

TADEUSZ SOBCZYK, MICHAŁ RADZIK*

NUMERYCZNY TEST ZBIEŻNOŚCI ALGORYTMU
BEZPOŚREDNIEGO OKREŚLANIA STANÓW
USTALONYCH W MASZYNACH PRĄDU PRZEMIENNEGO
Z UWZGLĘDNIENIEM RÓWNANIA RUCHUNUMERICAL TEST OF AN ITERATIVE ALGORITHM
FOR DIRECT DETERMINATION
OF STEADY-STATES FOR AC MACHINES

Streszczenie

W artykule opisano algorytm określania rozwiązań ustalonych równań maszyn prądu przemiennego w przypadkach gdy zachodzi konieczność uwzględnienia równania ruchu obrotowego. Problem ten jest szczególnie trudny gdyż prowadzi do zagadnień nieliniowych. Algorytm przedstawiony w pracy umożliwia wyznaczanie rozwiązań w przypadkach gdy można wykazać, że są one okresowe i rozkładalne w szeregi Fouriera. Nieliniowe algebraiczne zależności pozwalające bezpośrednio wyznaczać współczynniki tych szeregów wyznaczane są przy użyciu algorytmu Newtona-Raphsona, który jest opisany szczegółowo. Przykładowe obliczenia wykonano dla stanu ustalonego silnika synchronicznego pracującego synchronicznie lecz obciążonego momentem zawierającym także okresową składową przemienną. W pracy prezentowane są wyniki badania numerycznej zbieżności algorytmu oraz przykładowe widma Fouriera wielkości charakteryzujących taki stan pracy silnika

Słowa kluczowe: analiza spektralna, algorytm Newtona-Raphsona, systemy elektromechaniczne, maszyny prądu przemiennego

Abstract

This paper presents an algorithm for determination of steady-state solutions of AC machine equations accounting for the rotary motion equation. That problem is especially difficult because it leads to non-linear equations. The algorithm presented in this paper allows to determine a steady-state solution in a case of its periodicity in the form of Fourier series. Nonlinear algebraic equations for Fourier coefficients are solved by a Newton-Raphson algorithm, which is described in details. Exemplary computations are done for a steady-state performance of a synchronous motor running synchronously, by forced by a load torque with a periodic ac component. Paper presents results of numerical convergence tests and resulting Fourier spectra of quantities characterizing that steady-state of a motor.

Keywords: spectral analysis, Newton-Raphson algorithm, electromechanical systems, AC machines

* Prof. dr hab. inż. Tadeusz J. Sobczyk, mgr inż. Michał Radzik, doktorant, Instytut Elektromechanicznych Przemian Energii, Wydział Inżynierii Elektrycznej i Komputerowej, Politechnika Krakowska.

1. Wstęp

Wyznaczanie stanów ustalonych jest tradycyjnie podstawowym i najważniejszym etapem oceny właściwości maszyn elektrycznych. Przeważnie przez stany ustalone rozumiane są zjawiska zachodzące w uzwojeniach maszyny po zaniknięciu procesu przejściowego i ustaleniu się prędkości obrotowej wirnika, a poszukiwanie są jakościowe oraz ilościowe cechy prądów uzwojeń maszyny oraz momentu elektromagnetycznego. Wówczas określanie stanów ustalonych sprowadza się do mniej lub bardziej elementarnych zadań teorii obwodów elektrycznych prądu przemiennego lub stałego. Założenie stałej prędkości obrotowej odgrywa przy takich analizach stanów ustalonych bardzo istotną rolę, gdyż umożliwia rozdzielenie zjawisk mechanicznych i elektromagnetycznych w maszynie. Nie zawsze jednak to założenie jest spełnione. Niniejszy artykuł stanowi próbę opracowania algorytmu bezpośredniego obliczania widma prądów maszyn elektrycznych w ustalonych stanach pracy, gdy zachodzi istotne oddziaływanie zjawisk elektromagnetycznych i mechanicznych objawiające się wahaniami prędkości kątowej wirnika.

W pracy [4] przedstawiono ogólną dyskusję możliwości bezpośredniego obliczania stanów ustalonych w maszynach prądu przemiennego, gdy zachodzi konieczność uwzględnienia równania mechanicznego. Potrzeba taka zachodzi, gdy moment obciążenia lub moment elektromagnetyczny maszyny mają składową przemienną o niskiej częstotliwości. Wówczas w stanie ustalonym pojawiają się wahania prędkości obrotowej i równania obwodów elektrycznych maszyny muszą być rozwiązywane łącznie z równaniem mechanicznym. Nieliniowy charakter równań różniczkowych opisujących taki stan pracy powoduje, że istnieją zasadnicze trudności określenia rozwiązania ustalonego. Trudność tę pokonuje się całkując te równania numerycznie. W bardzo wielu przypadkach wahania prędkości mają charakter okresowy, co powoduje, że prądy są także okresowe lub prawie okresowe. Rozwiązywanie numeryczne jest co prawda zawsze skuteczne, lecz w fazie badawczej czy poznawczej wymaga wieloparametrowych badań, które stają się bardzo uciążliwe i zawsze pozostawiają pewien niedosyt informacyjny. W pracy [4] opisano algorytm, który umożliwia bezpośrednio określenie okresowych rozwiązań ustalonych w przypadkach, gdy wahania prędkości są okresowe. Bazuje on na metodzie bilansowania harmonicznych nieliniowego układu równań różniczkowych, przy podstawowym założeniu, że istnieje rozwiązanie okresowe. Jest to algorytm iteracyjny wykorzystujący strategię Newtona-Raphsona dla osiągnięcia rozwiązania. Wskazano tam na dwa możliwe przypadki algorytmu poszukiwania okresowych rozwiązań ustalonych. Pierwszy dotyczy rozwiązań ustalonych, dla których okres jest znany a priori. Drugi dotyczy przypadków, w których wiadomo, że rozwiązanie jest okresowe, lecz jego okres jest nieznan. W niniejszym artykule sformułowano algorytm oraz przedstawiono wyniki jego testów numerycznych dla przypadku, gdy jest poszukiwane rozwiązanie o znanym okresie.

Do przykładowej analizy wybrano klasyczny problem poszukiwania stanu ustalonego silnika synchronicznego obciążonego momentem mechanicznym o okresowej składowej pulsacyjnej. Analizę przeprowadzono przy założeniu, że silnik synchroniczny jest symetrycznie zbudowany, uzwojenia stojana są zasilane symetrycznym układem napięć, a uzwojenia wzbudzenia jest zasilane ze źródła napięcia stałego. Składowa zmienna momentu mechanicznego jest na tyle mała, że nie powoduje wypadnięcia silnika z synchronizmu,

a jedynie wywołuje kołysania wirnika wokół prędkości synchronicznej. W tym przypadku można założyć okresowość wahań prędkości w stanie ustalonym, co pozwala wykorzystać algorytm opisany w [4].

2. Dostosowanie opisu maszyny prądu przemiennego do metody bilansu harmoniczných

Aby skoncentrować się na uwzględnieniu równania mechanicznego, rozważania ograniczono do równań maszyn prądu przemiennego zakładających liniowość obwodu magnetycznego maszyny oraz najprostszą reprezentację układu mechanicznego. Mają one postać:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{L}(\varphi) \cdot \mathbf{i}) + \mathbf{R} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{u}(t) \quad (1)$$

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + D \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{i}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{L}(\varphi)}{\partial \varphi} \cdot \mathbf{i} + T_m(t, \varphi, \omega) \quad (2)$$

Równania te mają nieliniowy charakter, gdyż indukcyjności są wyrażane funkcjami trygonometrycznymi okresowymi względem kąta obrotu wirnika $\mathbf{L}(\varphi) = \mathbf{L}(\varphi + 2\pi)$, a moment elektromagnetyczny jest opisany przez formę kwadratową prądów. Dla równań tego typu nie można określić rozwiązań w postaci funkcji elementarnych i pozostaje jedynie ich numeryczne całkowanie dla konkretnych warunków: wymuszeń, parametrów oraz wartości początkowych. Rozwiązania ustalone uzyskuje się wówczas po odpowiednio długim czasie całkowania.

Przedmiotem niniejszego artykułu jest algorytm, który umożliwia określenie rozwiązań ustalonych, czyli prądów $i_1(t), \dots, i_n(t)$, lecz także kąta obrotu $\varphi(t)$ oraz prędkości kątowej $\omega(t)$ wirnika, unikając całkowania numerycznego. Podstawowym założeniem tego algorytmu jest istnienie okresowych rozwiązań ustalonych dla rozpatrywanego układu równań różniczkowych. Można przy tym ograniczyć się do wykazania takich własności dla wektora prądów $\mathbf{i}(t)$ oraz prędkości kątowej $\omega(t)$ gdyż kąt obrotu $\varphi(t)$, z natury narastający w czasie, można prosto zastąpić jego perturbacjami, okresowo zmiennymi w czasie w przypadku okresowej zmienności prędkości kątowej. Algorytm opisywany w tej pracy zakłada, że prądy oraz prędkość kątową można przewidzieć w stanie ustalonym w postaci ich szeregów Fouriera o znanym okresie:

$$\mathbf{i}(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \mathbf{I}_k \cdot e^{jr\Omega_m t}, \quad \omega(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \Omega_r \cdot e^{jr\Omega_m t} = \Omega_0 + \sum_{\substack{r=-\infty \\ r \neq 0}}^{\infty} \Omega_r \cdot e^{jr\Omega_m t}, \quad \Omega_m = 2\pi \cdot f_m \quad (3)$$

gdzie:

f_m – znana *a priori* częstotliwość.

Wówczas kąt obrotu wirnika można przedstawić w postaci $\varphi(t) = \Omega_0 \cdot t + \Delta\varphi(t)$, a jego perturbacje $\Delta\varphi(t)$ są już okresowo zmienne i można je zapisać w postaci szeregu Fouriera:

$$\Delta\varphi(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \Phi_r \cdot e^{jr\Omega_m t} \quad (4)$$

Z definicji prędkości kątowej $d\varphi(t)/dt = \omega(t)$ wynika, że współczynniki Fouriera szeregów prędkości kątowej oraz perturbacji kąta są wzajemnie zależne $(jr\Omega_m) \cdot \Phi_r = \Omega_r$ dla $r \neq 0$, co oznacza, że jedynie wartości Φ_0 oraz Ω_0 są od siebie niezależne. Okres zmienności rozwiązań wynikający z częstotliwości f_m jest przeważnie związany z średnią wartością prędkości kątowej Ω_0 . Gdy jest ona jednoznacznie określona, można jednoznacznie przewidzieć ten okres. Lista zmiennych redukuje się wówczas do prądów w wektorze $\mathbf{i}(t)$ oraz perturbacji kąta obrotu $\Delta\varphi(t)$, a równanie (2) przyjmuje postać:

$$J \frac{d^2 \Delta\varphi}{dt^2} + D \frac{d\Delta\varphi}{dt} = T_{em}(\mathbf{i}, \Delta\varphi) + T_m(t) - D \cdot \Omega_0 \quad (5)$$

We wstępie wspomniano, że algorytm będzie testowany na przykładzie analizy stanu ustalonego maszyny synchronicznej poddanej działaniu momentu mechanicznego z okresową składową pręmienną:

$$T_m(t) = T_0 + T_z(t), \quad T_z(t) = \sum_{\substack{r=-\infty \\ r \neq 0}}^{\infty} T_r \cdot e^{jr\Omega_m t}, \quad (6)$$

która nie powoduje jednak utraty synchronizmu. W tym przypadku wartość średnia prędkości kątowej jest znana.

Aby wykazać okresowość rozwiązań w stanie ustalonym, która wynika z okresowej w czasie zmienności współczynników lub wymuszeń w równaniach różniczkowych, należy zapisać równania elektryczne maszyny w odpowiednio dobranych współrzędnych. Można w tym celu wykorzystać powszechnie stosowane do opisu maszyn prądu przemiennego transformacje współrzędnych, które umożliwiają eliminację zmienności współczynników równań od kąta obrotu lub sprowadzenie wymuszeń napięciowych do wartości stałych w czasie. Tego typu zabiegi muszą być jednak wykonywane indywidualnie dla konkretnego przypadku. Równania otrzymane w wyniku takich zabiegów można zapisać w ogólnej postaci:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{L}_t(\Delta\varphi, t) \cdot \mathbf{i}_t) + \mathbf{K}_t(\Delta\varphi, t) \cdot \mathbf{i}_t + \mathbf{R}_t \cdot \mathbf{i}_t = \mathbf{u}_t(\Delta\varphi, t) \quad (7a)$$

$$J \frac{d^2 \Delta\varphi}{dt^2} + D \frac{d\Delta\varphi}{dt} = T_{em}(\mathbf{i}_t, \Delta) + T_m(t) - D \cdot \Omega_0 \quad (7b)$$

Dla celów dalszej analizy zostaną one połączone w jeden układ nieliniowych równań różniczkowych o następującej strukturze:

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{F}_2(\mathbf{x}) + \frac{d}{dt} \mathbf{F}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_0(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad (8)$$

W tym zapisie $\mathbf{F}_2(\mathbf{x})$, $\mathbf{F}_1(\mathbf{x})$ oraz $\mathbf{F}_0(\mathbf{x}, t)$ są wektorami funkcji zależnych od poszukiwanych funkcji tworzących wektor $\mathbf{x} = [\mathbf{i}^T \quad \Delta\varphi]$.

3. Równania bilansu harmonicznego dla rozwiązań okresowych

W celu utworzenia równań bilansu harmonicznego dla równań (8) należy przewidzieć rozwiązania ustalone w postaci szeregu Fouriera:

$$\mathbf{x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{X}_k \cdot e^{jk\Omega_m t} \quad (9)$$

i podstawić je do równania (8). Aby zbilansować szeregi Fouriera trzech członów występujących w równaniu (8) należy przedstawić każdy z nich w postaci szeregu Fouriera:

$$\mathbf{F}_n = \begin{bmatrix} f_{n,1} \\ \vdots \\ f_{n,M} \end{bmatrix} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_{n,k} \cdot e^{jk\Omega_m t}, \quad n = \{0, 1, 2\} \quad (10)$$

Takie przedstawienie jest możliwe, gdyż występujące w tych członach nieliniowe funkcje poszukiwanych rozwiązań po podstawieniu okresowych rozwiązań stają się także okresowe. Nieliniowy charakter tych funkcji stwarza jednak zasadniczą trudność przy bilansowaniu harmonicznego, gdyż w efekcie otrzymuje się nieskończony układ nieliniowych równań algebraicznych o nieskończonej liczbie zmiennych

$$-\text{diag} \begin{bmatrix} \vdots \\ \Omega^2 \\ \mathbf{0} \\ \Omega^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{F}_{2,1} \\ \mathbf{F}_{2,0} \\ \mathbf{F}_{2,-1} \\ \vdots \end{bmatrix} + \text{diag} \begin{bmatrix} \vdots \\ j\Omega \\ \mathbf{0} \\ -j\Omega \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{F}_{1,1} \\ \mathbf{F}_{1,0} \\ \mathbf{F}_{1,-1} \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{F}_{0,1} \\ \mathbf{F}_{0,0} \\ \mathbf{F}_{0,-1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (11)$$

gdzie:

$$\mathbf{\Omega} = \Omega_m \cdot \mathbf{E},$$

\mathbf{E} – macierz jednostkowa.

Należy pamiętać, że niektóre współczynniki Fouriera występujące w wektorach $\mathbf{F}_{n,k}$ obliczane są dla nieliniowych funkcji, czyli będą nieliniowo zależeć od poszukiwanych współczynników szeregu (9), co można zapisać symbolicznie w postaci $\mathbf{F}_{n,k}(\dots, \mathbf{X}_{-1}, \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \dots)$. W celu skrócenia zapisu równania (15) można wykorzystać notację tzw. wektorowych reprezentacji [3] szeregów Fouriera wektorów $\mathbf{F}_2(\mathbf{x})$, $\mathbf{F}_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{F}_0(\mathbf{x}, t)$, oraz poszukiwanego szeregu Fouriera wektora \mathbf{x}

$$-(\mathbf{\Omega})^2 \cdot \mathbf{F}_2(\mathbf{X}) + j \cdot \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{F}_1(\mathbf{X}) + \mathbf{F}_0(\mathbf{X}) = \mathbf{0}, \quad (11a)$$

gdzie:

$$\mathbf{X} = [\dots \mathbf{X}_2 \quad \mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_0 \quad \mathbf{X}_{-1} \quad \mathbf{X}_{-2} \quad \dots]^T$$

$$\mathbf{\Omega} = \text{diag}[\dots \quad 2\Omega \quad \Omega \quad \mathbf{0} \quad -\Omega \quad -2\Omega \quad \dots]$$

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{X}) = [\dots \quad \mathbf{F}_{2,1}(\dots \mathbf{X}_{-1}, \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1 \dots) \quad \mathbf{F}_{2,0}(\dots \mathbf{X}_{-1}, \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1 \dots) \quad \mathbf{F}_{2,-1}(\dots \mathbf{X}_{-1}, \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1 \dots) \quad \dots]^T$$

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{X}) = \left[\cdots \quad \mathbf{F}_{1,1}(\cdots \mathbf{X}_{-1}, \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1 \cdots) \quad \mathbf{F}_{1,0}(\cdots \mathbf{X}_{-1}, \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1 \cdots) \quad \mathbf{F}_{1,-1}(\cdots \mathbf{X}_{-1}, \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1 \cdots) \quad \cdots \right]^T$$

$$\mathbf{F}_0(\mathbf{X}) = \left[\cdots \quad \mathbf{F}_{0,1}(\cdots \mathbf{X}_{-1}, \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1 \cdots) \quad \mathbf{F}_{0,0}(\cdots \mathbf{X}_{-1}, \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1 \cdots) \quad \mathbf{F}_{0,-1}(\cdots \mathbf{X}_{-1}, \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1 \cdots) \quad \cdots \right]^T$$

4. Iteracyjny algorytm wyznaczania rozwiązań ustalonych

Równanie (11) stanowi w istocie układ nieskończenie wielu nieliniowych równań algebraicznych. Można go rozwiązać jedynie iteracyjnie, stosując algorytm Newtona-Raphsona:

$$\mathbf{X}^{i+1} = \mathbf{X}^i - \mathbf{J}(\mathbf{X}^i)^{-1} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}^i) \quad (12)$$

gdzie:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = -(\boldsymbol{\Omega})^2 \cdot \mathbf{F}_2(\mathbf{X}) + j \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{F}_1(\mathbf{X}) + \mathbf{F}_0(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$$

Macierz Jacobiego w (12) jest określona następująco:

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \quad (13)$$

W pracy [2] pokazano, że w celu jej określenia należy obliczyć macierze:

$$\mathbf{F}_{d,n} = \frac{\partial \mathbf{F}_n}{\partial \mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{n,1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{n,1}}{\partial x_M} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{n,M}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_{n,M}}{\partial x_M} \end{bmatrix}, \quad (\text{dla } n \in \{0, 1, 2\}), \quad (14)$$

oraz ich szeregi Fouriera

$$\mathbf{F}_{d,n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_{n,k}^d \cdot e^{jk\Omega_m t} \quad (15)$$

Następnie tworzy się ich macierzowe reprezentacje o postaciach:

$$\mathbf{F}_{d,n} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \mathbf{F}_{n,0}^d & \mathbf{F}_{n,1}^d & \mathbf{F}_{n,2}^d & \cdots \\ \cdots & \mathbf{F}_{n,-1}^d & \mathbf{F}_{n,0}^d & \mathbf{F}_{n,1}^d & \cdots \\ \cdots & \mathbf{F}_{n,-2}^d & \mathbf{F}_{n,-1}^d & \mathbf{F}_{n,0}^d & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (16)$$

Macierz Jacobiego ma postać

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}) = -(\boldsymbol{\Omega})^2 \cdot \mathbf{F}_{d,2}(\mathbf{X}) + j \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{F}_{d,1}(\mathbf{X}) + \mathbf{F}_{d,0}(\mathbf{X}) \quad (17)$$

- Procedura iteracyjnego obliczania widma Fouriera wektora rozwiązań w przypadku nieliniowego charakteru równań została przedstawiona w [2]. W każdej iteracji wymaga ona:
- obliczenia przebiegów czasowych poszukiwanych funkcji, na ich podstawie współczynników Fouriera wyliczonych w poprzedniej iteracji,
 - obliczenia przebiegów czasowych nieliniowych funkcji występujących w macierzach \mathbf{F}_n oraz $\mathbf{F}_{d,n}$,
 - obliczenia współczynników Fouriera tych funkcji i utworzenie na ich podstawie wektora $\mathbf{F}(\mathbf{X}^i)$ oraz macierzy Jacobiego $\mathbf{J}(\mathbf{X}^i)$,
 - obliczenia nowych wartości współczynników Fouriera wektora rozwiązań z zależności (12).

Wartościami startowymi dla takiego algorytmu mogą być rozwiązania ustalone obliczone z równań elektrycznych przy pominięciu równania ruchu.

5. Testy zbieżności numerycznej

Test zbieżności numerycznej algorytmu przeprowadzono dla wspomnianego we wstępie przypadku stanu ustalonego silnika synchronicznego obciążonego momentem mechanicznym zawierającym oprócz składowej stałej T_0 monoharmoniczną składową przemienną:

$$T_m(t) = T_0 + T_z \sin(\Omega_m t + \alpha) \quad (18)$$

która jest na tyle mała, że nie powoduje wypadnięcia silnika z synchronizmu, a jedynie wywołuje kołysania wirnika wokół prędkości synchronicznej. Szczegółową postać równań maszyny synchronicznej przy-stosowanych dla potrzeb tej analizy podano w [5].

Program realizujący algorytm Newtona-Raphsona opisany relacją (12) przygotowano przy użyciu pakietu MATLAB. Do obliczeń numerycznych wykorzystano parametry silnika synchronicznego o danych znamionowych: $P_N = 1250$ kW, $U_N = 6000$ V, $f_s = 50$ Hz, $\cos\phi = 0.9$, $n_N = 750$ obr/min.

Obliczenia testowe przeprowadzono przy założeniu, że składowa stała momentu obciążenia T_0 jest równa momentowi znamionowemu, a amplituda składowej przemiennej T_z stanowi 10% tej wartości i ma częstotliwość $f_m = 4,7$ Hz, przy której wahania prądów stojana są największe. Założono, że bezwładność w równaniu mechanicznym jest równa bezwładności wirnika. Wartości startowe dla algorytmu Newtona-Raphsona wyznaczono z równań stanu ustalonego dla znamionowych wartości napięć stojana, wzbudzenia oraz momentu obciążenia o stałej wartości. Celem obliczeń testowych było wykazanie zbieżności algorytmu. Wyniki tych obliczeń przedstawiono na kolejnych rysunkach.

W stanie ustalonym prędkość kątowna jest funkcją okresową i można ją zapisać w postaci szeregu Fouriera:

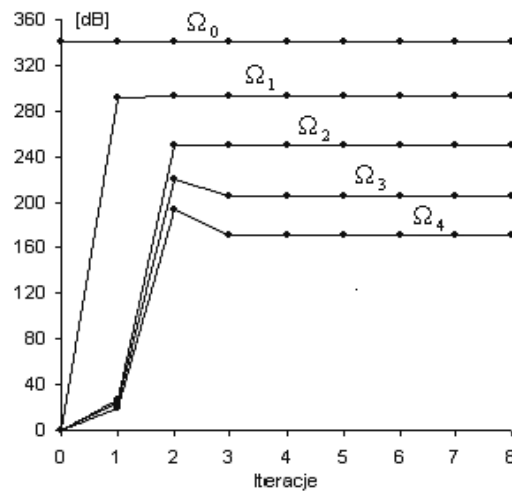
$$\omega(t) = \Omega_0 + \sum_{k=1}^K \Omega_k \cos(k \cdot \Omega_m t + \alpha_k), \quad \text{gdzie} \quad \Omega_0 = \Omega_s / p, \quad \Omega_s = 2\pi \cdot f_s, \quad (19)$$

Na rys. 1 zestawiono wartości amplitud czterech pierwszych harmoniczných prędkości obrotowej silnika otrzymywane w kolejnych iteracjach (poziom odniesienia $\Omega_0 \cdot 10^{-17}$).

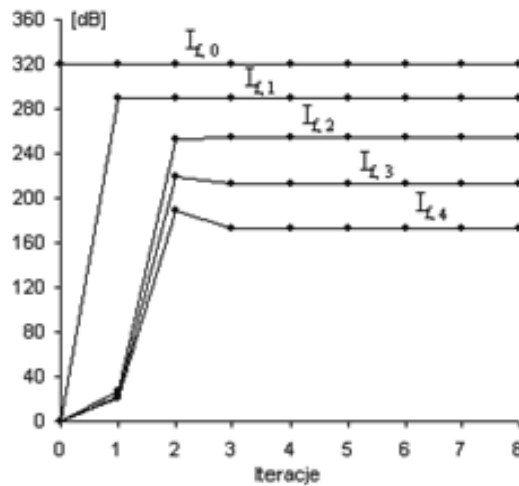
Analogicznie, prąd wzbudzenia w stanie ustalonym jako okresowo zmienny może być przedstawiony w postaci szeregu Fouriera:

$$i'_f(t) = I_{f,0} + \sum_{k=1}^K I_{f,k} \cos(k \cdot \Omega_m t + \beta_k) \quad (20)$$

Rysunek 2 przedstawia zmiany wartości amplitud czterech pierwszych harmonicznych prądu wzbudzenia w kolejnych iteracjach (poziom odniesienia $I_{f,0} \cdot 10^{-16}$).



Rys. 1. Zmienność amplitud harmonicznych prędkości kątowej w kolejnych iteracjach
Fig. 1. Harmonic amplitudes of angular velocity for successive iterations

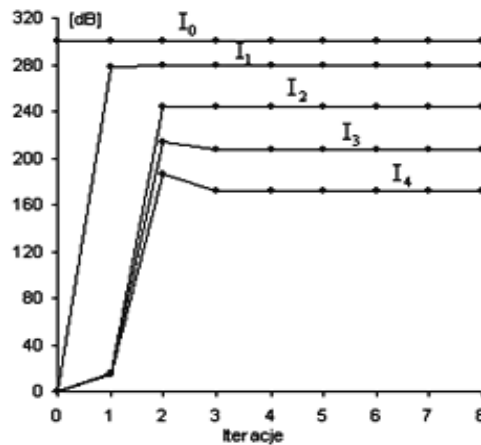


Rys. 2. Zmienność amplitud harmonicznych prądu wzbudzenia w kolejnych iteracjach
Fig. 2. Harmonic amplitudes of field current for successive iterations

Prądy faz stojana w stanie ustalonym, w konsekwencji wahań prędkości kątowej, stają się funkcjami prawie okresowymi o pulsacjach $\Omega_k = \Omega_s + k \cdot \Omega_m$. Przykładowo, prąd fazy „a” można zapisać w postaci szeregu:

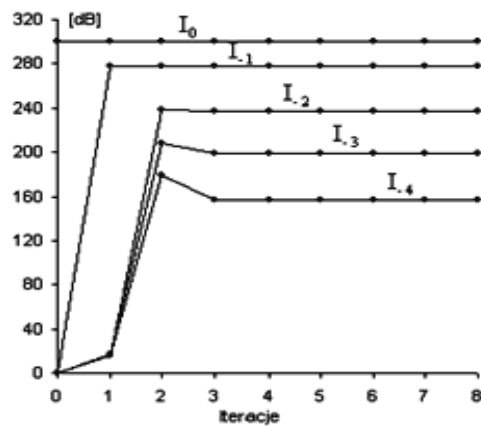
$$i_a(t) = \sum_{k=-K}^K I_k \cdot \cos((\Omega_s + k \cdot \Omega_m) \cdot t + \gamma_k) \quad (21)$$

Na rysunkach 3a, b przedstawiono zmiany wartości czterech pierwszych składowych prądu stojana w kolejnych iteracjach. Wartości podano w dB (poziom odniesienia $I_0 \cdot 10^{-15}$).



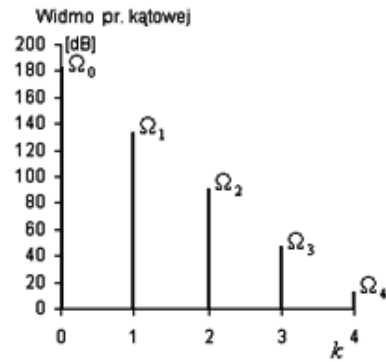
Rys. 3a. Zmienność amplitud harmonicznych prądu stojana dla dodatnich k w kolejnych iteracjach

Fig. 3a. Harmonic amplitudes of stator currents for positive k for successive iterations

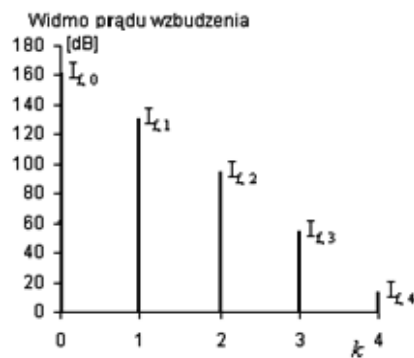


Rys. 3b. Zmienność amplitud harmonicznych prądu stojana dla ujemnych k w kolejnych iteracjach

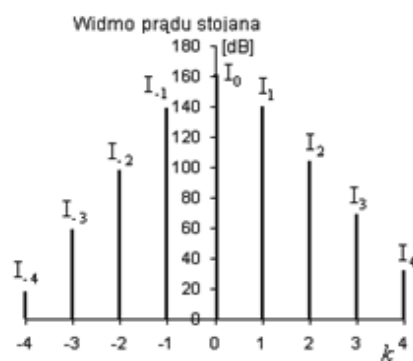
Fig. 3b. Harmonic amplitudes of stator currents for negative k for successive iterations



Rys. 4. Widmo Fouriera prędkości kątowej w stanie pracy znamionowej dla $T_z = 0,1 T_N$
 Fig. 4. Fourier spectrum of angular velocity at rated condition for $T_z = 0,1 T_N$



Rys. 5. Widmo Fouriera prądu wzbudzenia w stanie pracy znamionowej dla $T_z = 0,1 T_N$
 Fig. 5. Fourier spectrum of field current at rated condition for $T_z = 0,1 T_N$



Rys. 6. Widmo Fouriera prądu stojana w stanie pracy znamionowej dla $T_z = 0,1 T_N$
 Fig. 6. Fourier spectrum of stator current at rated condition for $T_z = 0,1 T_N$

Wyniki testów świadczą o bardzo dobrej zbieżności algorytmu. Wartości amplitud najważniejszych harmonicznych ustalają się już po pierwszej iteracji, natomiast wartości harmonicznych wyższych, nawet tych różniących się o wiele rzędów, ustalają się po trzech iteracjach.

Na kolejnych rysunkach 4, 5 oraz 6 przedstawiono widma prędkości kątowej, prądu wzbudzenia oraz prądów stojana obliczone bezpośrednio z algorytmu Newtona-Raphsona, bez wyznaczania rozwiązań równań maszyny synchronicznej w czasie.

Wyniki badań numerycznych wpływu parametrów maszyny synchronicznej oraz wielkości charakteryzujących moment obciążenia na te widma przedstawiono w pracy [5].

6. Wnioski

W artykule opisano iteracyjny algorytm bezpośredniego obliczania stanu ustalonego w maszynach prądu przemiennego z uwzględnieniem równania ruchu. Wyniki testów jego numerycznej zbieżności, przeprowadzone na przykładzie stanu ustalonego silnika synchronicznego obciążonego momentem mechanicznym z okresowo zmienną składową, wykazały bardzo dobrą zbieżność algorytmu.

Algorytm ten może stać się efektywnym narzędziem dla jakościowego i ilościowego określania widm Fouriera prądów maszyn prądu przemiennego w przypadkach, gdy należy uwzględniać równanie mechaniczne, które nadaje równaniom nieliniowy charakter i rutynowe metody analizy stanów ustalonych zawodzą.

Literatura

- [1] Sobczyk T.J., *A reinterpretation of the Floquet solution of the ordinary differential equation system with periodic coefficients as a problem of infinite matrix*, Compel, Vol. 5, No. 1, Dublin 1986, 1-22.
- [2] Sobczyk T.J., *Direct determination of two-periodic solution for nonlinear dynamic systems*, Compel, James & James Science Pub. Ltd., Vol. 13, No. 3, 1994, 509-529.
- [3] Sobczyk T.J., *Metodyczne aspekty modelowania matematycznego maszyn indukcyjnych*, WNT, Warszawa 2004.
- [4] Sobczyk T.J., *Algorytm bezpośredniego określania stanów ustalonych w maszynach prądu przemiennego z uwzględnieniem równania ruchu*, Prace Naukowe Instytutu Maszyn, Napędów i Pomiarów Elektrycznych, 62, Seria Studia i Materiały, 28, Wydawnictwo PWr, Wrocław 2008, 66-74.
- [5] Radzik M., *Badanie wpływu składowej przemiennego momentu mechanicznego na widma prądów i prędkości kątowej maszyny synchronicznej*, Czasopismo Techniczne, 1-E/2009, Wydawnictwo PK, Kraków 2009, 49-65.