

JANUSZ GERMAN, ZBIGNIEW MIKULSKI\*

## NUMERYCZNA SYMULACJA STOPNIOWEGO USZKADZANIA SIĘ LAMINATÓW KOMPOZYTOWYCH

### NUMERICAL SIMULATION OF PROGRESSIVE DAMAGE IN COMPOSITE LAMINATES

#### Streszczenie

W artykule przedstawiono wyniki numerycznych symulacji stopniowego uszkodzenia się laminatów kompozytowych o różnej konfiguracji warstw. Symulacje wykonano przy pomocy własnych procedur zapisanych w programie Mathcad. W szczególności rozważono płaskie elementy konstrukcyjne poddane rozciąganiu i ścinaniu. Każdorazowo porównano wyniki otrzymane przy wykorzystaniu różnych kryteriów wyczerpania oraz zastosowaniu różnych sposobów degradacji sztywności.

*Słowa kluczowe: kompozyt włóknisty, analiza wytrzymałościowa, nośność, progresywna degradacja*

#### Abstract

This paper presents numerical simulations of progressive damage in composite laminates with various ply stacking sequences. Plane structural elements subjected to tension and shear loading are considered. Numerical results obtained by utilizing different failure criteria and stiffness degradation methods are compared. Simulations were performed by utilizing author's code written in frame of Mathcad.

*Keywords: composite laminates, strength analysis, load capacity, progressive damage*

\* Dr hab. inż. Janusz German, prof. PK, mgr inż. Zbigniew Mikulski, Katedra Wytrzymałości Materiałów, Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska.

### Oznaczenia

$E_1$	– podłużny moduł Younga
$E_2$	– poprzeczny moduł Younga
$G_{12}$	– moduł ścinania
$\nu_{12}$	– większy współczynnik Poissona
$X^T$	– wytrzymałość na rozciąganie w kierunku włókien
$X^C$	– wytrzymałość na ściskanie w kierunku włókien
$Y^T$	– wytrzymałość na rozciąganie w kierunku poprzecznym do włókien
$Y^C$	– wytrzymałość na ściskanie w kierunku poprzecznym do włókien
$S$	– wytrzymałość na ścinanie w płaszczyźnie głównych osi materiałowych
$\alpha_1$	– współczynnik rozszerzalności termicznej w kierunku włókien
$\alpha_2$	– współczynnik rozszerzalności termicznej w kierunku poprzecznym do włókien
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_6$	– elementy tensora naprężenia w notacji Voigta, odpowiednio $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_6$	– elementy tensora odkształcenia w notacji Voigta, odpowiednio $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12}$
$\sigma_{\text{FPF}}$	– obciążenie niszczące pierwszą warstwę laminatu
$\sigma_{\text{LPF}}$	– obciążenie niszczące ostatnią warstwę laminatu
$\sigma_{\text{ULF}}$	– obciążenie niszczące laminat
$F_i, F_{ij}$	– elementy tensorów wytrzymałości
$N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}$	– uogólnione siły wewnętrzne w powłoce

## 1. Wstęp

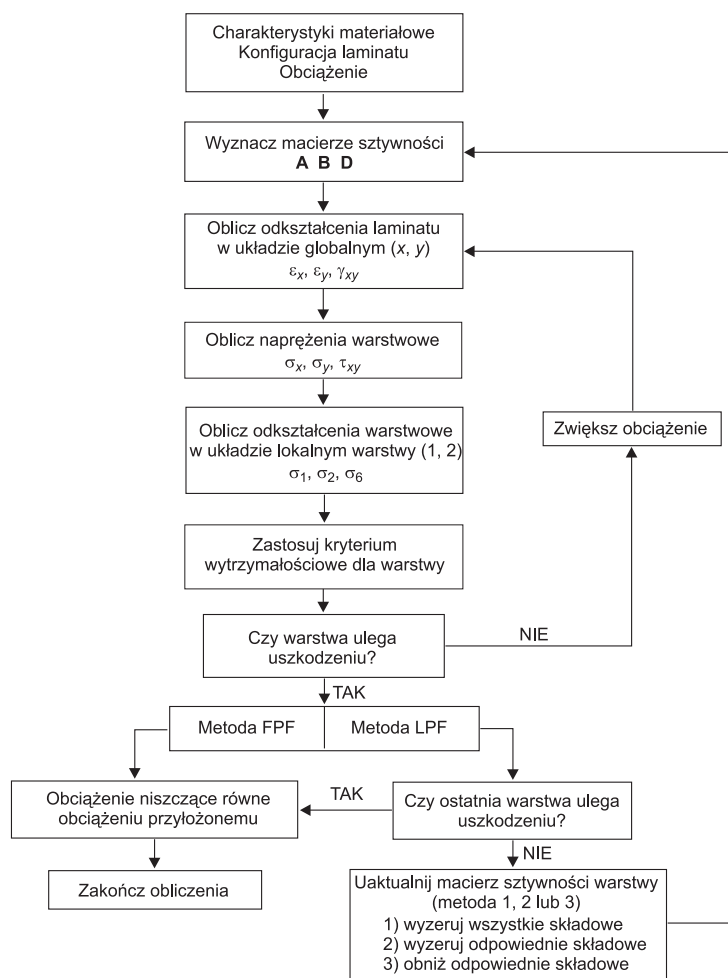
Zagadnienia wytrzymałościowe w przypadku laminowanych kompozytów włóknistych należy rozpatrywać na trzech poziomach obserwacji, wynikających z budowy laminatu. Najniższy poziom obserwacji to poziom mikroskopowy (materiałowy), na którym różniamy składniki tworzące kompozyt, tzn. włókna i matrycę. Ich własności wytrzymałościowe decydują bezpośrednio o cechach wytrzymałościowych warstwy kompozytowej. Kolejny poziom obserwacji to poziom warstwy rozumianej jako podstawowy składnik kompozytu warstwowego, ale jednocześnie będącej już elementem zdolnym do samodzielnego przenoszenia obciążenia. Pojawia się zatem problem określenia jej nośności, czyli wartości obciążenia, jakie jest ona w stanie bezpiecznie przenieść. I wreszcie najwyższy poziom analizy wytrzymałościowej to poziom laminatu jako zbioru warstw, których własności i sposób ułożenia decydują bezpośrednio o nośności kompozytu. Z praktycznego punktu widzenia najbardziej istotny jest ten ostatni przypadek, gdyż zadaniem konstruktora jest zaprojektowanie do określonego celu odpowiedniego laminatu.

W przypadku laminatu nie funkcjonuje pojęcie wytrzymałości. Jest on bowiem konstrukcją złożoną z pojedynczych warstw i tak jak w przypadku każdej konstrukcji inżynierskiej można mówić tylko o jego nośności. Pojęcie „wytrzymałość” ma natomiast

sens w przypadku pojedynczej warstwy kompozytowej, która jest składnikiem laminatu. Przy aktualnym stanie wiedzy nie ma teorii, pozwalającej na analizę wytrzymałościową kompozytu warstwowego jako całości. Konieczne jest zejście z poziomem obserwacji do pojedynczych warstw składowych i w oparciu o ich wytrzymałość zbudowanie algorytmu analizy wytrzymałościowej całego kompozytu.

Podstawowym krokiem do wyznaczenia nośności laminatu jest zatem sprawdzenie wytrzymałości każdej warstwy z osobna i określenie, która z nich niszczy się jako pierwsza. Naprężenia i odkształcenia w poszczególnych warstwach wyznacza się przy zastosowaniu klasycznej teorii laminatów. Po wyznaczeniu naprężeń działających w każdej warstwie i przetransformowaniu ich do głównych osi materiałowych, określa się wyężenie warstw, przy zastosowaniu jednego z wybranych kryteriów wyężeniowych.

Procedurę wyznaczania nośności laminatu przedstawiono na rys. 1 [3].



Rys. 1. Algorytm analizy wytrzymałościowej warstwowego laminatu kompozytowego

Fig. 1. Algorithm of strength analysis of composite laminate

## 1.1. Kryteria wytrzymałościowe dla warstwy kompozytowej stosowane w pracy

Kryterium maksymalnego naprężenia:

$$\begin{aligned} -X^C &\leq \sigma_1 \leq X^T \\ -Y^C &\leq \sigma_2 \leq Y^T \\ \sigma_6 &\leq S \end{aligned}$$

Kryterium maksymalnego odkształcenia:

$$\begin{aligned} -\varepsilon_{Lc} &\leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_{Lt} \\ -\varepsilon_{Tc} &\leq \varepsilon_2 \leq \varepsilon_{Tt} \\ |\varepsilon_6| &\leq \gamma_{LT} \\ \varepsilon_{Lt} &= \frac{X^T}{E_1} \quad \varepsilon_{Lc} = \frac{X^C}{E_1} \quad \varepsilon_{Tt} = \frac{Y^T}{E_2} \quad \varepsilon_{Tc} = \frac{Y^C}{E_2} \quad \gamma_{LT} = \frac{S}{G_{12}} \end{aligned}$$

Kryterium Azzi'ego-Tsaia-Hilla:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} + \frac{\sigma_6^2}{S^2} &\leq 1 \\ X &= \begin{cases} X^T & \text{dla } \sigma_1 > 0 \\ X^C & \text{dla } \sigma_1 < 0 \end{cases} \\ Y &= \begin{cases} Y^T & \text{dla } \sigma_2 > 0 \\ Y^C & \text{dla } \sigma_2 < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Kryterium Tsaia-Wu:

$$\begin{aligned} F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_6\sigma_6 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\sigma_6^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 &\leq 1 \\ F_1 &= \frac{1}{X^T} - \frac{1}{X^C} \quad F_2 = \frac{1}{Y^T} - \frac{1}{Y^C} \quad F_6 = 0 \\ F_{11} &= \frac{1}{X^T X^C} \quad F_{22} = \frac{1}{Y^T Y^C} \quad F_{66} = \frac{1}{S^2} \quad F_{12} = -0,5\sqrt{F_{11}F_{22}} \end{aligned}$$

Kryterium Hoffmana:

$$-\frac{\sigma_1^2}{X^C X^T} + \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^C X^T} - \frac{\sigma_2^2}{Y^C Y^T} + \frac{X^C + X^T}{X^C X^T} \sigma_1 + \frac{Y^C + Y^T}{Y^C Y^T} \sigma_2 + \frac{\sigma_6^2}{S^2} \leq 1$$

Kryterium energetyczne:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1^2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} A + \frac{\sigma_1\sigma_2}{Y^2} A + \frac{\sigma_6^2}{S^2} &\leq 1 \\ A &= -2\nu_{12} \frac{E_2}{E_1 - E_2} \end{aligned}$$

$$X = \begin{cases} X^T & \text{dla } \sigma_1 > 0 \\ X^C & \text{dla } \sigma_1 < 0 \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} Y^T & \text{dla } \sigma_2 > 0 \\ Y^C & \text{dla } \sigma_2 < 0 \end{cases}$$

## 2. Wyniki przeprowadzonych symulacji

Numeryczne symulacje stopniowego uszkodzenia się laminatów przeprowadzono dla wielu konfiguracji laminatów oraz różnych sposobów ich obciążenia. W artykule zostaną przedstawione wyniki wybranych symulacji. Podzielono je na kilka grup w zależności od sposobu obciążenia laminatu. Obliczenia wykonano dla laminatów wykonanych z taśm *prepreg* włókno węglowe/epoksyd o nazwie Torayca T300/Vicotex 174B, dla którego charakterystyki sztywnościowe, wytrzymałościowe i termiczne po laminowaniu są następujące:

$$E_1 = 137 \text{ GPa} \quad E_2 = 10.04 \text{ GPa} \quad G_{12} = 4.8 \text{ GPa} \quad \nu_{12} = 0.3$$

$$X^T = 1531 \text{ MPa} \quad X^C = 1390 \text{ MPa} \quad Y^T = 41 \text{ MPa} \quad Y^C = 145 \text{ MPa}$$

$$S = 98 \text{ MPa}$$

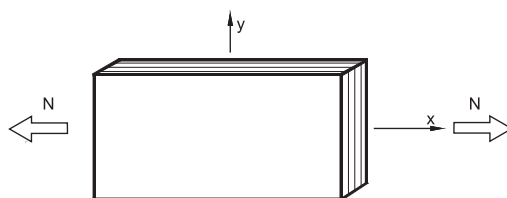
$$\alpha_1 = 3,1 \cdot 10^{-7} \frac{1}{K} \quad \alpha_2 = 3,1 \cdot 10^{-5} \frac{1}{K}$$

Grubość pojedynczej warstwy wynosi  $t_0 = 0,123$  mm. Temperatura laminowania wynosi  $120^\circ\text{C}$ , zaś temperatura eksploatacji  $20^\circ\text{C}$ .

### 2.1. Rozciąganie laminatów

Jako pierwsze zostaną przedstawione wyniki symulacji dotyczących wyznaczenia nośności laminatów jednokierunkowo rozciąganych. Przez nośność rozumiana jest wartość obciążenia, powyżej której następuje utrata możliwości przenoszenia obciążenia o zadanym kierunku. Schemat obciążenia laminatu pokazano na rys. 2.

Dla laminatu o konfiguracji  $[0/90]_s$  obliczenia wykonano dla trzech sposobów degradacji macierzy sztywności oraz trzech kryteriów wytrzymałościowych. Otrzymane wyniki zestawiono w tabeli 1. Wartość siły odpowiadającą nośności odniesiono do powierzchni przekroju poprzecznego laminatu.



Rys. 2. Laminat poddany jednoosiowemu rozciąganiu  
Fig. 2. Laminate under uniaxial tension

Zestawienie otrzymanych wyników dla laminatu  $[0/90]_s$  [MPa]

Kryterium wytrzymałościowe	Sposób degradacji		
	całkowita eliminacja warstwy	zerowanie odpowiednich elementów macierzy sztywności	redukcja odpowiednich elementów macierzy sztywności [8]
Azzi-Tsai-Hill	763,5 MPa	765,5 MPa	758,0 MPa
Tsai-Wu	765,5 MPa	765,5 MPa	755,9 MPa
Maksymalne naprężenie	765,5 MPa	765,5 MPa	776,2 MPa

Aby wykazać, że omawiane metody degradacji mogą dawać wyniki znacznie różniące się od siebie, do analizy wybrano laminat o bardziej złożonej konfiguracji –  $[0_2/\pm 15/\pm 30/\pm 45/\pm 60/\pm 75/90_2]_s$ . Jako kryterium wytrzymałościowe dla warstwy przyjęto kryterium Azzi’ego-Tsai-Hilla. Wyniki obliczeń zestawiono w tabeli 2.

Przedstawione wyniki wykazują duże podobieństwo pomiędzy metodą zerowania i redukcji odpowiednich elementów macierzy sztywności. Maksymalne różnice w prognozowaniu zniszczenia poszczególnych warstw sięgają tutaj ok. 3%. Większe różnice dostrzec można między metodą całkowitej eliminacji warstwy a dwoma pozostałymi. Chociaż obciążenie niszczące laminat jest prognozowane przez wszystkie trzy metody na zbliżonym poziomie (413–435 MPa), to jednak bardzo duże różnice występują przy obciążeniach niszczących poszczególne warstwy. Dla warstw  $\pm 45^\circ$  obciążenie niszczące prognozowane przez metodę całkowitej eliminacji warstwy jest o ok. 85% wyższe niż w przypadku pozostałych metod. Co więcej, obciążenie niszczące warstwy  $\pm 45^\circ$  wyznaczone według metody całkowitej eliminacji warstwy jest już bliskie nośności laminatu, a wyznaczone w następnym kroku obciążenie niszczące warstwy  $\pm 30^\circ$  jest jednocześnie obciążeniem niszczącym laminat. Natomiast w przypadku pozostałych metod obciążenie niszczące warstwy  $\pm 45^\circ$  stanowi dopiero ok. 50% nośności laminatu, a całkowite zniszczenie laminatu jest poprzedzone sukcesywnym uszkodzaniem się warstw  $\pm 30^\circ$ ,  $\pm 15^\circ$  i  $0^\circ$ . Można zatem mówić o dużej różnicy wyników analizy zniszczenia wyznaczanych przy użyciu omawianych metod.

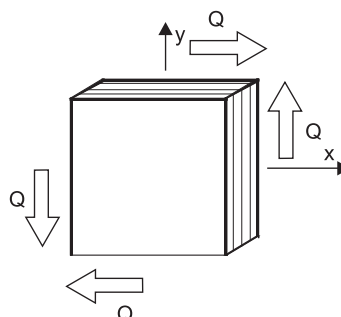
Tabela 2

Zestawienie wyników

Uszkodzenie	Obciążenie [MPa]		
	Metoda degradacji		
	eliminacja	zerowanie	redukcja
pierwsza warstwa $-90^\circ$	102	102	102
warstwy $\pm 75^\circ$	113	111	112
warstwy $\pm 60^\circ$	179	148	150
warstwy $\pm 45^\circ$	397	210	214
warstwy $\pm 30^\circ$	413	299	306
warstwy $\pm 15^\circ$	413	390	401
warstwa $0^\circ$	413	422	435
$\sigma_{FPF}/\sigma_{LPF}$	4,04	4,13	4,25

## 2.2. Ścinanie laminatów

Kolejno zostaną przedstawione wyniki symulacji dotyczących wyznaczenia nośności laminatów poddanych ścinaniu. Rozważono różne konfiguracje laminatów. Przyjęto kryterium wytrzymałościowe Azzi'ego-Tsaia-Hilla oraz metodę degradacji polegającą na obniżaniu współczynników sztywności (Liu i Tsai [8]). Schemat obciążenia laminatu przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. Laminat poddany ścinaniu  
Fig. 3. Laminate under shear forces

W pierwszej kolejności przeanalizowano laminat  $[0/90]_s$ . Obciążenie niszczące pierwszą warstwę wynosi 72,5 MPa, zaś rozkład naprężeń warstwowych wywołuje jednakowe wyczerpanie we wszystkich warstwach, co oznacza jednoczesne spełnienie kryterium wytrzymałościowego. Na podstawie analizy stanu naprężenia lub kryterium identyfikacji według Craddocka [2] można stwierdzić, że uszkodzenie następuje w wyniku ścinania i pęknięcia osnowy.

$$\frac{|\sigma_{1_k}|}{|\sigma_{2_k}|} > \frac{X_k}{Y_k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \frac{|\sigma_{1_k}|}{|\sigma_{6_k}|} > \frac{X_k}{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$k = 1, 2, 3, 4$

gdzie:

$k$  – indeks oznaczający numer warstwy w laminacie.

Ze względu na uszkodzenie we wszystkich warstwach matrycy, nie może nastąpić redystrybucja obciążeń na inne warstwy, więc nie jest możliwe przeprowadzenie analizy po uszkodzeniu. Jest to zatem obciążenie niszczące cały laminat,  $\sigma_{ULF} = 72,5$  MPa.

Następnie przeanalizowano laminat o konfiguracji  $[30/-30]_s$ . Wyznaczone dla niego naprężenie niszczące pierwszą warstwę wynosi 249,7 MPa. Rozkład naprężeń w przekroju nie jest jednakowy we wszystkich warstwach, a przedstawia się następująco:

$\sigma_1 =$		
	1	MPa
1	515,7	
2	-532,7	
3	-532,7	
4	515,7	

$\sigma_2 =$		
	1	MPa
1	-19,0	
2	36,0	
3	36,0	
4	-19,0	

$\sigma_6 =$		
	1	MPa
1	16,6	
2	26,4	
3	26,4	
4	16,6	

Uszkodzeniu ulega warstwa  $-30^\circ$ . Kryteria identyfikacji sposobu uszkodzenia [2] dla warstw  $-30^\circ$

$$\frac{|\sigma_{1_k}|}{|\sigma_{2_k}|} > \frac{X_k}{Y_k} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \quad \frac{|\sigma_{1_k}|}{|\sigma_{6_k}|} > \frac{X_k}{S} = \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$$

$k = 2, 3$

określają, że za uszkodzenie warstw odpowiedzialne jest zniszczenie osnowy. Po uaktualnieniu sztywności laminatu, otrzymujemy następujący rozkład naprężeń w warstwach

$\sigma_1 =$	
	1
1	560,4
2	-543,6
3	-543,6
4	560,4

 MPa

$\sigma_2 =$	
	1
1	-22,1
2	5,3
3	5,3
4	-22,1

 MPA

$\sigma_6 =$	
	1
1	14,3
2	4,6
3	4,6
4	14,3

 MPa

Przy takim stanie naprężenia pozostałe warstwy nie ulegają jeszcze uszkodzeniu, więc laminat może przenieść zwiększone obciążenie. Obciążenie niszczące laminat wynosi 552,5 MPa, a naprężenia mu towarzyszące mają wartości:

$\sigma_1 =$	
	1
1	1238,9
2	-1189,8
3	-1189,8
4	1238,9

 MPa

$\sigma_2 =$	
	1
1	-59,2
2	10,0
3	10,0
4	-59,2

 MPA

$\sigma_6 =$	
	1
1	37,6
2	9,2
3	9,2
4	37,6

 MPa

Uszkodzeniu ulegają warstwy  $30^\circ$ , a identyfikacja mechanizmu zniszczenia

$$\frac{|\sigma_{1_k}|}{|\sigma_{2_k}|} > \frac{X_k}{Y_k} = \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \quad \frac{|\sigma_{1_k}|}{|\sigma_{6_k}|} > \frac{X_k}{S} = \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$$

$k = 1, 4$

pozwała stwierdzić, że warstwy niszczą się poprzez uszkodzenie włókien. Naprężenie niszczące cały laminat  $\sigma_{ULF} = 552,5$  MPa. Takie samo rozwiązanie otrzymano dla laminatu  $[60/-60]_s$ ,

Kolejno rozważono laminat  $[45/-45]_s$ , dla którego naprężenie uszkadzające pierwszą warstwę wynosi 245,5 MPa. Naprężenia warstwowe wynoszą:

$\sigma_1 =$	
	1
1	452,8
2	-480,4
3	-480,4
4	452,8

 MPa

$\sigma_2 =$	
	1
1	-10,7
2	38,3
3	38,3
4	-10,7

 MPA

$\sigma_6 =$	
	1
1	$6,8 \cdot 10^{-15}$
2	$1,3 \cdot 10^{-14}$
3	$1,3 \cdot 10^{-14}$
4	$-8,1 \cdot 10^{-15}$

 MPa



Widzimy, że dla takiej konfiguracji laminatu naprężenia styczne są równe 0, co powoduje, że wytrzymałość warstwy na ścinanie nie ma wpływu na wytrzymałość laminatu na ścinanie. Uszkodzeniu ulega warstwa  $-45^\circ$ , a mechanizm zniszczenia na podstawie poniższych nierówności:

$$\frac{|\sigma_{1_k}|}{|\sigma_{2_k}|} > \frac{X_k}{Y_k} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \quad \frac{|\sigma_{1_k}|}{|\sigma_{6_k}|} > \frac{X_k}{S} = \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$$

$k = 2, 3$

związany jest z pękaniem osnowy. Po uwzględnieniu degradacji sztywności uszkodzonych warstw otrzymujemy następujący stan naprężenia w warstwach

$\sigma_1 =$	$\sigma_2 =$	$\sigma_6 =$																														
MPa	MPa	MPa																														
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 100px;"> <tr><th></th><th>1</th></tr> <tr><th>1</th><td>485,0</td></tr> <tr><th>2</th><td>-481,7</td></tr> <tr><th>3</th><td>-481,7</td></tr> <tr><th>4</th><td>485,0</td></tr> </table>		1	1	485,0	2	-481,7	3	-481,7	4	485,0	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 100px;"> <tr><th></th><th>1</th></tr> <tr><th>1</th><td>-9,4</td></tr> <tr><th>2</th><td>6,1</td></tr> <tr><th>3</th><td>6,1</td></tr> <tr><th>4</th><td>-9,4</td></tr> </table>		1	1	-9,4	2	6,1	3	6,1	4	-9,4	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 100px;"> <tr><th></th><th>1</th></tr> <tr><th>1</th><td><math>2,5 \cdot 10^{-14}</math></td></tr> <tr><th>2</th><td><math>9,5 \cdot 10^{-15}</math></td></tr> <tr><th>3</th><td><math>9,5 \cdot 10^{-15}</math></td></tr> <tr><th>4</th><td><math>1 \cdot 10^{-14}</math></td></tr> </table>		1	1	$2,5 \cdot 10^{-14}$	2	$9,5 \cdot 10^{-15}$	3	$9,5 \cdot 10^{-15}$	4	$1 \cdot 10^{-14}$
	1																															
1	485,0																															
2	-481,7																															
3	-481,7																															
4	485,0																															
	1																															
1	-9,4																															
2	6,1																															
3	6,1																															
4	-9,4																															
	1																															
1	$2,5 \cdot 10^{-14}$																															
2	$9,5 \cdot 10^{-15}$																															
3	$9,5 \cdot 10^{-15}$																															
4	$1 \cdot 10^{-14}$																															

który nie powoduje uszkodzenia pozostałych warstw. Dalsza analiza prowadzi do obciążenia, przy którym zniszczeniu ulegają włókna warstwy  $-45^\circ$ , a spowodowane jest to różnicą wytrzymałości na rozciąganie i ściskanie wzdłuż włókien. Obciążenie to jest równe 682 MPa. Naprężenia przedstawiają się następująco:

$\sigma_1 =$	$\sigma_2 =$	$\sigma_6 =$																														
MPa	MPa	MPa																														
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 100px;"> <tr><th></th><th>1</th></tr> <tr><th>1</th><td>1350,2</td></tr> <tr><th>2</th><td>-1311,9</td></tr> <tr><th>3</th><td>-1311,9</td></tr> <tr><th>4</th><td>1350,2</td></tr> </table>		1	1	1350,2	2	-1311,9	3	-1311,9	4	1350,2	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 100px;"> <tr><th></th><th>1</th></tr> <tr><th>1</th><td>-51,3</td></tr> <tr><th>2</th><td>13,0</td></tr> <tr><th>3</th><td>13,0</td></tr> <tr><th>4</th><td>-51,3</td></tr> </table>		1	1	-51,3	2	13,0	3	13,0	4	-51,3	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 100px;"> <tr><th></th><th>1</th></tr> <tr><th>1</th><td><math>3,6 \cdot 10^{-14}</math></td></tr> <tr><th>2</th><td><math>2,8 \cdot 10^{-14}</math></td></tr> <tr><th>3</th><td><math>2,8 \cdot 10^{-14}</math></td></tr> <tr><th>4</th><td><math>3,6 \cdot 10^{-14}</math></td></tr> </table>		1	1	$3,6 \cdot 10^{-14}$	2	$2,8 \cdot 10^{-14}$	3	$2,8 \cdot 10^{-14}$	4	$3,6 \cdot 10^{-14}$
	1																															
1	1350,2																															
2	-1311,9																															
3	-1311,9																															
4	1350,2																															
	1																															
1	-51,3																															
2	13,0																															
3	13,0																															
4	-51,3																															
	1																															
1	$3,6 \cdot 10^{-14}$																															
2	$2,8 \cdot 10^{-14}$																															
3	$2,8 \cdot 10^{-14}$																															
4	$3,6 \cdot 10^{-14}$																															

Przy tak prowadzonej analizie warstwa  $45^\circ$  pozostała nadal nieuszkodzona, jednak laminat uległ zniszczeniu,  $\sigma_{ULF} = 682$  MPa.

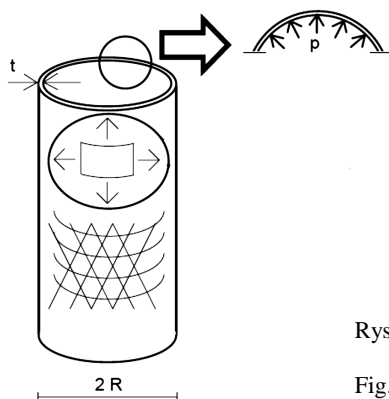
Warto zaznaczyć, że można tak dobrać konfigurację laminatu, przy której jego nośność na ścinanie nie będzie zależeć (lub będzie zależeć w niewielkim stopniu) od wytrzymałości warstwy na ścinanie.

### 2.3. Nośność rurki poddanej ciśnieniu wewnętrznemu

Rozważono również elementy obciążone wielokierunkowo. W przedstawionym w artykule przypadku poszukiwano nośności rurki obciążonej ciśnieniem wewnętrznym, wykonanej z kompozytu grafit/epoksyd, przy różnych konfiguracjach laminatu oraz przy zastosowaniu różnych kryteriów wytrzymałościowych dla warstwy. Jako kryterium nośności przyjęto uszkodzenie pierwszej warstwy. Promień rurki wynosi  $R = 4$  cm, grubość pojedynczej warstwy  $t = 0.15$  mm. Charakterystyki sztywnościowe, wytrzymałościowe i termiczne kompozytu są następujące:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= 88,53 \text{ GPa} & E_2 &= 6,72 \text{ GPa} & G_{12} &= 4,03 \text{ GPa} & \nu_{12} &= 0,28 \\
 X^T &= 1560 \text{ MPa} & X^C &= 1760 \text{ MPa} & Y^T &= 35,75 \text{ MPa} & Y^C &= 178,0 \text{ MPa} \\
 S &= 61,72 \text{ MPa} \\
 \alpha_1 &= 3,1 \cdot 10^{-7} \frac{1}{K} & \alpha_2 &= 3,1 \cdot 10^{-5} \frac{1}{K}
 \end{aligned}$$

Schemat rurki oraz przyłożonego obciążenia przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4. Schemat rurki obciążonej ciśnieniem wewnętrznym  
Fig. 4. Vessel under internal pressure

Temperatura laminowania wynosi  $120^\circ\text{C}$ , zaś temperatura eksploatacji  $20^\circ\text{C}$ . Analizę przeprowadzono z wykorzystaniem sześciu kryteriów wytrzymałościowych: maksymalnego naprężenia, maksymalnego odkształcenia, Azzi'ego-Tsaia-Hilla, Tsaia-Wu, Hoffmana oraz kryterium energetycznego [4]. Do wyznaczenia rozkładu sił wewnętrznych użyto klasycznych wzorów teorii powłok:

$$N_x = \frac{p \cdot R}{2}, \quad N_y = p \cdot R, \quad N_{xy} = 0, \quad M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_{xy} = 0$$

gdzie:

- $N_x$  – siła osiowa,
- $N_y$  – siła obwodowa,
- $p$  – ciśnienie wewnętrzne.

Wyniki obliczeń wykonanych według algorytmów autorów umieszczono w tabeli 3.

Rozważono laminaty sześć- i ośmiowarstwowe. Zauważyć można, że kryterium maksymalnego odkształcenia oraz kryterium energetyczne prognozują większe wartości obciążenia niszczącego. Widzimy również, że kryterium maksymalnego naprężenia, które nie uwzględnia interakcji naprężeń  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ , daje wartości porównywalne do kryteriów uwzględniających interakcję. W każdym przypadku kryterium Hoffmana szacuje najniższą wartość uszkodzenia pierwszej warstwy.

Największą wartość obciążenia niszczącego pierwszą warstwę dla laminatów sześćwarstwowych uzyskano dla konfiguracji  $[90/45/-45]_s$ , natomiast dla laminatów ośmiowarstwowych optymalną konfiguracją jest  $[54/-54/54/-54]_s$ . Układ odniesienia przyjęto w ten sposób, że oś  $0^\circ$  wyznaczana jest kierunkiem południkowym, a druga oś kierunkiem równoleżnikowym. Kąty odmierzane są zgodnie z ogólnie przyjętą zasadą od osi  $0^\circ$ .

Ciśnienie niszczące pierwszą warstwę w rozważanych konfiguracjach laminatu

Konfiguracja laminatu	Ciśnienie niszczące pierwszą warstwę ( <i>FPF</i> ) [MPa]					
	Kryterium wytrzymałościowe					
	maks. naprężenia	maks. odkształcenia	Azzi-Tsai-Hill	Tsai-Wu	Hoffman	energetyczne
[90/0/90] <sub>s</sub>	2,88	3,44	2,86	2,98	2,81	3,50
[54/-54/54] <sub>s</sub>	4,58	5,49	4,35	4,39	4,17	5,26
[90/45/-45] <sub>s</sub>	4,78	6,12	4,62	4,79	4,44	6,12
[0/60/-60] <sub>s</sub>	2,75	2,88	2,75	2,78	2,73	2,89
[90/150/30] <sub>s</sub>	3,27	3,75	3,13	3,14	3,02	3,61
[90/45/-45/0] <sub>s</sub>	3,44	3,50	3,44	3,45	3,43	3,51
[90/70/-70/0] <sub>s</sub>	4,16	5,01	4,14	4,31	4,06	5,10
[90/65/-65/0] <sub>s</sub>	4,17	4,87	4,16	4,30	4,09	4,94
[90/60/-60/0] <sub>s</sub>	4,11	4,63	4,11	4,22	4,06	4,68
[90 <sub>2</sub> /35/-35] <sub>s</sub>	5,45	6,79	5,30	5,49	5,13	6,81
[90 <sub>2</sub> /40/-40] <sub>s</sub>	5,75	7,33	5,62	5,87	5,44	7,45
[90 <sub>2</sub> /45/-45] <sub>s</sub>	5,19	6,17	5,14	5,34	5,04	6,27
[52/-52/52/-52] <sub>s</sub>	8,61	12,46	7,36	7,21	6,73	10,13
[54/-54/54/-54] <sub>s</sub>	7,98	11,07	7,41	7,58	6,98	10,53
[56/-56/56/-56] <sub>s</sub>	7,03	9,23	6,83	7,14	6,58	9,37

Warto zwrócić uwagę na różnice pomiędzy dwoma laminatami quasi-izotropowymi, [0/60/-60]<sub>s</sub> oraz [90/150/30]<sub>s</sub>. Pomimo iż macierz sztywności tarczowej jest taka sama w obydwu przypadkach (jest to własność laminatów quasi-izotropowych), to jednak naprężenia w poszczególnych warstwach są różne, co powoduje uszkodzenie pierwszej warstwy przy innym ciśnieniu. Powodem tego jest konfiguracja laminatu w przyjętym układzie współrzędnych oraz wpływ temperatury. Rezultaty obliczeń przy ustalonym ciśnieniu (2 MPa) przedstawiono poniżej. Przy pominięciu różnicy temperatur eksploatacji i laminacji dla obu konfiguracji otrzymano takie same odkształcenia powierzchni środkowej:

Odształcenia powierzchni środkowej ( $\Delta T = 0$ )

$$\begin{array}{cc}
 [0/60/-60]_s & [90/150/30]_s \\
 \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,167 \times 10^{-4} \\ 2,160 \times 10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,167 \times 10^{-4} \\ 2,160 \times 10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

jednak różne są naprężenia warstwowe:

$[0/60/-60]_s$ $\sigma_1 =$ <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr><th></th><th>1</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>50,1</td></tr> <tr><td>2</td><td>157,6</td></tr> <tr><td>3</td><td>157,6</td></tr> <tr><td>4</td><td>157,6</td></tr> <tr><td>5</td><td>157,6</td></tr> <tr><td>6</td><td>50,1</td></tr> </tbody> </table> MPa		1	1	50,1	2	157,6	3	157,6	4	157,6	5	157,6	6	50,1	$\Delta T = 0$ $\sigma_2 =$ <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr><th></th><th>1</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>15,6</td></tr> <tr><td>2</td><td>9,6</td></tr> <tr><td>3</td><td>9,6</td></tr> <tr><td>4</td><td>9,6</td></tr> <tr><td>5</td><td>9,6</td></tr> <tr><td>6</td><td>15,6</td></tr> </tbody> </table> MPA		1	1	15,6	2	9,6	3	9,6	4	9,6	5	9,6	6	15,6	$\sigma_6 =$ <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr><th></th><th>1</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td><math>2 \cdot 10^{-15}</math></td></tr> <tr><td>2</td><td>5,7</td></tr> <tr><td>3</td><td>-5,7</td></tr> <tr><td>4</td><td>-5,7</td></tr> <tr><td>5</td><td>5,7</td></tr> <tr><td>6</td><td><math>1 \cdot 10^{-15}</math></td></tr> </tbody> </table> MPa		1	1	$2 \cdot 10^{-15}$	2	5,7	3	-5,7	4	-5,7	5	5,7	6	$1 \cdot 10^{-15}$
	1																																											
1	50,1																																											
2	157,6																																											
3	157,6																																											
4	157,6																																											
5	157,6																																											
6	50,1																																											
	1																																											
1	15,6																																											
2	9,6																																											
3	9,6																																											
4	9,6																																											
5	9,6																																											
6	15,6																																											
	1																																											
1	$2 \cdot 10^{-15}$																																											
2	5,7																																											
3	-5,7																																											
4	-5,7																																											
5	5,7																																											
6	$1 \cdot 10^{-15}$																																											

$[90/150/30]_s$ $\sigma_1 =$ <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr><th></th><th>1</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>193,4</td></tr> <tr><td>2</td><td>85,9</td></tr> <tr><td>3</td><td>85,9</td></tr> <tr><td>4</td><td>85,9</td></tr> <tr><td>5</td><td>85,9</td></tr> <tr><td>6</td><td>193,4</td></tr> </tbody> </table> MPa		1	1	193,4	2	85,9	3	85,9	4	85,9	5	85,9	6	193,4	$\Delta T = 0$ $\sigma_2 =$ <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr><th></th><th>1</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>7,6</td></tr> <tr><td>2</td><td>13,6</td></tr> <tr><td>3</td><td>13,6</td></tr> <tr><td>4</td><td>13,6</td></tr> <tr><td>5</td><td>13,6</td></tr> <tr><td>6</td><td>7,6</td></tr> </tbody> </table> MPA		1	1	7,6	2	13,6	3	13,6	4	13,6	5	13,6	6	7,6	$\sigma_6 =$ <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr><th></th><th>1</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>2</td><td>-5,7</td></tr> <tr><td>3</td><td>5,7</td></tr> <tr><td>4</td><td>5,7</td></tr> <tr><td>5</td><td>-5,7</td></tr> <tr><td>6</td><td><math>3 \cdot 10^{-15}</math></td></tr> </tbody> </table> MPa		1	1	0	2	-5,7	3	5,7	4	5,7	5	-5,7	6	$3 \cdot 10^{-15}$
	1																																											
1	193,4																																											
2	85,9																																											
3	85,9																																											
4	85,9																																											
5	85,9																																											
6	193,4																																											
	1																																											
1	7,6																																											
2	13,6																																											
3	13,6																																											
4	13,6																																											
5	13,6																																											
6	7,6																																											
	1																																											
1	0																																											
2	-5,7																																											
3	5,7																																											
4	5,7																																											
5	-5,7																																											
6	$3 \cdot 10^{-15}$																																											

W przypadku uwzględnienia wpływu temperatury wyznaczone odkształcenia powierzchni środkowej są już różne, nawet jakościowo, i wynoszą:

Odształcenia powierzchni środkowej ( $\Delta T \neq 0$ )

$$\begin{aligned}
 [0/60/-60]_s & \quad [90/150/30]_s \\
 \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1,714 \times 10^{-4} \\ 1,277 \times 10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix} & \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,671 \times 10^{-4} \\ 1,815 \times 10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

a naprężenia w tym przypadku przedstawiają się następująco:

$[0/60/-60]_s$ $\sigma_1 =$ <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr><th></th><th>1</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>26,3</td></tr> <tr><td>2</td><td>148,7</td></tr> <tr><td>3</td><td>148,7</td></tr> <tr><td>4</td><td>148,7</td></tr> <tr><td>5</td><td>148,7</td></tr> <tr><td>6</td><td>26,3</td></tr> </tbody> </table> MPa		1	1	26,3	2	148,7	3	148,7	4	148,7	5	148,7	6	26,3	$\Delta T \neq 0$ $\sigma_2 =$ <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr><th></th><th>1</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>30</td></tr> <tr><td>2</td><td>23,1</td></tr> <tr><td>3</td><td>23,1</td></tr> <tr><td>4</td><td>23,1</td></tr> <tr><td>5</td><td>23,1</td></tr> <tr><td>6</td><td>30</td></tr> </tbody> </table> MPA		1	1	30	2	23,1	3	23,1	4	23,1	5	23,1	6	30	$\sigma_6 =$ <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr><th></th><th>1</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td><math>1 \cdot 10^{-15}</math></td></tr> <tr><td>2</td><td>1,2</td></tr> <tr><td>3</td><td>-1,2</td></tr> <tr><td>4</td><td>-1,2</td></tr> <tr><td>5</td><td>1,2</td></tr> <tr><td>6</td><td><math>4 \cdot 10^{-15}</math></td></tr> </tbody> </table> MPa		1	1	$1 \cdot 10^{-15}$	2	1,2	3	-1,2	4	-1,2	5	1,2	6	$4 \cdot 10^{-15}$
	1																																											
1	26,3																																											
2	148,7																																											
3	148,7																																											
4	148,7																																											
5	148,7																																											
6	26,3																																											
	1																																											
1	30																																											
2	23,1																																											
3	23,1																																											
4	23,1																																											
5	23,1																																											
6	30																																											
	1																																											
1	$1 \cdot 10^{-15}$																																											
2	1,2																																											
3	-1,2																																											
4	-1,2																																											
5	1,2																																											
6	$4 \cdot 10^{-15}$																																											

[90/150/30] <sub>s</sub>		$\Delta T \neq 0$		$\sigma_6 =$	
$\sigma_1 =$		$\sigma_2 =$		MPa	
	1		1		1
1	169,6	1	22	1	0
2	77,1	2	27,1	2	-10,3
3	77,1	3	27,1	3	10,3
4	77,1	4	27,1	4	10,3
5	77,1	5	27,1	5	-10,3
6	169,6	6	22	6	$4 \cdot 10^{-15}$

Zatem w przypadku laminatów quasi-izotropowych, pomimo ich makroskopowych własności sprężystych jak dla ciała izotropowego, stan naprężenia w warstwach zależy od orientacji laminatu w globalnym układzie współrzędnych.

### 3. Wnioski

W artykule przedstawiono wyniki numerycznych symulacji stopniowego uszkodzenia się laminatów kompozytowych o różnej konfiguracji warstw. Pokazano różnice występujące przy stosowaniu różnych kryteriów wytrzymałościowych oraz trzech wybranych sposobów degradacji sztywności. Pomimo że przy stosowaniu użytych w pracy metod degradacji obciążenie niszczące laminat prognozowane jest na zbliżonym poziomie, to jednak różnice występujące przy obciążeniach niszczących poszczególne warstwy mogą sięgać kilkudziesięciu procent. Przedstawiono ponadto różnice w zachowaniu się laminatów quasi-izotropowych w zależności od ich orientacji względem kierunków obciążenia, biorąc pod uwagę również wpływy termiczne.

### Literatura

- [1] Chang R.R., *Experimental and theoretical analyses of first-ply failure of laminated composite pressure vessels*, Composites Structures, 2000, Vol. 49, 237-243.
- [2] Craddock J.N., *Behavior of composite laminates after First-Ply-Failure*, Composites Structures, 1985, Vol. 3, 187-200.
- [3] German J., *Podstawy mechaniki kompozytów włóknistych*, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 1996.
- [4] Hebda M., *Zastosowanie energetycznego kryterium wyężeniowego do analizy wytrzymałościowej kompozytów włóknistych*, praca doktorska, Politechnika Krakowska, 2006.
- [5] Hoffman O., *The Brittle Strength on Orthotropic Materials*, Journal of Composites Materials, April 1967, 200-206.
- [6] Jones R.M., *Mechanics of Composite Materials*, Taylor & Francis, Inc., Philadelphia 1999.
- [7] Kam T.Y., Liu Y.W., Lee F.T., *First-ply failure strength of laminated composite pressure vessels*, Composite Structures, 1997, Vol. 38, No. 1-4, 65-70.

- [8] Liu K., Tsai S.W., *A progressive quadratic failure criterion for a laminate*, Composites Science and Technology, 1998, Vol. 58, 1023-1032.
- [9] Muc A., *Projektowanie kompozytowych zbiorników ciśnieniowych*, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 1999.
- [10] Tsai S.W., Wu E.M., *A General Theory of Strength for Anisotropic Materials*, Journal of Composites Materials, January 1971, 58-80.