

MAŁGORZATA JANUS-MICHALSKA\*, DOROTA JASIŃSKA\*\*

## ODPORNOŚĆ NA PĘKANIE AUKSETYCZNYCH MATERIAŁÓW KOMÓRKOWYCH O REGULARNEJ MIKROSTRUKTURZE

### FRACTURE TOUGHNESS OF AUXETIC CELLULAR MATERIALS WITH PERIODIC MICROSTRUCTURE

#### Streszczenie

Artykuł ma charakter obliczeniowy i dotyczy wyznaczania stałej materiałowej  $K_I$  charakteryzującej odporność na pękanie przy rozciąganiu określonej dla wybranej klasy materiałów komórkowych. Struktura szkieletu tworząca materiał efektywny o ujemnym współczynniku Poissona może mieć wpływ na koncentrację naprężeń w wierzchołkach szczeliny, stąd również na odporność tego materiału na pękanie. Obliczenia wskazują na zależność stałej  $K_I$  od parametrów geometrycznych mikrostruktury, za pomocą których można modelować efektywny materiał komórkowy o zadanych własnościach.

*Słowa kluczowe: materiał komórkowy o ujemnym współczynniku Poissona, odporność na pękanie kruche*

#### Abstract

The parametric study of the fracture toughness for auxetic cellular materials with respect to geometric microstructural parameters is performed. For given microstructure with brittle skeleton, cellular material toughness is represented by structural coefficient  $W_{str}$ . Numerical solutions leading to assessment of  $W_{str}$  are obtained by utilizing FEM system ABAQUS. Fracture toughness is presented as directional property of anisotropic cellular material.

*Keywords: auxetic cellular materials, fracture toughness, brittle fracture*

\* Dr inż. Małgorzata Janus-Michalska, Katedra Wytrzymałości Materiałów, Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska.

\*\* Dr inż. Dorota Jasińska, Instytut Mechaniki Budowli, Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska.

## 1. Wstęp

Materiały komórkowe stosowane są w nowoczesnych praktycznych zagadnieniach inżynierskich ze względu na własności mechaniczne zupełnie inne niż te, które charakteryzują materiał rodzimy, konstruujący szkielet komórkowy. Na własności te mają wpływ: charakterystyka materiału szkieletu oraz struktura wewnętrzna. Materiały można wybierać, natomiast strukturę możemy projektować na potrzeby wybranych własności mechanicznych, jeśli potrafimy przewidzieć pracę szkieletu i tym samym wskazać na klasę struktur tworzących materiał o żądanych własnościach. Jednym z często stosowanych materiałów rodzimych są sprężysto-krucho materiały ceramiczne. Materiały komórkowe lepiej pracują na obciążenia rozciągające niż na ściskanie (dla ściskania zachodzi zjawisko wyboczenia ścian szkieletu) i praktycznie stosuje się je do przenoszenia obciążeń rozciągających. Ważna staje się więc odpowiedź na pytanie, jaka jest odporność materiału komórkowego o zadanej strukturze szkieletowej na pękanie przy rozciąganiu. Z oczywistych względów dążymy do osiągnięcia jak najwyższej odporności.

Jak wiadomo, pękanie rozważane jest dla nieskończonego pasma ze szczeliną, w narożach której zachodzi koncentracja naprężeń [3]. Wśród materiałów komórkowych wyróżnia się pewną klasę materiałów tzw. auksetycznych, które charakteryzują się ujemnym współczynnikiem Poissona. Takie materiały mają tę własność, że w strefach spodziewanego spiętrzenia naprężeń może nastąpić zmiana tej koncentracji [19]. Na znaczną redukcję koncentracji naprężeń wskazują np. rozwiązania zagadnień kontaktowych z udziałem takich materiałów [5]. Stąd celowe staje się przebadanie tych materiałów ze względu na odporność na pękanie i porównanie z odpornością materiałów komórkowych o typowych strukturach szkieletu. Dla rozciągania określa ją stała materiałowa  $K_I$  – nazywana odpornością materiału na pękanie w warunkach płaskiego stanu odkształcenia, która jest wielkością charakteryzującą materiał.

Zagadnienia pękania materiałów komórkowych o strukturze periodycznej są tematem wielu prac, począwszy od prac Gibson i Ashby'ego [1], Gibson, Ashby'ego, Maiti [2], w których przez zastosowanie najprostszego modelu belkowego struktury wewnętrznej wyjaśniono własności auksetyczne materiału komórkowego. Wszelkie rozważania przeprowadzać można w dwóch skalach: mikro-struktury wewnętrznej, makro-efektywnego continuum, jakim jest materiał komórkowy.

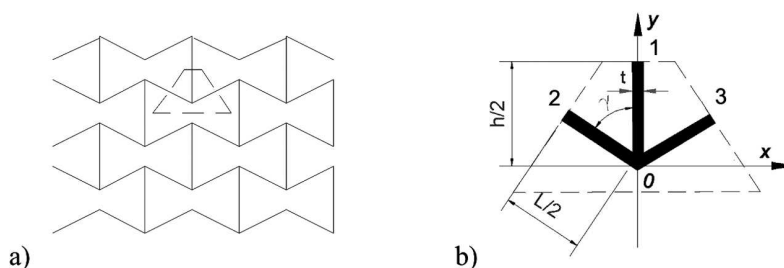
Najczęściej rozważanymi w literaturze typami struktur są: przestrzenne izotropowe piany [6], struktury płaskie tworzące kwadraty, trójkąty równoboczne i sześciokątne foremne. Dla takich też znane są rozwiązania. Rozwiązania analityczne zadań pękania w skali makro prezentuje Chen Ortiz [9] oraz Kabir, Saha [6]. W skali mikro najnowsze prace Ryvkina, Fuchsa [8, 17, 20] rozwiązują problem za pomocą transformat Fouriera. Dla dowolnych struktur możliwe są rozwiązania numeryczne MES. W mikroskali są to zadania o bardzo dużej liczbie stopni swobody, lecz pozwalające na szczegółową analizę pracy szkieletu i propagacji szczeliny lub powstawania pęknięć inicjowanych mikrodefektami struktury. Analiza taka ma docelowo prowadzić do sformułowania własności efektywnego continuum zastępczego, co prowadzi do rozwiązywania zadań o mniejszej liczbie stopni swobody dla zagadnień mechaniki z udziałem takich ośrodków. Dla badanych tu materiałów komórkowych analiza i obliczenia przeprowadzone są w skali mikro.

Celem pracy jest zbadanie zależności odporności na pękanie przy rozciąganiu dla auksetycznych materiałów komórkowych w zależności od parametrów mikrostruktury lub

cech efektywnego kontinuum i wskazanie, jak projektować tę strukturę w celu uzyskania jak najwyższej odporności. Dla porównania zacytowano wyniki dla mikrostruktur tworzących materiały o dodatnim współczynniku Poissona [17] i porównano ich odporność na pękanie ze strukturami tworzącymi materiały auksetyczne.

## 2. Materiały komórkowe o ujemnym współczynniku Poissona

Rozważany jest przestrzenny materiał komórkowy o płaskiej periodycznej strukturze szkieletu, jak na rys. 1a. W strukturze tej można wyodrębnić komórkę reprezentatywną (rys. 1b.), którą opisują cztery parametry geometryczne:  $L$ ,  $h$ ,  $t$ ,  $\gamma$ .



Rys. 1. a) Mikrostruktura, b) komórka elementarna  
Fig. 1.

Przyjęto sprężysto-kruchy materiał szkieletu o następujących danych:  $E_s$  – moduł Younga,  $\nu_s$  – współczynnik Poissona,  $R_m^s$  – granica wytrzymałości. Własności sprężyste tak zaprojektowanego materiału komórkowego, jako efektywnego continuum, w zależności od wskazanych parametrów geometrycznych i materiałowych mikrostruktury są tematem pracy [4]. Otrzymany materiał charakteryzuje anizotropia własności mechanicznych, w tym również współczynnika Poissona, który dla pewnych kierunków może przyjmować wartości ujemne.

Powyższą strukturę przestrzenną złożoną z płyt obciążoną w płaszczyźnie  $xy$ , pracującą w płaskim stanie odkształcenia można rozważać przez wycięcie plastra o jednostkowej grubości  $H$  w kierunku osi  $z$ . Pozwala to modelować strukturę elementami belkowymi o następujących sztywnościach:

$$\text{na rozciąganie: } C = \frac{E_s t H}{1 - \nu_s^2} = \frac{E_s A}{1 - \nu_s^2} \quad (1a)$$

$$\text{oraz sztywności giętej: } D = \frac{E_s t^3 H}{12(1 - \nu_s^2)} = \frac{E_s J}{(1 - \nu_s^2)}. \quad (1b)$$

gdzie:

- $A$  – pole przekroju belki tworzącej strukturę,
- $J$  – moment bezwładności na zginanie.

(Mnożnik  $\frac{1}{1 - \nu_s^2}$  pozwala przeskalować sztywność płytową na belkową).

### 3. Odporność na pękanie

Przy badaniu odporności na pękanie rozważamy nieskończone pasmo o strukturze modelowanej belkami sztywno połączonymi w węzłach, w którym znajduje się szczelina o długości  $2a$ , wygenerowana przez brakujące elementy belkowe. W praktyce przyjmuje się pasmo o szerokości  $2b$ , ze szczeliną o szerokości  $2a$ , które spełniają relację:

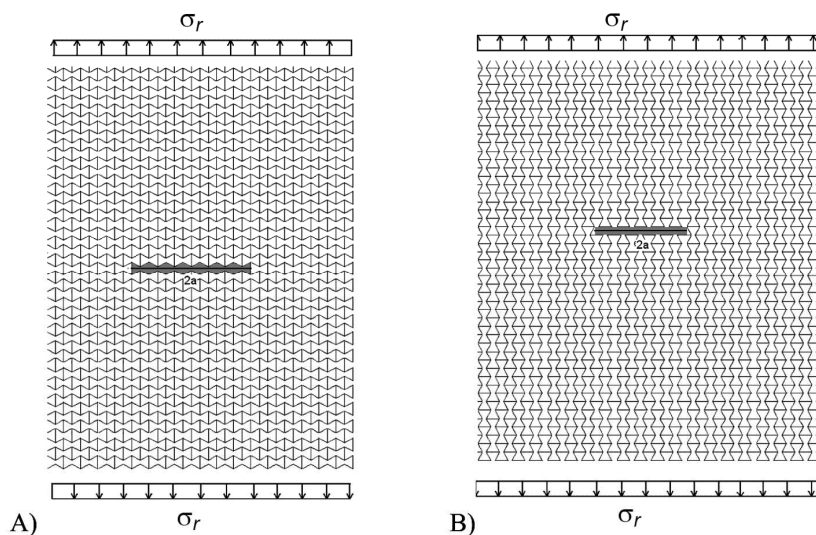
$$b \gg a \gg \max(L, h) \quad (2)$$

gdzie:

$L, h$  – wymiary geometryczne komórki.

Nierówność ta pozwala na potraktowanie pasma jako wystarczająco szerokie, aby uważać je za nieskończone oraz na pominięcie tzw. efektu skali.

Rozważane są dwa ułożenia mikrostruktury materiału względem kierunku rozciągania (rys. 2).



Rys. 2. Dwa ustawienia szczeliny względem mikrostruktury  
Fig. 2.

Odporność na pękanie jest podana przez naprężenie rozciągające  $\sigma_r = \sigma_{cr}$ , potrzebne do propagacji szczeliny. Odpowiada to pęknięciu kolejnych belek szkieletu najbliższej wierzchołka szczeliny. Warunek pęknięcia odpowiada osiągnięciu naprężeń dopuszczalnych dla materiału szkieletu we włóknach skrajnych belki w przekroju przywęzłowym.

$$\max(\sigma_x^s) = \frac{|N|}{A} + \frac{|M|}{J} \cdot \frac{t}{2} = R_m^s \quad (3)$$

gdzie:

$N$  – siła podłużna w belce szkieletu,

$M$  – moment zginający w przekroju przywęzłowym.

Warunek bezpiecznej pracy konstrukcji ma postać  $K < K_C$ . Dla tzw. I sposobu pęknięcia (ang. *mode*)  $K_I < K_{IC}$ , gdzie dla szczeliny centralnej o długości  $2a$ , w nieskończenie szerokim paśmie rozciągającym na kierunku prostopadłym spełniona jest zależność:

$$K_I = \sigma_{cr} \sqrt{\pi a} \quad (4)$$

Stała  $K_I$  nazywana odpornością na pęknięcie i charakteryzuje własności materiału niezależnie od wielkości szczeliny.

Odporność na pęknięcie materiału komórkowego o dowolnej strukturze szkieletu składającej się z belek smukłych tzn. spełniających warunek  $\frac{t}{\max(L_i)} \leq 0,1$ , można wyrazić ogólnym przybliżonym wzorem [8, 9]:

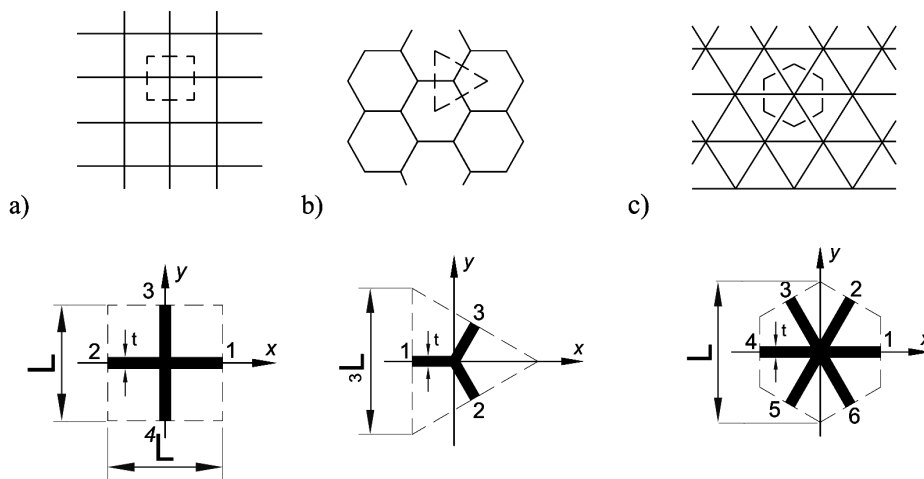
$${}^{str}K_I \cong W_{str} \cdot R_m^s \frac{t}{\sqrt{L}} \quad (5)$$

gdzie:

$W_{str}$  – współczynnik liczbowy zależny od typu mikrostruktury,

$R_m^s$  – naprężenie kruche pęknięcia materiału szkieletu.

Z literatury [8] znane są wartości współczynnika  $W_{str}$  dla struktur o równych długościach belek, pokazanych na rys. 3. Współczynniki te wynoszą kolejno:  ${}^aW_{str} = 0,68$ ,  ${}^bW_{str} = 0,1$ ,  ${}^cW_{str} = 1,5$ .



Rys. 3. Typowe struktury materiałów komórkowych wraz z zaznaczonymi parametrami geometrycznymi

Fig. 3.

Jeśli zdecydujemy się utrzymać postać formuły (5), a zadaną strukturę opisuje więcej parametrów geometrycznych, to współczynnik  $W_{str}$  będzie funkcją tych parametrów. Stąd spodziewać należy się, że każdy układ parametrów geometrycznych da materiał o innym współczynniku  $W_{str}$ .

Z porównania wzorów (4) i (5) otrzymujemy:

$$W_{str} \cong \frac{\sigma_{cr} \sqrt{\pi a} \cdot L}{R_m^s \cdot t} \quad (6)$$

gdzie wartość  $\sigma_{cr}$  otrzymamy z rozwiązań numerycznych.

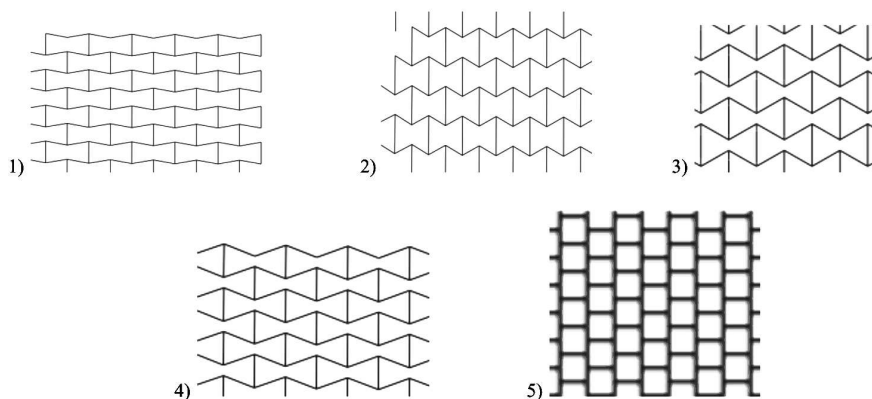
Odporność na pęknięcie przy rozciąganiu jest wielkością opisującą materiał komórkowy w skali makroskopowej, stąd można szukać zależności między  $W_{str}$ , a własnościami materiału w skali makro. Wskazanie na te zależności może dać przesłanki do odpowiedniego dobierania materiału. Jest cel niniejszych obliczeń.

#### 4. Modelowanie MES

Obliczenia wykonano z wykorzystaniem systemu ABAQUS do analizy MES. Strukturę wewnętrzną materiału modelowano elementami belkowymi. Zadanie pęknięcia pasma przeprowadzone jest iteracyjnie z zastosowaniem własnych kodów Autorki napisanych w programie FORTRAN. Po wykonaniu iteracji następuje generowanie danych dla kolejnej iteracji przez usuwanie elementów, w których osiągnięte jest naprężenie dopuszczalne wyznaczone wzorem (3). Analiza pasma o skończonych wymiarach prowadzi do nieco zaniżonych wartości  $K_I$  (błąd wartości kilku procent) na korzyść bezpieczeństwa przy oszacowaniu własności materiału.

#### 5. Wyniki obliczeń numerycznych

Do obliczeń przyjęto materiał szkieletu o następujących danych materiałowych:  $E_s = 10$  GPa,  $\nu_s = 0,3$ ,  $R_m^s = 10$  MPa. Dane te zaczerpnięto z literatury [21].



Rys. 4. Wybrane struktury materiałów komórkowych

Fig. 4.

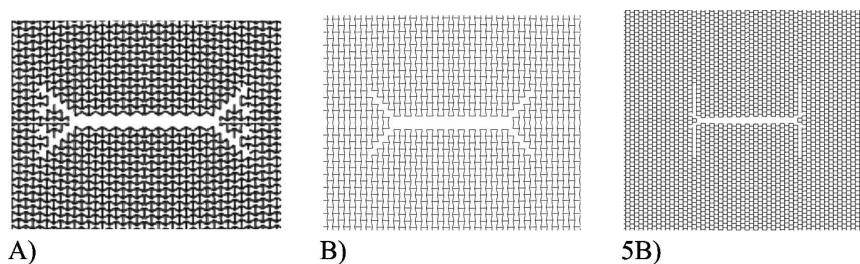
Parametry geometryczne wybranych mikrostruktur jak na rysunku 4 podane są w tabeli 1. Mikrostruktura 3) posiada parametry podane w pracy [21].

Tabela 1

## Parametry geometryczne badanych mikrostruktur

Struktura	L [mm]	h [mm]	$\gamma$	t [mm]
1)	1,5	1,5	80°	0,15
2)	1,5	3,0	60°	0,15
3)	3,0	4,0	60°	0,15
4)	3,15	3,15	70°	0,15
5)	1,5	3,0	90°	0,15

Wyniki analizy MES wskazują, że dla wszystkich wybranych struktur obserwuje się taki sam sposób propagacji szczeliny, jak przedstawiono na rysunku 5. Obserwuje się rozdawianie szczeliny w kierunkach podyktowanych topologią węzłów. Szczeliny propagują się ukośnie zarówno dla położenia A), jak i B) struktury względem kierunku rozciągania. W granicznym przypadku dla struktury 5) w położeniu B) szczeliny rozdawają się w kierunku prostopadłym do kierunku szczeliny początkowej. Typ mikrostruktury ma więc decydujący wpływ na kierunek i układ powstających szczelin i sposób ich propagacji.



Rys. 5. Sposób propagacji szczeliny A), B) i dla struktury 5 w ustawieniu B)  
Fig. 5.

Otrzymane wartości naprężenia  $\sigma_{cr}$  pozwoliły na obliczenie stałej  $K_I$  oraz współczynnika  $W_{str}$  dla kolejno badanych mikrostruktur.

Tabela 2

## Zestawienie makroskopowych własności materiałów auksetycznych o zadanych mikrostrukturach

Struktura	$\sigma_{cr}$ [kPa]	$W_{str}$	$K_I$ [MPa $\times$ m <sup>0,5</sup> ]	$E$ [kPa]
1A	9.47	0.0527	2.040	1.29
2A	11.29	0.0589	2.281	3.407
3A	2.65	0.0276	0.757	0.240
4A	2.11	0.0241	0.643	0.13
1B	30.4	0.1095	4.242	46.18
2B	6.88	0.0334	1.293	3.671
3B	3.59	0.0259	0.711	0.783
4B	5.78	0.0390	1.043	1.95
5B	37.9	0.4250	8.224	1250

Badanie zależności między własnościami makroskopowymi znanymi z pracy [4] a wartościami  $K_1$  i współczynnika strukturalnego, potwierdziło zależność tylko między modułem Younga na zadanym kierunku rozciągania a wielkościami charakteryzującymi materiał na pękanie. Wyniki te zestawiono w tabeli 2.

Nie można się doszukać wpływu ujemnej wartości współczynnika Poissona, poza faktem, że struktury tworzące materiały o takim współczynniku są bardzo podatne na deformację w porównaniu ze strukturami tworzącymi materiały o dodatnim współczynniku Poissona. Są one więc projektowane na zapotrzebowanie dużej deformowalności w zakresie sprężystym. Jak wykazuje powyższa analiza, materiały te cechuje niska wartość współczynnika strukturalnego, która wskazuje na niewielką odporność na pękanie. Współczynnik ten zależny jest od proporcji parametrów geometrycznych  $t/L$ ,  $t/h$  i kąta  $\gamma$ , stąd różne jego wartości.

Szczegółowa analiza pracy belek szkieletu wskazuje, że najlepsze rezultaty otrzymuje się w strukturach o mniejszym udziale stanów giętych, a takie można otrzymać dla struktur krępszych lub o kącie  $\gamma$  bliskich kąta prostego. W skali makro materiały o tych strukturach charakteryzują się większą wartością modułu Younga i współczynnikiem Poissona bliskim zero. Porównanie z typowymi strukturami wskazuje na podobieństwo do struktury *honeycomb*, która również charakteryzuje się wysoką podatnością, udziałem stanów giętych w pracy szkieletu, dużą wartością modułu Younga i współczynnika strukturalnego. Spostrzeżenia te potwierdzają lepsze własności struktury kwadratowej rys. 3a (korzystniejsze w ułożeniu równoległym, nieco gorsze w ułożeniu ukośnym pod kątem 45 stopni) i najlepsze dla struktury trójkątnej rys. 3c.

## 6. Wnioski

Przedstawione w niniejszym artykule wyniki wskazują na dość niską odporność materiałów komórkowych na pękanie przy rozciąganiu, przy czym materiały o ujemnym współczynniku Poissona są pod tym względem jeszcze słabsze od innych typowych materiałów komórkowych.

Wyniki obliczeń wskazują na prostą zależność między modułem Younga a współczynnikiem strukturalnym, charakteryzującym strukturę wewnętrzną materiału pod względem odporności na pękanie przy rozciąganiu. Wskazano na pracę szkieletu, która wpływa na odporność na pękanie.

Materiały auksetyczne mają tę wyróżniającą się własność, że mają dużą sztywność na ścinanie określaną modułem  $G$  w porównaniu ze sztywnością na deformację objętościową  $K$ . Wskazane zależności między własnościami sprężystymi materiału w skali makro a odpornością na pękanie sugerują, że celowe staje się sprawdzenie pod względem zwiększonej odporności struktur auxetycznych na pękanie przy ścinaniu.



## Literatura

- [1] Gibson L., Ashby M., *Cellular Materials. Structure and Properties*, Cambridge University Press, 1997.
- [2] Gibson L., Ashby M., Maiti S.K., *Fracture toughness of brittle cellular solids*, Scr. Metall., 18, 1984, 213-217.
- [3] German J., Biel-Gołaska M., *Podstawy i zastosowania mechaniki pękania w zagadnieniach inżynierskich*, Instytut Odlewnictwa, Kraków 2005.
- [4] Janus-Michalska M., *Micromechanical Model of Auxetic Cellular Materials*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 47, No. 4, 2009.
- [5] Jasińska D., Janus-Michalska M., *Material Design of Anisotropic Elastic Cellular Bodies with Respect to Contact Problem*, Engineering Transactions, Vol. 56, No. 3, 2008, 201-225.
- [6] Kabir M.E., Saha M.C., Jeelani S., *Tensile and fracture behaviour of polymer foams*, Materials Science and Engineering A, 429, 2006, 225-235.
- [7] Choi S., Sankar B., *A micromechanical model to predict the fracture toughness of cellular materials*, Int. Journal of Solids and Structures, 42, 2005, 1797-1817.
- [8] Lipperman F., Ryvkin M., Fuchs M., *Fracture toughness of two-dimensional cellular material with periodic microstructure*, Int. Journal of Fracture, 146, 2007, 279-290.
- [9] Chen J.Y., Huang Y., Ortiz M., *Fracture Analysis of Cellular Materials. A Strain Gradient Model*, Journal of Mechanics and Physics of Solids, Vol. 46, 5, 1998, 789-828.
- [10] Ryvkin M., Fuchs M., Lipperman F., Kucherov L., *Fracture Analysis of Materials with Periodic Microstructure by the Representative Cell Method*, Int. Journal of Fracture, 128, 2004, 215-221.
- [11] Andrews L.W., Gibson L., *The influence of cracks notches and holes on the tensile strength of cellular solids*, Acta Materialia, 49, 2001, 2975-2979.
- [12] Qiu X., Fleck N.A., *The damage tolerance of elastic-brittle, 2-D isotropic lattices*, Journal of Mechanics and Physics of Solids, 55, 2007, 562-588.
- [13] Fan H.L., Jin F.N., Fang D.N., *Mechanical properties of hierarchical cellular materials*, Part I: Analysis, Composites Science and Technology, 68, 2008, 3380-3387.
- [14] Huang J.S., Chiang M.S., *Effects of Microstructure, Specimen and Loading Geometries on  $K_{IC}$  of Brittle Honeycombs*, Engineering Fracture Mechanics, Vol 54, No 6, 1996, 813-821.
- [15] Alonso I.Q., Fleck N.A., *Damage tolerance of an elastic-brittle diamond celled honeycomb*, Scripta Materialia, 56, 2007, 693-696.
- [16] Chen C., Fleck N.A., Lu T.J. *The mode I crack resistance of metallic foams*, Journal of the Mechanics and Physics of solids, 49, 2001, 231-259.
- [17] Lipperman F., Fuchs M., Ryvkin M., *Stress localization and strength optimization of frame material with periodic microstructure*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg., 197, 2008, 4016-4026.
- [18] Minquez J.M., *Study of the fracture toughness by finite element methods*, Int J. of Solids and Structures, 37, 2000, 991-1001.

- [19] Lakes R.S., *Design considerations for negative Poisson's ratio materials*, ASME Journal of Mechanical Design, 115, 1993, 696-700.
- [20] Lipperman F., Fuchs M., Ryvkin M., *Nucleation of cracks in two-dimensional periodic cellular materials*, Comp. Mech., 39, 2007, 127-139.
- [21] Overaker D.W., Cuitino A.M., Langrana N.A., *Elastoplastic Micro-mechanical Modeling of Two-dimensional Irregular Convex and Nonconvex (Re-entrant) Hexagonal Foams*, Transactions of ASME, 65, 1998.