniczenia wynikające z zakresu linearyzacji.

Możliwość wnikliwej analizy daje natomiast wykorzystanie opisanego w [7, 8] algorytmu numerycznego opartego na metodzie bilansu harmonicznego. Główną zaletą takiego podejścia do problemu jest fakt, że otrzymane rozwiązania są wyznaczone bezpośrednio w dziedzinie częstotliwości. W artykule skoncentrowano się na badaniu użyteczności algorytmu do zbadania wpływu wybranych warunków pracy silnika synchronicznego na widma prądów stojana, prądu wzbudzenia oraz prędkości kątowej wirnika w ustalonych stanach pracy. Analizy dokonano przy założeniu, że badany silnik synchroniczny jest symetrycznie zbudowany, stojan jest zasilany symetrycznym układem napięć, a uzwojenie wzbudzenia jest zasilane ze źródła napięcia stałego. Założono ponadto, że składowa zmienna momentu mechanicznego jest na tyle mała, że nie powoduje wypadnięcia silnika z synchronizmu, a jedynie wywołuje kołysania wirnika wokół prędkości synchronicznej.

2. Dopasowanie opisu silnika synchronicznego do metody bilansu harmonicznego

W metodzie bilansu harmonicznego [2] korzystnie jest posługiwać się zespolonymi szeregiem Fouriera. Z tego względu do opisu silnika synchronicznego wybrano układ współrzędnych określonych w ciele liczb zespolonych. Napięcia i prądy faz stojana transformowano od układu współrzędnych naturalnych (a, b, c) do układu współrzędnych wirujących ($0, +, -$).

$$\begin{bmatrix} u^0(t) \\ u^+(t) \\ u^-(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-j\Omega_s t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{j\Omega_s t} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a(t) \\ u_b(t) \\ u_c(t) \end{bmatrix} \quad (1a)$$

$$\begin{bmatrix} i^0(t) \\ i^+(t) \\ i^-(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-j\Omega_s t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{j\Omega_s t} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ i_b(t) \\ i_c(t) \end{bmatrix} \quad (1b)$$

Transformacje obrotu na płaszczyźnie zespolonej wybrano tak, aby po transformacji symetryczny układ napięć zasilających fazy stojana

$$\begin{bmatrix} u_a(t) \\ u_b(t) \\ u_c(t) \end{bmatrix} = \sqrt{2}U \begin{bmatrix} \cos(\Omega_s t) \\ \cos(\Omega_s t - 120^\circ) \\ \cos(\Omega_s t - 240^\circ) \end{bmatrix} \quad (2)$$

był odwzorowany przez napięcia stałe w czasie.

$$\begin{bmatrix} u^0 \\ u^+ \\ u^- \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{3}{2}}U \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Równania obwodów elektrycznych silnika synchronicznego w nowym układzie współrzędnych po pominięciu równania dla składowej zerowej o zerowym rozwiązaniu przyjmują formę (4a),

$$\begin{bmatrix} u^+ \\ u^- \\ u'_f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s i^+ \\ R_s i^- \\ R'_f i'_f \\ R'_D i'_D \\ R'_Q i'_Q \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \\ \psi'_f \\ \psi'_D \\ \psi'_Q \end{bmatrix} + j\Omega_s \begin{bmatrix} \psi^+ \\ -\psi^- \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4a)$$

a równanie mechaniczne jest postaci

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + D \frac{d\varphi}{dt} = T_{em} + T_m(t), \quad T_{em} = jp(i^- \psi^+ - i^+ \psi^-) \quad (4b)$$

Strumienie skojarzone występujące w powyższych równaniach są zdefiniowane następująco

$$\begin{bmatrix} \Psi_s \\ \Psi_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{ss} & \mathbf{L}_{sw} \\ \mathbf{L}_{ws} & \mathbf{L}_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{i}_w \end{bmatrix} \quad (5)$$

gdzie:

$$\Psi_s = \begin{bmatrix} \Psi^+ \\ \Psi^- \end{bmatrix}; \quad \Psi_w = \begin{bmatrix} \Psi'_f \\ \Psi'_D \\ \Psi'_Q \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L}_{ss} = \begin{bmatrix} L_{\sigma s} & 0 \\ 0 & L_{\sigma s} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (L_{ad} + L_{aq}) & (L_{ad} - L_{aq})e^{j2\delta} \\ (L_{ad} - L_{aq})e^{-j2\delta} & (L_{ad} + L_{aq}) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{L}_{sw} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} L_{ad}e^{j\delta} & L_{ad}e^{j\delta} & -jL_{aq}e^{j\delta} \\ L_{ad}e^{-j\delta} & L_{ad}e^{-j\delta} & jL_{aq}e^{-j\delta} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L}_{ws} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} L_{ad}e^{-j\delta} & L_{ad}e^{j\delta} \\ L_{ad}e^{-j\delta} & L_{ad}e^{j\delta} \\ jL_{aq}e^{-j\delta} & -jL_{aq}e^{j\delta} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{L}_{ww} = \begin{bmatrix} L'_{\sigma w} & 0 & 0 \\ 0 & L'_{\sigma D} & 0 \\ 0 & 0 & L'_{\sigma Q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{ad} & L_{ad} & 0 \\ L_{ad} & L_{ad} & 0 \\ 0 & 0 & L_{aq} \end{bmatrix}$$

Oznaczenia parametrów w tych równaniach są ogólnie przyjęte dla maszyn synchronicznych przy czym $\delta = p\varphi - \Omega_s t$. Niewiadomymi w układzie równań (4a, b) są: $i^+(t)$, $i^-(t)$, $i'_f(t)$, $i'_D(t)$, $i'_Q(t)$ oraz kąt obrotu $\varphi(t)$.

Jeżeli moment mechaniczny silnika posiada oprócz składowej stałej także okresową składową przemienną nie powodującą wypadnięcia z synchronizmu,

$$T_m(t) = T_0 + T_z(t), \quad T_z(t) = T_z(t + T) \quad (6)$$

to w ustalonym stanie pracy przy stałych wymuszeniach (3) i stałym napięciu wzbudzenia, prędkość kątowa silnika będzie się wahać okresowo z częstotliwością składowej przemienną momentu mechanicznego.

$$\omega(t) = (\Omega_s / p) + \Delta\omega(t), \quad \Delta\omega(t) = \Delta\omega(t + T) \quad (7)$$

Okresowe wahania prędkości sprawiają, że kąt obrotu, który przy $T_z = 0$ miał postać $\varphi(t) = (\Omega_s / p)t + \varphi_0$, zacznie narastać zgodnie z zależnością

$$\varphi(t) = (\Omega_s / p) \cdot t + \Delta\varphi(t) \quad (8)$$

Związek pomiędzy prędkością kątową wirnika $\omega(t)$, a kątem obrotu $\varphi(t)$ jest opisywany jako $\frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega(t)$. Powyższa relacja z uwzględnieniem (7) i (8) powoduje, że zaburzenie narastania kąta obrotu będzie także okresowo zmienne (9).

$$\Delta\varphi(t) = \Delta\varphi(t + T) \quad (9)$$

Fakt ten umożliwia zastosowanie metody bilansu harmonicznego do poszukiwania rozwiązań ustalonych dla równań (4a, b). Podstawiając (8) do równania (4b), otrzymamy:

$$J \frac{d^2 \Delta\varphi}{dt^2} + D \frac{d\Delta\varphi}{dt} = T_{em} + T_m(t) - D \cdot (\Omega_s / p) \quad (10)$$

Funkcja $\delta = p\varphi - \Omega_s t$ występująca w wyrażeniach na strumienie skojarzone w równaniach (4a, b) jest teraz wyrażona przez zaburzenie kąta obrotu

$$\delta(t) = p\Delta\varphi(t). \quad (11)$$

Zapis równań (4a) i (10) po uwzględnieniu w nich (11) może służyć za podstawę do poszukiwania rozwiązań w stanach ustalonych, ponieważ wszystkie poszukiwane funkcje są okresowe i mogą być przewidziane w postaci szeregów Fouriera.

3. Równania bilansu harmonicznyc z uwzględnieniem równania ruchu

W celu utworzenia równań bilansu harmonicznyc powołano się na zapis, który zaproponowano w pracy [5]. Zgodnie z nim równania (4a) i (10) korzystnie jest zapisać w następującej wektorowej postaci:

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{F}_2(\mathbf{x}) + \frac{d}{dt} \mathbf{F}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_0(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad (12)$$

gdzie:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i^+ \\ i^- \\ i'_f \\ i'_D \\ i'_Q \\ \Delta\varphi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ J\Delta\varphi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \\ \psi'_f \\ \psi'_D \\ \psi'_Q \\ D\Delta\varphi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} R_s i^+ \\ R_s i^- \\ R'_f i'_f \\ R'_D i'_D \\ R'_Q i'_Q \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j\Omega_s \psi^+ \\ -j\Omega_s \psi^- \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -T_{em} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}}U \\ \sqrt{\frac{3}{2}}U \\ U'_f \\ 0 \\ 0 \\ T_m(t) - D \frac{\Omega_s}{p} \end{bmatrix}$$

W rozpatrywanym przypadku założono, że moment obciążenia silnika synchronicznego $T_m(t)$ posiada poza składową stałą T_0 również składową przemienną o amplitudzie T_z i znanej częstotliwości f_m .

$$T_m(t) = T_0 + T_z \sin(2\pi f_m t + \alpha) \quad (13)$$

Przy tak sformułowanym zagadnieniu wektor rozwiązań przewidujemy w postaci szeregu Fouriera

$$\mathbf{x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k e^{jk\Omega_m t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} I_k^+ \\ I_k^- \\ I'_{f,k} \\ I'_{D,k} \\ I'_{Q,k} \\ \Phi_k \end{bmatrix} \cdot e^{jk\Omega_m t} \quad (14)$$

W metodzie bilansu harmonicznych należy podstawić rozwiązanie w postaci szeregu Fouriera (14) do równania (12) i zbilansować harmoniczne po obydwóch stronach równości, wykorzystując własność jednoznaczności rozkładu Fouriera. Analogicznie do wektora \mathbf{x} możemy również zapisać wektory funkcji \mathbf{F}_2 , \mathbf{F}_1 oraz \mathbf{F}_0 w postaci szeregu Fouriera

$$\mathbf{F}_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_{n,k} e^{jk\Omega_m t} \quad (15)$$

gdzie:

$$n \in \{0, 1, 2\}.$$

Ostatecznie równania silnika synchronicznego zapisane zgodnie z metodą bilansu harmonicznych przyjmą postać nieskończonego układu równań algebraicznych opisujących zależności między poszczególnymi współczynnikami szeregów Fouriera funkcji \mathbf{F}_2 , \mathbf{F}_1 oraz \mathbf{F}_0 .

$$-\text{diag} \begin{bmatrix} \vdots \\ \Omega^2 \\ 0 \\ \Omega^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{F}_{2,1} \\ \mathbf{F}_{2,0} \\ \mathbf{F}_{2,-1} \\ \vdots \end{bmatrix} + \text{diag} \begin{bmatrix} \vdots \\ j\Omega \\ \mathbf{0} \\ -j\Omega \\ \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{F}_{1,1} \\ \mathbf{F}_{1,0} \\ \mathbf{F}_{1,-1} \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{F}_{0,1} \\ \mathbf{F}_{0,0} \\ \mathbf{F}_{0,-1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (16)$$

gdzie:

$$\boldsymbol{\Omega} = 2\pi f_m \mathbf{E},$$

\mathbf{E} – macierz jednostkowa.

W celu skrócenia zapisu równania (16) można wykorzystać notację tzw. wektorowych reprezentacji [5] szeregów Fouriera wektorów $\mathbf{F}_2(\mathbf{x})$, $\mathbf{F}_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{F}_0(\mathbf{x}, t)$ oraz poszukiwanego szeregu Fouriera wektora \mathbf{x} .

$$-(\boldsymbol{\Omega})^2 \cdot \mathbf{F}_2(\mathbf{X}) + j \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{F}_1(\mathbf{X}) + \mathbf{F}_0(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \quad (16a)$$

4. Opis algorytmu iteracyjnego wyznaczania rozwiązań ustalonych dla maszyny synchronicznej

Układ nieskończenie wielu nieliniowych równań algebraicznych (16) może być rozwiązany jedynie iteracyjnie. Do jego rozwiązania użyto algorytmu Newtona-Raphsona o ogólnej postaci

$$\mathbf{X}^{i+1} = \mathbf{X}^i - \mathbf{J}(\mathbf{X}^i)^{-1} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}^i) \quad (17)$$

gdzie

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = -(\boldsymbol{\Omega})^2 \cdot \mathbf{F}_2(\mathbf{X}) + j \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{F}_1(\mathbf{X}) + \mathbf{F}_0(\mathbf{X}) \quad (18)$$

Macierz Jacobiego $\mathbf{J}(\mathbf{X})$ w (17) jest definiowana zależnością $\mathbf{J}(\mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}}$. W pracy [2] wykazano, że w celu jej określenia należy obliczyć macierze

$$\mathbf{F}_{d,n} = \frac{\partial \mathbf{F}_n}{\partial \mathbf{x}} \quad \text{dla } n \in \{0, 1, 2\} \quad (19)$$

oraz ich szeregi Fouriera

$$\mathbf{F}_{d,n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_{n,k}^d e^{jk\Omega_m t} \quad \text{dla } n \in \{0, 1, 2\} \quad (20)$$

Macierzowe reprezentacje powyższych szeregów o postaciach

$$\mathbf{F}_{d,n} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \mathbf{F}_{n,0}^d & \mathbf{F}_{n,1}^d & \mathbf{F}_{n,2}^d & \dots \\ \dots & \mathbf{F}_{n,-1}^d & \mathbf{F}_{n,0}^d & \mathbf{F}_{n,1}^d & \dots \\ \dots & \mathbf{F}_{n,-2}^d & \mathbf{F}_{n,-1}^d & \mathbf{F}_{n,0}^d & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad \text{dla } n \in \{0, 1, 2\} \quad (21)$$

pozwalają utworzyć macierz Jacobiego, która ma postać

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}) = -(\boldsymbol{\Omega})^2 \cdot \mathbf{F}_{d,2}(\mathbf{X}) + \mathbf{j} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{F}_{d,1}(\mathbf{X}) + \mathbf{F}_{d,0}(\mathbf{X}) \quad (22)$$

Dla równania (12) macierze $\mathbf{F}_{d,n}$ mają postać

$$\mathbf{F}_{d,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{F}_{d,1} = \begin{bmatrix} L_{\sigma s} + \frac{L_{ad} + L_{aq}}{2} & \frac{\partial \psi^+}{\partial i^-} & \frac{\partial \psi^+}{\partial i'_f} & \frac{\partial \psi^+}{\partial i'_D} & \frac{\partial \psi^+}{\partial i'_Q} & \frac{\partial \psi^+}{\partial \Delta \varphi} \\ \frac{\partial \psi^-}{\partial i^+} & L_{\sigma s} + \frac{L_{ad} + L_{aq}}{2} & \frac{\partial \psi^-}{\partial i'_f} & \frac{\partial \psi^-}{\partial i'_D} & \frac{\partial \psi^-}{\partial i'_Q} & \frac{\partial \psi^-}{\partial \Delta \varphi} \\ \frac{\partial \psi'_f}{\partial i^+} & \frac{\partial \psi'_f}{\partial i^-} & L'_{\sigma w} + L_{ad} & L_{ad} & 0 & \frac{\partial \psi'_f}{\partial \Delta \varphi} \\ \frac{\partial \psi'_D}{\partial i^+} & \frac{\partial \psi'_D}{\partial i^-} & L_{ad} & L'_{\sigma D} + L_{ad} & 0 & \frac{\partial \psi'_D}{\partial \Delta \varphi} \\ \frac{\partial \psi'_Q}{\partial i^+} & \frac{\partial \psi'_Q}{\partial i^-} & 0 & 0 & L'_{\sigma Q} + L_{aq} & \frac{\partial \psi'_Q}{\partial \Delta \varphi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\mathbf{F}_{d,0} = \begin{bmatrix} R_s + j\Omega_s \frac{\partial \psi^+}{\partial i^+} & j\Omega_s \frac{\partial \psi^+}{\partial i^-} & j\Omega_s \frac{\partial \psi^+}{\partial i'_f} & j\Omega_s \frac{\partial \psi^+}{\partial i'_D} & j\Omega_s \frac{\partial \psi^+}{\partial i'_Q} & j\Omega_s \frac{\partial \psi^+}{\partial \Delta\varphi} \\ -j\Omega_s \frac{\partial \psi^-}{\partial i^+} & R_s - j\Omega_s \frac{\partial \psi^-}{\partial i^-} & -j\Omega_s \frac{\partial \psi^-}{\partial i'_f} & -j\Omega_s \frac{\partial \psi^-}{\partial i'_D} & -j\Omega_s \frac{\partial \psi^-}{\partial i'_Q} & -j\Omega_s \frac{\partial \psi^-}{\partial \Delta\varphi} \\ 0 & 0 & R'_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R'_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R'_Q & 0 \\ -\frac{\partial T_{em}}{\partial i^+} & -\frac{\partial T_{em}}{\partial i^-} & -\frac{\partial T_{em}}{\partial i'_f} & -\frac{\partial T_{em}}{\partial i'_D} & -\frac{\partial T_{em}}{\partial i'_Q} & -\frac{\partial T_{em}}{\partial \Delta\varphi} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Algorytm iteracyjny (17) wymaga określenia szeregów Fouriera wektorów \mathbf{F}_2 , \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_0 oraz szeregów Fouriera macierzy $\mathbf{F}_{d,2}$, $\mathbf{F}_{d,1}$, $\mathbf{F}_{d,0}$ dla aktualnego wektora rozwiązań \mathbf{X} i na ich podstawie pozwala wyznaczyć skorygowany wektor rozwiązań, zawierający współczynniki szeregów Fouriera prądów oraz zaburzeń kąta obrotu. W zależności (17) wszystkie elementy – wektory i macierze – mają wymiary nieskończone. Przy implementacji numerycznej ich wymiary wektorów i macierzy muszą być ograniczone do skończonych. Algorytm ten jest szczegółowo opisany w pracy [8] i został zrealizowany numerycznie przy użyciu komercyjnego pakietu MATLAB.

5. Wpływ składowej przemiennnej momentu mechanicznego na przebiegi silnika synchronicznego w stanie ustalonym

W celu zbadania możliwości oraz użyteczności algorytmu przeprowadzono badania mające na celu szczegółowe zbadanie wpływu składowej przemiennnej momentu mechanicznego na wielkości charakteryzujące stan ustalonej pracy silnika synchronicznego, w warunkach określonych przy tworzeniu algorytmu iteracyjnego. Do badań wykorzystano parametry silnika o następujących danych znamionowych: $P_N = 1250$ kW, $U_N = 6000$ V, $n_N = 750$ obr/min, $\cos \varphi_N = 0,9$, $J_s = 250$ kg·m² [1]. W pracy [8] przedstawiono wyniki testów numerycznej zbieżności algorytmu, gdy jako wartości startowych dla procedury iteracyjnej użyto rozwiązań ustalonych dla silnika wyznaczonych z równań elektrycznych z pominięciem równania ruchu. Pozytywny wynik tych testów pozwolił skoncentrować się na badaniach wielkości interesujących z technicznego punktu widzenia. Badania te miały na celu określenie wpływu:

- amplitudy i częstotliwości składowej przemiennnej momentu mechanicznego,
- momentu bezwładności silnika,
- wartości składowej stałej prądu wzbudzenia oraz
- wartości składowej stałej momentu mechanicznego

na pomiarowo dostępne wielkości charakteryzujące stan pracy ustalonej silnika synchronicznego, takie jak:

- widmo Fouriera prądów stojana,
- widmo Fouriera prądu wzbudzenia oraz
- widmo Fouriera prędkości kątowej wirnika.

W wyniku obliczeń iteracyjnych otrzymuje się zbiory wartości współczynników szeregów Fouriera (14) I_k^+ , I_k^- , $I'_{f,k}$, $I'_{D,k}$, $I'_{Q,k}$ oraz Φ_k o indeksach $-K \leq k \leq K$, dla których wartości współczynników Fouriera można uznać za wystarczająco dokładne. Widmo prądów fazowych stojana wyznacza się na podstawie wartości współczynników I_k^+ oraz I_k^- , a ponieważ prądy fazowe zachowują symetrię, wystarczy obliczyć widmo prądu fazy „a”, który jest określony następująco:

$$\begin{aligned} i_a(t) &= \frac{1}{\sqrt{3}} [i^+(t) \cdot e^{j\Omega_s t} + i^-(t) \cdot e^{-j\Omega_s t}] = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\sum_{k=-K}^K I_k^+ \cdot e^{j(\Omega_s + k\Omega_m)t} + \sum_{k=-K}^K I_k^{*+} \cdot e^{-j(\Omega_s + k\Omega_m)t} \right] = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{k=-K}^K |I_k^+| \cos[(\Omega_s + k\Omega_m)t + \alpha_k^+] = \sum_{k=-K}^K I_k \cos [2\pi(f_s + kf_m)t + \alpha_k^+] \end{aligned} \quad (26)$$

Widmo prądu wzbudzenia określa się na podstawie wartości współczynników $I'_{f,k}$ w następujący sposób:

$$i'_f(t) = \sum_{k=-K}^K I'_{f,k} \cdot e^{jk\Omega_m t} = I_{f,0} + \sum_{k=1}^K 2 \cdot |I'_{f,k}| \cos(k2\pi f_m t + \beta_k) = I_{f,0} + \sum_{k=1}^K I_{f,k} \cos(k2\pi f_m t + \beta_k) \quad (27)$$

Natomiast widmo prędkości kątowej jest określone przez wartości współczynników Φ_k

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \frac{\Omega_s}{p} + \Delta\omega(t) = \Omega_0 + \Delta\omega(t) = \Omega_0 + \frac{d}{dt} \Delta\varphi(t) = \Omega_0 + \sum_{\substack{k \neq 0 \\ k=-K}}^K jk\Omega_m \Phi_k \cdot e^{jk\Omega_m t} = \\ &= \Omega_0 + \sum_{k=1}^K 2k\Omega_m |\Phi_k| \cos(k\Omega_m t + \gamma_k) = \Omega_0 + \sum_{k=1}^K \Omega_k \cos(k2\pi f_m t + \gamma_k) \end{aligned} \quad (28)$$

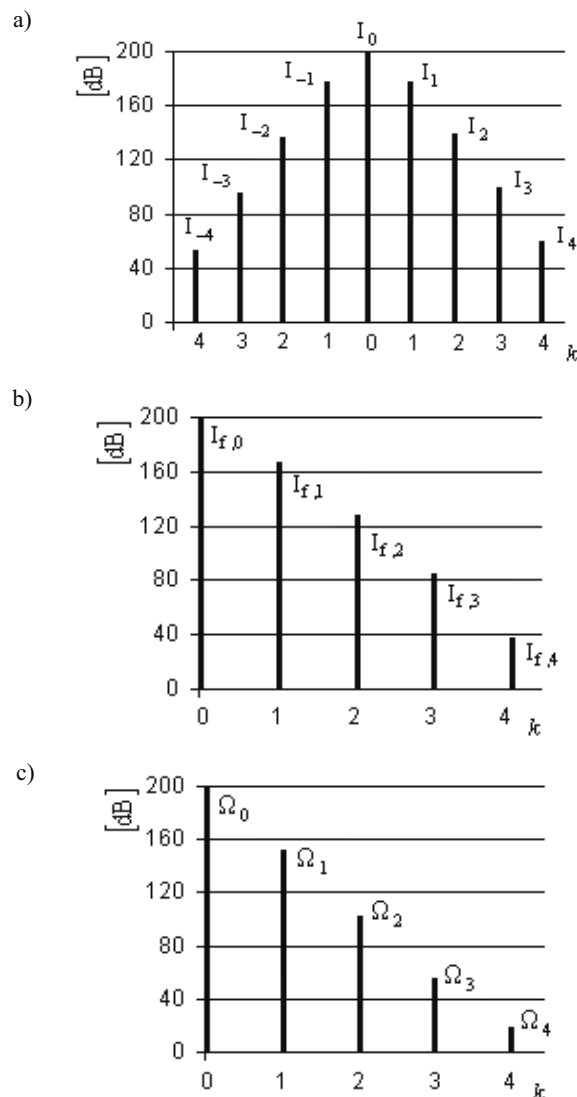
Jako wyniki badań są prezentowane amplitudy kolejnych harmonicznych prądu fazy „a” stojana, prądu wzbudzenia oraz prędkości kątowej z pominięciem ich kątów fazowych. Na rys. 1a, b, c przedstawiono takie widma Fouriera dla silnika pracującego w warunkach znamionowych obciążonego momentem zawierającym dodatkowo składową okresową o częstotliwości $f_m = 6$ Hz i amplitudzie $T_z = 0,1 T_N$. Amplitudy harmonicznych przedstawiono na tych rysunkach w dB ze względu na znaczne różnice ich wartości. Widmo prądu fazowego stojana (rys. 1a) zawiera, oprócz składowej podstawowej I_0 o częstotliwości 50 Hz, kolejne harmoniczne I_k o numerach $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, których częstotliwości wynoszą odpowiednio $f_s + k \cdot f_m$. Należy zauważyć, że amplitudy harmonicznych 1 oraz -1 są o około rząd mniejsze niż składowej podstawowej, a amplitudy kolejnych harmonicznych maleją jeszcze szybciej. Widmo prądu wzbudzenia zawiera – oprócz składowej stałej $I_{f,0}$ – harmoniczne wyższe o kolejnych numerach $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, których częstotliwości są wielokrotnościami częstotliwości składowej zmiennej momentu obciążenia i wynoszą $k \cdot f_m$. Amplitudy wyższych harmonicznych prądu wzbudzenia

mają relatywnie mniejsze wartości niż harmoniczne prądu stojana o tych samych numerach. Amplituda harmonicznej 1 jest o prawie dwa rzędy mniejsza niż składowa stała, a amplitudy kolejnych harmonicznych maleją w tym samym tempie. Widmo prędkości kątowej ma ten sam charakter, co widmo prądu wzbudzenia. Oprócz składowej stałej, czyli prędkości synchronicznej, zawiera kolejne harmoniczne o numerach $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, odpowiadających częstotliwościom $k \times f_m$. Widmo prędkości jest najmniej wrażliwe na składową przenienną momentu obciążenia i amplitudy kolejnych harmonicznych różnią się o ponad dwa rzędy, czyli więcej niż odpowiednie harmoniczne prądu wzbudzenia. W prezentowanych widmach pojawiają się harmoniczne o numerach większych od 1, mimo że składowa przenienna momentu jest monoharmoniczna. Wynika to z nieliniowego charakteru równań maszyny synchronicznej uwzględniających równanie mechaniczne. Harmonicznych tych nie da się określić linearyzując równania maszyny wokół punktu pracy odpowiadającego składowej stałej momentu obciążenia.

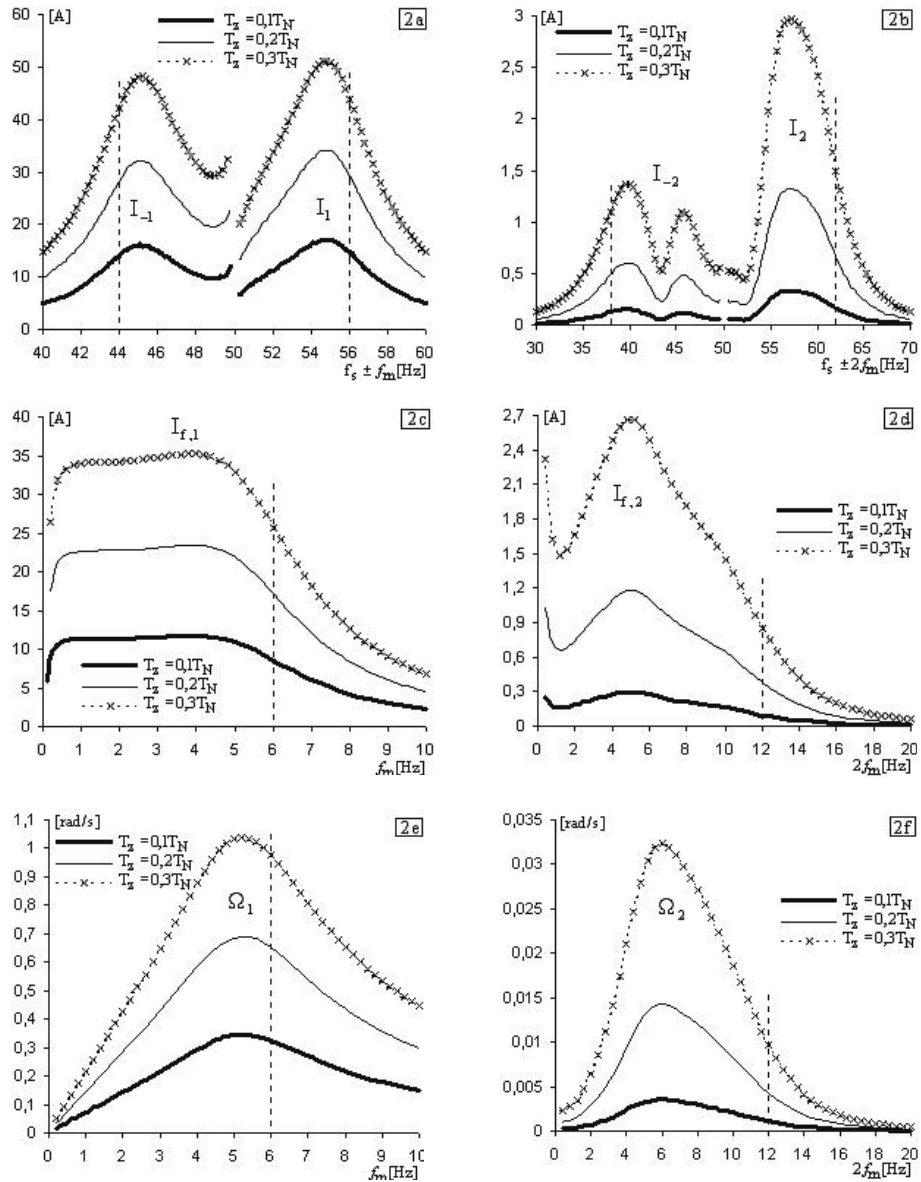
Prezentację wyników dalszych badań ograniczono do przedstawienia zmienności amplitud dwóch pierwszych harmonicznych prądu stojana (dla $k = \pm 1, \pm 2$), prądu wzbudzenia (dla $k = 1, 2$) oraz prędkości kątowej wirnika (dla $k = 1, 2$) jako funkcji częstotliwości składowej przemiennej momentu obciążenia.

Wpływ amplitudy składowej przemiennej momentu T_z na wymienione wyżej wielkości przedstawia rysunek 2. Kolejne jego części, zgodnie z opisem, obrazują charakterystyki częstotliwościowe amplitud wymienionych powyżej komponent widma prądu stojana (rys. 2a, b), prądu wzbudzenia (rys. 2c, d) oraz prędkości kątowej wirnika (rys. 2e, f). Prezentowane są charakterystyki dla trzech wartości $T_z \in \{0,1 T_N, 0,2 T_N, 0,3 T_N\}$. przy znamionowych wartościach napięcia stojana, wzbudzenia oraz składowej stałej momentu obciążenia. Wartości amplitud pierwszych składowych prądu stojana (dla $k = 1$ oraz $k = -1$) można odczytać z rysunku 2a, a drugich składowych (dla $k = 2$ oraz $k = -2$) z rysunku 2b. Aby odczytać amplitudę odpowiedniej składowej prądu stojana, należy w pierwszej kolejności określić jej częstotliwość z wzoru $f_k = f_s + k f_m$, a następnie dla tej częstotliwości określić wartość amplitudy z odpowiedniej charakterystyki częstotliwościowej. Przykładowo, dla częstotliwości składowej przemiennej momentu $f_m = 6$ Hz, częstotliwości pierwszych składowych prądu stojana ($k = 1$ oraz $k = -1$) wynoszą odpowiednio $f_1 = 56$ Hz oraz $f_{-1} = 44$ Hz i ich amplitudy można odczytać z charakterystyk przedstawionych na rysunku 2a dla tych częstotliwości. Częstotliwości składowych drugich prądu stojana ($k = 2$ oraz $k = -2$) wynoszą odpowiednio $f_2 = 62$ Hz oraz $f_{-2} = 38$ Hz i ich amplitudy można odczytać dla tych częstotliwości z charakterystyk na rysunku 2b. Na rysunku 2a, b częstotliwości te zaznaczono liniami pionowymi. Analogicznie odczytuje się wartości amplitud widma prądu wzbudzenia oraz prędkości kątowej, lecz dla tych wielkości częstotliwości oblicza się z wzoru $f_k = k f_m$ (dla dodatnich wartości k), zatem dla składowej 1 prądu wzbudzenia oraz prędkości kątowej częstotliwość wynosi $f_1 = 6$ Hz, a dla składowej drugiej $f_2 = 12$ Hz, co zaznaczono na rysunku 2c, d oraz rysunku 2e, f liniami pionowymi. Na tych rysunkach widoczny jest rezonansowy charakter zmian amplitudy przedstawianych harmonicznych z wyjątkiem harmonicznej 1 prądu wzbudzenia, która utrzymuje prawie stałą wartość, gdy amplitudy innych harmonicznych znacznie się zmieniają. Częstotliwość, przy której występuje maksimum amplitudy, jest jednak dla każdej z badanych wielkości nieco inna i zmienia się w przedziale (4,5–5,5) Hz, nie zmie-

nia się jednak wraz ze zmianą amplitudy składowej przemiennego momentu. O ile amplitudy pierwszych harmonicznych wzrastają praktycznie proporcjonalnie do wzrostu amplitudy składowej przemiennego momentu, to amplitudy harmonicznych drugich wzrastają znacznie szybciej i przy trzykrotnym wzroście tej składowej wzrastają prawie dziesięciokrotnie. Zmiana amplitudy składowej przemiennego momentu mechanicznego nie ma wpływu na wartości podstawowej harmonicznej prądu stojana (50 Hz) oraz składowych stałych prądu wzbudzenia i prędkości kątowej.

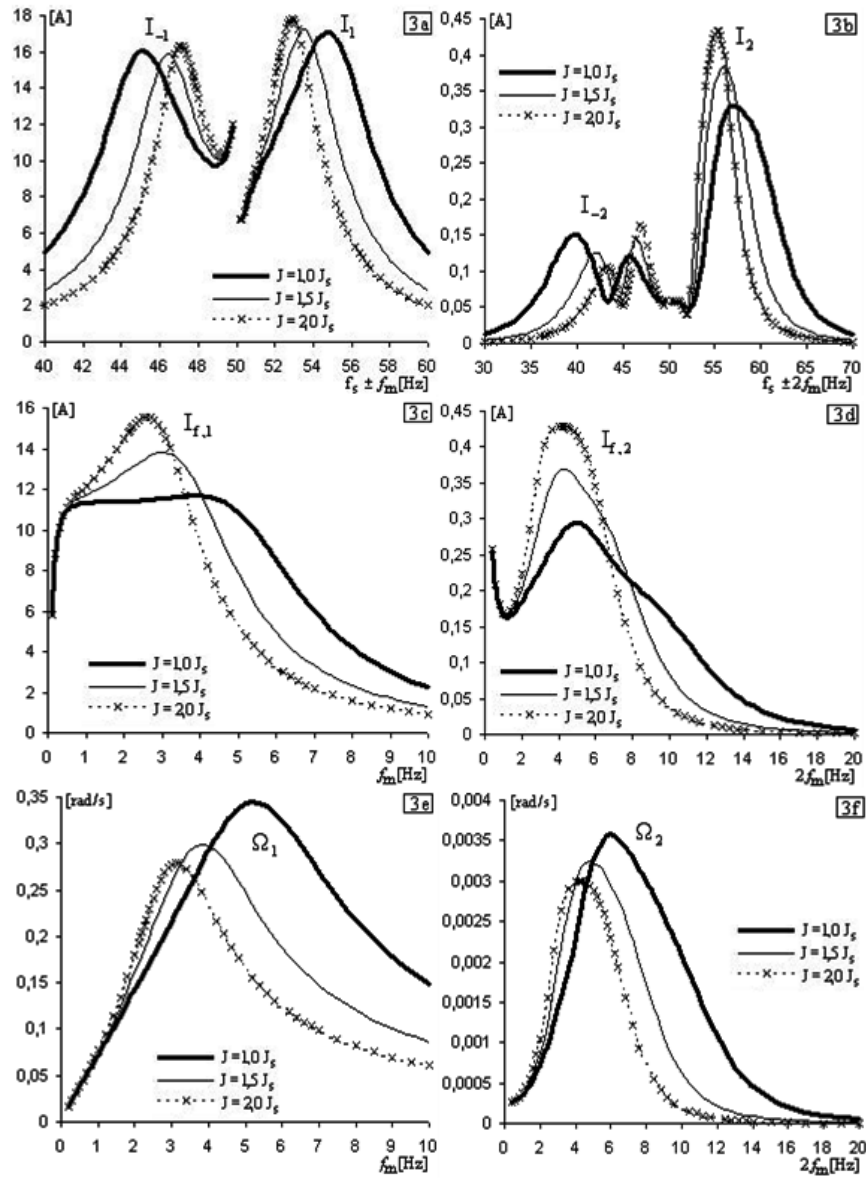


Rys. 1a), b), c) Widmo Fouriera prądu stojana w stanie pracy znamionowej dla $T_z = 0,1 T_N$
 Fig. 1a), b), c) Fourier spectrum of stator current at rated condition for $T_z = 0,1 T_N$



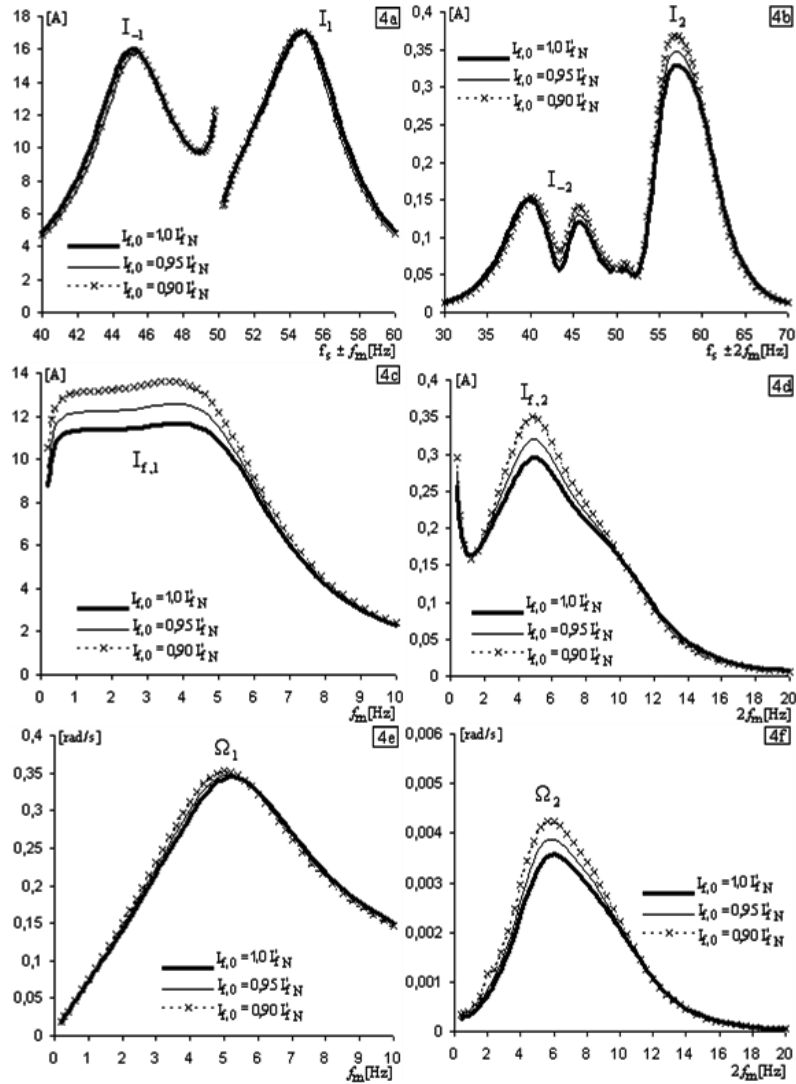
Rys. 2. Charakterystyki częstotliwościowe amplitud wybranych harmonicznych: prądów stojana I_{-1} , I_1 (2a) oraz I_{-2} , I_2 (2b); prądu wzbudzenia $I_{f,1}$ (2c) oraz $I_{f,2}$ (2d); prędkości kątowej Ω_1 (2e) oraz Ω_2 (2f), dla trzech wartości amplitudy składowej prędkości momentu mechanicznego $T_z = 0,1 \times T_N$, $T_z = 0,2 \times T_N$ oraz $T_z = 0,3 \times T_N$

Fig. 2. Frequency characteristics of chosen harmonic amplitudes: stator currents I_{-1} , I_1 , (2a) and I_{-2} , I_2 (2b); field current $I_{f,1}$ (2c) and $I_{f,2}$ (2d); angular velocity Ω_1 (2e) and Ω_2 (2f), for three values of a torque AC component amplitude $T_z = 0,1 \times T_N$, $T_z = 0,2 \times T_N$, and $T_z = 0,3 \times T_N$



Rys. 3. Charakterystyki częstotliwościowe amplitud wybranych harmonicznych: prądów stojana I_{-1} , I_1 (3a) oraz I_{-2} , I_2 (3b); prądu wzbudzenia $I_{f,1}$ (3c) oraz $I_{f,2}$ (3d); prędkości kątowej Ω_1 (3e) oraz Ω_2 (3f), dla trzech wartości momentu bezwładności $J = 1,0 \times J_s$, $J = 1,5 \times J_s$ oraz $J = 2,0 \times J_s$

Fig. 3. Frequency characteristics of chosen harmonic amplitudes: stator currents I_{-1} , I_1 (3a) and I_{-2} , I_2 (3b); field current $I_{f,1}$ (3c) and $I_{f,2}$ (3d); angular velocity Ω_1 (3e) and Ω_2 (3f), for three values of a moment of inertia $J = 1,0 \times J_s$, $J = 1,5 \times J_s$ and $J = 2,0 \times J_s$

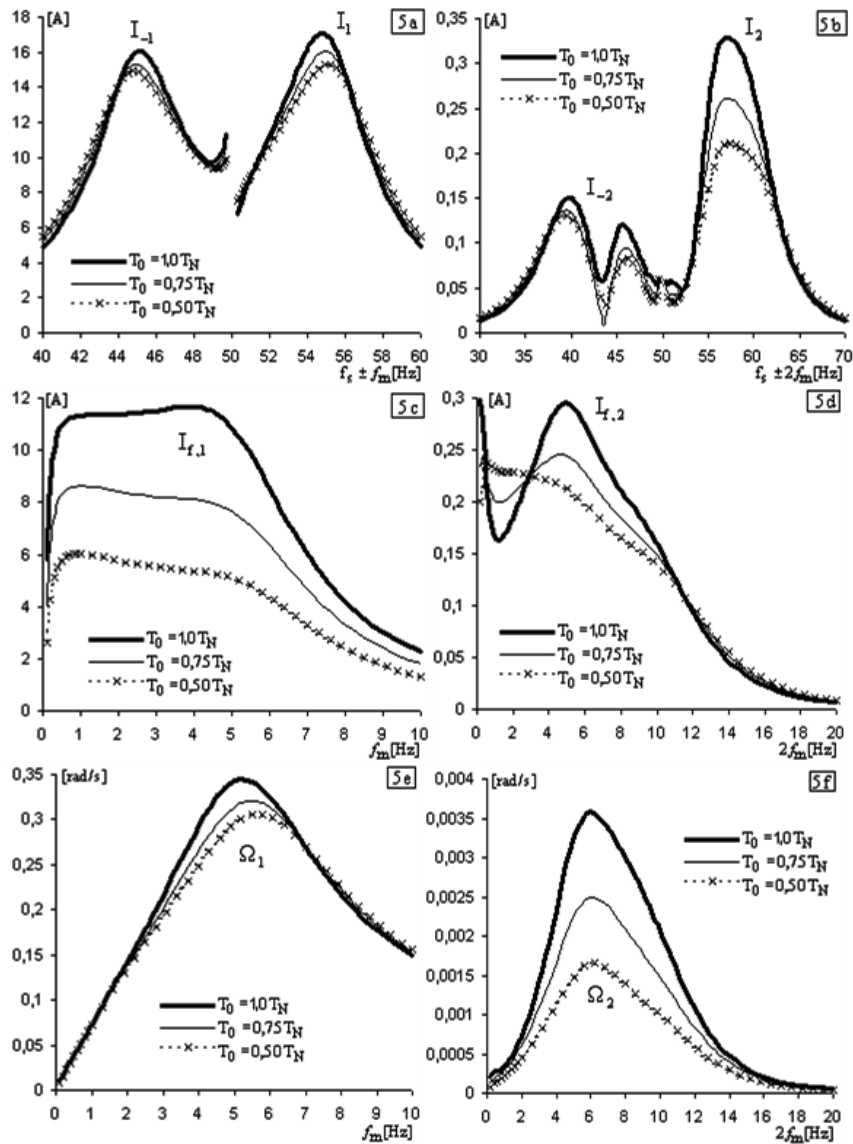


Rys. 4. Charakterystyki częstotliwościowe amplitud wybranych harmoniczných: prądów stojana I_{-1} , I_{-2} (4a) oraz $I_{f,1}$ (4c) oraz $I_{f,2}$ (4d); prądu wzbudzenia $I_{f,1}$ (4c) oraz $I_{f,2}$ (4d); prędkości kątovej Ω_1 (4e) oraz Ω_2 (4f), dla trzech wartości składowej stałej prądu wzbudzenia $I_{f,0} = 1,0 \cdot I'_{fN}$,

$$I_{f,0} = 0,95 \cdot I'_{fN} \text{ oraz } I_{f,0} = 0,90 \cdot I'_{fN}$$

Fig. 4. Frequency characteristics of chosen harmonic amplitudes: stator currents I_{-1} , I_{-2} (4a) and $I_{f,1}$ (4c) and $I_{f,2}$ (4d); angular velocity Ω_1 (4e) and Ω_2 (4f), for three values of a field current constant component $I_{f,0} = 1,0 \cdot I'_{fN}$, $I_{f,0} = 0,95 \cdot I'_{fN}$

$$\text{and } I_{f,0} = 0,90 \cdot I'_{fN}$$



Rys. 5. Charakterystyki częstotliwościowe amplitud wybranych harmonicznych: prądów stojana I_{-1} , I_1 (5a) oraz I_{-2} , I_2 (5b); prądu wzbudzenia $I_{f,1}$ (5c) oraz $I_{f,2}$ (5d); prędkości kątowej Ω_1 (5e) oraz Ω_2 (5f), dla trzech wartości składowej stałej momentu mechanicznego $T_0 = 1,0 \times T_N$, $T_0 = 0,75 \times T_N$ oraz $T_0 = 0,50 \times T_N$

Fig. 5. Frequency characteristics of chosen harmonic amplitudes: stator currents I_{-1} , I_1 (5a) and I_{-2} , I_2 (5b); field current $I_{f,1}$ (5c) and $I_{f,2}$ (5d); angular velocity Ω_1 (5e) and Ω_2 (5f), for three values of a torque constant $T_0 = 1,0 \times T_N$, $T_0 = 0,75 \times T_N$, and $T_0 = 0,50 \times T_N$

Na rysunku 3 (a, b, c, d, e, f) zobrazowano wpływ momentu bezwładności. Przedstawiono na nich charakterystyki częstotliwościowe amplitud tych samych harmonicznych prądu stojana, prądu wzbudzenia i prędkości kątowej jak na rys. 2. Odpowiadają one znamionowym wartościom napięć stojana i wzbudzenia oraz składowej stałej momentu obciążenia, przy czym amplitudę składowej przemiennej momentu ustalono na $T_z = 0,1 T_N$. Do prezentacji wybrano charakterystyki dla trzech wartości momentu bezwładności $J \in \{1,0 J_s; 1,5 J_s; 2,0 J_s\}$, gdzie przez J_s oznaczono moment bezwładności wirnika silnika bez układu napędowego. Zwiększanie momentu bezwładności powoduje przesuwanie się maksimum charakterystyk częstotliwościowych, typowych dla zjawisk rezonansowych, w stronę niższych częstotliwości, co jest zgodne z przewidywaniami. Najbardziej widocznym efektem zwiększania momentu bezwładności jest ograniczanie wahań prędkości kątowej silnika przy jednoczesnym wzroście amplitud harmonicznych prądów stojana i wzbudzenia. Zmiana bezwładności układu również nie wpływa na wartość podstawowej harmonicznej prądu stojana oraz składowych stałych prądu wzbudzenia i prędkości kątowej, czego nie odnotowano na rysunkach.

Charakterystyki częstotliwościowe przedstawione na rys. 4 (a, b, c, d, e, f) odpowiadają trzem poziomom składowej stałej prądu wzbudzenia $I_{f,0} \in \{1,0 I'_{fN}; 0,95 I'_{fN}; 0,90 I'_{fN}\}$. Podobnie jak poprzednio, wartości napięć stojana i wzbudzenia oraz średnia wartość momentu obciążenia są znamionowe, a $T_z = 0,1 T_N$. Tak małe zmiany składowej stałej prądu wzbudzenia mają niewielki wpływ na charakterystyki częstotliwościowe. Zmniejszenie składowej stałej prądu wzbudzenia obniża sprężystość elektromagnetyczną maszyny synchronicznej, lecz przy tak małych zmianach jej wartości ten wpływ jest prawie niezauważalny. W tym przypadku ulegała zmianie wartość podstawowej harmonicznej prądu stojana oraz średnia wartość zaburzeń kąta obrotu Φ_0 zgodnie z zależnościami opisującymi ustalony synchroniczny stan pracy silnika obciążonego momentem stałym.

Charakterystyki na rysunku 5 (a, b, c, d, e, f) ilustrują wpływ składowej stałej momentu mechanicznego. Wybrano trzy wartości $T_0 \in \{1,0 \times T_N, 0,75 \times T_N, 0,50 \times T_N\}$, zachowując znamionowe wartości napięć stojana i wzbudzenia oraz utrzymując składową przemiennej momentu na poziomie $T_z = 0,1 T_N$. Powoduje to zmiany wartości podstawowej harmonicznej prądu stojana oraz średniej wartości zaburzeń kąta obrotu Φ_0 , zgodnie z zależnościami opisującymi ustalony synchroniczny stan pracy silnika obciążonego momentem stałym, co nie jest odnotowane na rysunku 3. Wraz z obciążaniem następuje nieznacznie zmniejszanie się częstotliwości rezonansowych, co jest związane ze zmianą punktu pracy na statycznej charakterystyce momentu silnika. Charakter zmian amplitud poszczególnych harmonicznych jest bardzo różny. Amplitudy harmonicznych 1 oraz -1 prądu stojana wzrastają nieznacznie, lecz już amplituda harmonicznej 2 zwiększa się widocznie. Charakterystyki amplitudowe harmonicznych prądu wzbudzenia wraz z ze wzrostem obciążenia nabierają coraz bardziej rezonansowego charakteru, lecz z kolei amplitudy harmonicznej 1 zmieniają się bardziej niż harmonicznej 2. Amplituda harmonicznej 2 prędkości kątowej zależy od wartości średniej momentu znacznie bardziej niż harmonicznej 1. Większa na ogół wrażliwość harmonicznych 2 na zmiany obciążenia jest wynikiem uwidaczniania się nieliniowego charakteru oddziaływań elektromechanicznych.

Wyniki tych badań numerycznych są całkowicie zgodne z rezultatami rozwiązań ustalonych otrzymywanych w wyniku numerycznego całkowania równań silnika synchronicznego i ich obróbki przy użyciu FFT [6].

6. Wnioski

W artykule przedstawiono równania i zależności, które umożliwiają utworzenie algorytmu Newtona-Raphsona dla bezpośredniego określania stanów ustalonych maszyn synchronicznych w przypadkach, gdy równanie ruchu mechanicznego musi być uwzględniane łącznie z równaniami obwodów elektrycznych. Wyniki badań wpływu wybranych wielkości na rozwiązania ustalone wskazują jednoznacznie na poprawność algorytmu oraz jego dużą przydatność dla określania stanów ustalonych maszyny synchronicznej.

Literatura

- [1] Sobczyk T., Kaczmarek R., *Parametry zastępcze silników synchronicznych z klatką rozruchową*, Przegląd Elektrotechniczny, Vol. 66, No. 8–9, 1980, 378-380.
- [2] Sobczyk T.J., *Direct determination of two-periodic solution for nonlinear dynamic systems*, Compel, James & James Science Pub. Ltd., Vol. 13, No. 3, 1994, 509-529.
- [3] Skwarczyński J., Tertil Z., *Maszyny elektryczne*, Skrypty uczelniane 1510, Wydawnictwa AGH, Kraków 1997.
- [4] Paszek W., *Dynamika maszyn elektrycznych prądu przemiennego*, Wydawnictwo Helion, Gliwice 1998.
- [5] Sobczyk T.J., *Metodyczne aspekty modelowania matematycznego maszyn indukcyjnych*, WNT, Warszawa 2004.
- [6] Balawender P., *Wpływ składowych pulsacyjnych momentu obciążenia na widmo prądów stojana maszyn synchronicznych*, Praca magisterska, Politechnika Krakowska, Wydz. Inżynierii Elektrycznej i komputerowej, Kraków 2007.
- [7] Sobczyk T.J., *Algorytm bezpośredniego określania stanów ustalonych w maszynach prądu przemiennego z uwzględnieniem równania ruchu*, Prace Naukowe Instytutu Maszyn, Napędów i Pomiarów Elektrycznych, 62, Seria Studia i Materiały, 28, 2008, 66-74.
- [8] Sobczyk T.J., Radzik M., *Test numerycznej zbieżności algorytmu bezpośredniego określania stanów ustalonych w maszynach prądu przemiennego z uwzględnieniem równania ruchu*, Czasopismo Techniczne, 1-E/2009, Wydawnictwo PK, Kraków 2009, 87-97.