ŚRODOWISKO
CZASOPISMO TECHNICZNE
TECHNICAL TRANSACTIONS
ENVIRONMENTAL ENGINEERING
WYDAWNICTWO POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ
1-Ś/2009
ZESZYT 1
ROK 106
ISSUE 1
YEAR 106

WOJCIECH Z. CHMIELOWSKI*, RENATA URYGA**

SZCZEGÓLNA POSTAĆ WARUNKÓW BRZEGOWYCH W STEROWANIU OPTYMALNYM WIELOZBIORNIKOWYMI SYSTEMAMI WODNOGOSPODARCZYMI

A CERTAIN FROM OF BOUNDARY CONDITIONS IN OPTIMAL CONTROL OF A MULTI-RESERVOIR WATER MANAGEMENT SYSTEM

S t r e s z c z e n i e

Niniejszy artykuł zawiera sformułowanie i rozwiązanie problemu optymalizacyjnego dotyczącego sterowania odpływami z systemu zbiorników retencyjnych, które zaopatrują w wodę odbiorców. Uwzględnione zostały równania wiążące warunki początkowe i końcowe na trajektoriach stanów zbiorników, jak również swobodny czas rozpoczęcia lub zakończenia optymalizacji.

Słowa kluczowe: *gospodarka wodna*, *systemy wodnogospodarcze*, *sterowanie optymalne*

A b s t r a c t

The paper presents formulation and solution of the optimization problem relating to control of discharges from a system of storage reservoirs supplying water to several users. There were considered equations linking initial and final conditions on a trajectory of reservoirs' states as well as free moments of beginning and finishing the optimization process.

Keywords: *water management*, *water management systems*, *optimal control*

* Dr hab. inż. Wojciech Z. Chmielowski, prof. PK, Instytut Inżynierii i Gospodarki Wodnej, Wydział Inżynierii Środowiska, Politechnika Krakowska.
** Mgr inż. Renata Uryga, Wydział Inżynierii Środowiska, Politechnika Krakowska.

1. Wstęp

Lewe lub/i prawe warunki brzegowe na trajektoriach stanów mogą być swobodne, związane i ustalone. Czas optymalizacji może być ustalony oraz swobodny w odniesieniu do czasu zarówno rozpoczęcia, jak i zakończenia optymalizacji.

Pojęcie czasu swobodnego może odnosić się do przypadków poszukiwania:

– swobodnego czasu końcowego (nieustalonego optymalnego czasu zakończenia procesu optymalizacji, przy znanym czasie jej rozpoczęcia),
– swobodnego czasu początkowego (nieustalonego optymalnego czasu rozpoczęcia procesu optymalizacji, przy ustalonym czasie jej zakończenia),
– zależności między swobodnym czasem początkowym i swobodnym czasem końcowym.

W zagadnieniach wspomagania decyzji sterowania odpływami ze zbiorników wszystkie ww. przypadki swobodnego czasu z kombinacjami warunków brzegowych mają szerokie zastosowanie. Ze względu na rozliczne warianty warunków brzegowych nie bez znaczenia jest chwila rozpoczęcia lub/i zakończenia optymalizacji.

W niniejszym artykule przedstawione zostaną warianty optymalizacji pracy zbiorników ze swobodnym czasem optymalizacji w wypadku związanych warunków brzegowych.

2. Lewe i prawe warunki brzegowe zbiorników związane równaniem

Częstym przypadkiem, który może występować przy omawianiu zagadnień optymalizacyjnych dotyczących sterowania odpływami ze zbiorników, jest ten, kiedy zarówno warunki początkowe, jak i warunki końcowe wypełnień zbiorników muszą spełniać określone ograniczenia zapisane w postaci stosownych równań. W niniejszym artykule przedstawione zostanie najszersze rozwiązanie uwzględniające swobodny czas początkowy lub końcowy optymalizacji.

a) wskaźnik jakości (Problem Lagrange'a)

$$F = \int_{t_0}^{T^*} f_0(u(t), x(t), t)dt$$

gdzie:

t_0 – swobodny czas rozpoczęcia optymalizacji,

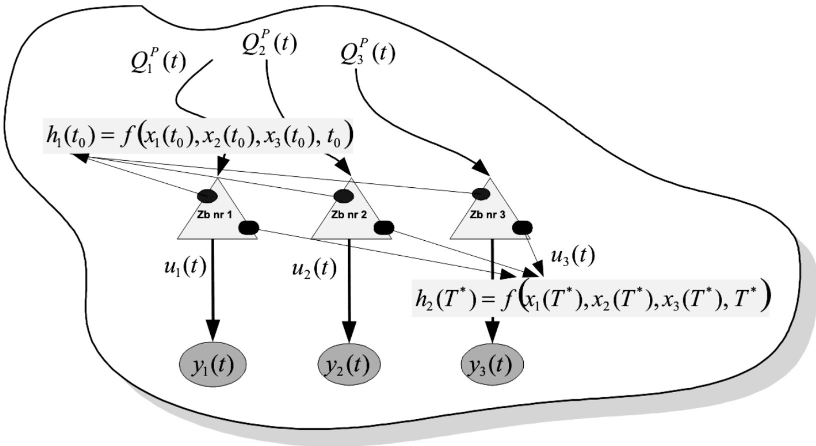
T^* – swobodny czas zakończenia optymalizacji,

w szczególności:

$$F = 0,5 \cdot \int_{t_0}^{T^*} \left\{ a_1 \cdot \left[y_1(t) - u_1(t) \right]_{(+)}^2 + a_2 \cdot \left[y_2(t) - u_2(t) \right]_{(+)}^2 + \left[y_3(t) - u_3(t) \right]_{(+)}^2 \right\} dt \qquad (1)$$

Sens fizyczny wskaźnika (1) sprowadza się do podsumowania kar powstałych w wyniku:

– różnicy za okres $[t_0, T^*]$ między wymaganymi funkcjami zapotrzebowania na wodę ze zbiorników nr 1, 2, 3, $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ a zrealizowanymi sterowaniami (odpływami ze zbiorników) $\hat{u}_1(t)$, $\hat{u}_2(t)$, $u_3(t)$ $\forall t \in [0, T]$.



Rys. 1. Rozpatrywany system wodnogospodarczy
Fig. 1. Water management system under consideration

b) równania stanów zbiorników mają postać

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1(t) = Q_1^P(t) - u_1(t) \qquad && x_{10} = x_1(t_0) \qquad && x_{1T} = x_1(T^*) \\
&\dot{x}_2(t) = Q_2^P(t) - u_2(t) && x_{20} = x_2(t_0) && x_{2T} = x_2(T^*) \\
&\dot{x}_3(t) = Q_3^P(t) - u_3(t) && x_{30} = x_3(t_0) && x_{3T} = x_3(T^*)
\end{aligned} \tag{2}$$

gdzie:

$x_1(t_0),\ x_2(t_0),\ x_3(t_0)$ – początkowa (zmienna z czasem rozpoczęcia optymalizacji) objętość wody w zbiornikach,

$x_1(T^*),\ x_2(T^*),\ x_3(T^*)$ – końcowa (zmienna z czasem zakończenia optymalizacji) objętość wody w zbiornikach,

$\dot{x}_1(t),\ \dot{x}_2(t),\ \dot{x}_3(t)$ – pochodna stanu zbiorników.

c) lewy warunek brzegowy na trajektorie stanów uzależniony od czasu początkowego t_0, np. w postaci

$$h_1(t_0):\quad d_1(t_0)\cdot x_1(t_0) + d_2(t_0)\cdot x_2(t_0) + d_3(t_0)\cdot x_3(t_0) - b_1(t) = 0 \tag{3}$$

d) prawy warunek brzegowy na trajektorie stanów uzależniony od czasu końcowego T^*, np. w postaci

$$h_2(T^*):\quad e_1(T^*)\cdot x_1(T^*) + e_2(T^*)\cdot x_2(T^*) + e_3(T^*)\cdot x_3(T^*) - b_2(T^*) = 0 \tag{4}$$

Rozwiązanie zadania optymalizacji.

Tworzymy funkcję Hamiltonian układu w postaci

$$H = -f_0 + \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{f}$$

$$H = -0,5 \cdot \left\{ a_1 \cdot \left[y_1(t) - u_1(t) \right]^2 + a_2 \cdot \left[y_2(t) - u_2(t) \right]^2 + a_3 \cdot \left[y_3(t) - u_3(t) \right]^2 \right\} + \\ + \eta_1(t) \cdot \left[Q_1^P(t) - u_1(t) \right] + \eta_2(t) \cdot \left[Q_2^P(t) - u_2(t) \right] + \eta_3(t) \cdot \left[Q_3^P(t) - u_3(t) \right] \tag{5}$$

gdzie $\eta_1(t), \eta_2(t), \eta_3(t)$ to zmienne sprzężone.

Układ równań dla funkcji Hamiltona przedstawia się następująco

$\boxed{\text{A.}}$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u_1(t)} \right)_{\hat{u},\hat{x},\hat{\eta}} = 0 \qquad a_1 \cdot \left[y_1(t) - \hat{u}_1(t) \right] - \hat{\eta}_1(t) = 0 \tag{6}$$

$$\hat{u}_1(t) = y_1(t) - \hat{\eta}_1(t) / a_1 \tag{7}$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u_2(t)} \right)_{\hat{u},\hat{x},\hat{\eta}} = 0 \qquad a_2 \cdot \left[y_2(t) - \hat{u}_2(t) \right] - \hat{\eta}_2(t) = 0 \tag{8}$$

$$\hat{u}_2(t) = y_2(t) - \hat{\eta}_2(t) / a_2 \tag{9}$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u_2(t)} \right)_{\hat{u},\hat{x},\hat{\eta}} = 0 \qquad a_3 \cdot \left[y_3(t) - \hat{u}_3(t) \right] - \hat{\eta}_3(t) = 0 \tag{10}$$

$$\hat{u}_3(t) = y_3(t) - \hat{\eta}_3(t) / a_3 \tag{11}$$

$\boxed{\text{B.}}$

$$-\left(\frac{\partial H}{\partial x_1(t)} \right)_{\hat{u},\hat{x},\hat{\eta}} = \dot{\hat{\eta}}_1(t) \qquad \dot{\hat{\eta}}_1(t) = 0 \Rightarrow \eta_1(t) = C_1 \tag{12}$$

$$-\left(\frac{\partial H}{\partial x_2(t)} \right)_{\hat{u},\hat{x},\hat{\eta}} = \dot{\hat{\eta}}_2(t) \qquad \dot{\hat{\eta}}_2(t) = 0 \Rightarrow \eta_2(t) = C_2 \tag{13}$$

$$-\left(\frac{\partial H}{\partial x_3(t)} \right)_{\hat{u},\hat{x},\hat{\eta}} = \dot{\hat{\eta}}_3(t) \qquad \dot{\hat{\eta}}_3(t) = 0 \Rightarrow \eta_3(t) = C_3 \tag{14}$$

$\boxed{\text{C.}}$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \eta_1(t)} \right)_{\hat{u},\hat{x}} = \dot{\hat{x}}_1(t) \qquad \dot{\hat{x}}_1(t) = Q_1^P(t) - \hat{u}_1(t) \tag{15}$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \eta_2(t)} \right)_{\hat{u},\hat{x}} = \dot{\hat{x}}_2(t) \qquad \dot{\hat{x}}_2(t) = Q_2^P(t) - \hat{u}_2(t) \tag{16}$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \eta_3(t)} \right)_{\hat{u},\hat{x}} = \dot{\hat{x}}_3(t) \qquad \dot{\hat{x}}_3\left(t\right) = Q_3^P(t) - \hat{u}_3(t) \tag{17}$$

Wariacja warunku początkowego (3) przyjmuje postać

$$\left(\frac{\partial h(t_0)}{\partial x_1(t)}\right)_{t=t_0}\cdot\delta x_1(t_0)+\left(\frac{\partial h(t_0)}{\partial x_2(t)}\right)_{t=t_0}\cdot\delta x_2(t_0)+ \\ +\left(\frac{\partial h(t_0)}{\partial x_3(t)}\right)_{t=t_0}\cdot\delta x_3(t_0)+\left(\frac{\partial h(t_0)}{\partial t}\right)_{t=t_0}\cdot\delta t_0=0$$

$$d_1(t_0)\cdot\delta x_1(t_0)+d_2(t_0)\cdot\delta x_2(t_0)+d_3(t_0)\cdot\delta x_3(t_0)+ \\ +\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial d_1(t_0)}{\partial t}\right)_{t=t_0}\cdot x_1(t_0)+\left(\frac{\partial d_2(t_0)}{\partial t}\right)_{t=t_0}\cdot x_2(t_0)+\\ +\left(\frac{\partial d_3(t_0)}{\partial t}\right)_{t=t_0}\cdot x_3(t_0)+\left(\frac{\partial b_1(t_0)}{\partial t}\right)_{t=t_0}\end{bmatrix}\cdot\delta t_0=0$$

Na podstawie powyższego równania różniczkę $\delta x_1(t_0)$ można zapisać jak następuje

$$\delta x_1(t_0)=-\frac{d_2(t_0)}{d_1(t_0)}\cdot\delta x_2(t_0)-\frac{d_3(t_0)}{d_1(t_0)}\cdot\delta x_3(t_0)+ \\ -\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial d_1(t_0)}{\partial t}\right)_{t=t_0}\cdot x_1(t_0)+\left(\frac{\partial d_2(t_0)}{\partial t}\right)_{t=t_0}\cdot x_2(t_0)+\\ +\left(\frac{\partial d_3(t_0)}{\partial t}\right)_{t=t_0}\cdot x_3(t_0)+\left(\frac{\partial b_1(t_0)}{\partial t}\right)_{t=t_0}\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{d_1(t_0)}\delta t_0=0$$

oraz warunek transwersalności dla lewego końca przedziału optymalizacji

$$\eta_1(t_0)\cdot\left\{\begin{array}{l}-\frac{d_2(t_0)}{d_1(t_0)}\cdot\delta x_2(t_0)-\frac{d_3(t_0)}{d_1(t_0)}\cdot\delta x_3(t_0)+\\ -\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial d_1(t_0)}{\partial t}\right)_{t=t_0}\cdot x_1(t_0)+\left(\frac{\partial d_2(t_0)}{\partial t}\right)_{t=t_0}\cdot x_2(t_0)+\\ +\left(\frac{\partial d_3(t_0)}{\partial t}\right)_{t=t_0}\cdot x_3(t_0)+\left(\frac{\partial b_1(t_0)}{\partial t}\right)_{t=t_0}\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{d_1(t_0)}\delta t_0\end{array}\right\}+ \\ +\eta_2(t_0)\cdot\delta x_2(t_0)+\eta_3(t_0)\cdot\delta x_3(t_0)=0$$

Po przegrupowaniu otrzymujemy

$$\left[-\eta_1(t_0)\cdot\frac{d_2(t_0)}{d_1(t_0)}+\eta_2(t_0)\right]\cdot\delta x_2(t_0)+\left[-\eta_1(t_0)\cdot\frac{d_3(t_0)}{d_1(t_0)}+\eta_3(t_0)\right]\cdot\delta x_3(t_0)+$$

$$-\eta_1(t_0)\cdot\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{\partial d_1(t_0)}{\partial t}\right)_{t=t_0}\cdot x_1(t_0)+\left(\dfrac{\partial d_2(t_0)}{\partial t}\right)_{t=t_0}\cdot x_2(t_0)+\\ +\left(\dfrac{\partial d_3(t_0)}{\partial t}\right)_{t=t_0}\cdot x_3(t_0)+\left(\dfrac{\partial b_1(t_0)}{\partial t}\right)_{t=t_0}\end{array}\right]\cdot\delta t_0 \Big/ d_1(t_0)=0$$

Różniczki $\delta x_2(t_0)$, $\delta x_3(t_0)$, $\delta t_0 \neq 0$ i $\eta_1(t_0)\neq 0$ oraz wg (12)–(14) $\eta_1(t_0)=C_1$, $\eta_2(t_0)=C_2$, $\eta_3(t_0)=C_3$, zatem

$$C_1=\frac{d_1(t_0)}{d_2(t_0)}\cdot C_2 \qquad C_1=\frac{d_1(t_0)}{d_3(t_0)}\cdot C_3 \tag{18}$$

$$\left(\frac{\partial d_1(t_0)}{\partial t}\right)_{t=t_0}\cdot x_1(t_0)+\left(\frac{\partial d_2(t_0)}{\partial t}\right)_{t=t_0}\cdot x_2(t_0)+$$
$$+\left(\frac{\partial d_3(t_0)}{\partial t}\right)_{t=t_0}\cdot x_3(t_0)+\left(\frac{\partial b_1(t_0)}{\partial t}\right)_{t=t_0}=0$$

Wariacja warunku końcowego (4) wynosi

$$\left(\frac{\partial h_2(T^*)}{\partial x_1(t)}\right)_{t=T^*}\cdot\delta x_1(T^*)+\left(\frac{\partial h_2(T^*)}{\partial x_2(t)}\right)_{t=T^*}\cdot\delta x_2(T^*)+$$
$$+\left(\frac{\partial h_2(T^*)}{\partial x_3(t)}\right)_{t=T^*}\cdot\delta x_3(T^*)+\left(\frac{\partial h_2(T^*)}{\partial t}\right)_{t=T}\cdot\delta T^*=0$$

$$e_1(T^*)\cdot\delta x_1(T^*)+e_2(T^*)\cdot\delta x_2(T^*)+e_3(T^*)\cdot\delta x_3(T^*)+$$
$$+\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{\partial e_1(T^*)}{\partial t}\right)_{t=T^*}\cdot x_1(T^*)+\left(\dfrac{\partial e_2(T^*)}{\partial t}\right)_{t=T^*}\cdot x_2(T^*)+\\ +\left(\dfrac{\partial e_3(T^*)}{\partial t}\right)_{t=T^*}\cdot x_3(T^*)+\left(\dfrac{\partial b_2(T^*)}{\partial t}\right)_{t=T^*}\end{array}\right]\cdot\delta T^*=0$$

$$\delta x_1(T^*) = -\frac{e_2(T^*)}{e_1(T^*)} \cdot \delta x_2(T^*) - \frac{e_3(T^*)}{e_1(T^*)} \cdot \delta x_3(T^*) + \\ - \left[\begin{array}{l} \left(\frac{\partial e_1(T^*)}{\partial t}\right)_{t=T^*} \cdot x_1(T^*) + \left(\frac{\partial e_2(T^*)}{\partial t}\right)_{t=T^*} \cdot x_2(T^*) + \\ + \left(\frac{\partial e_3(T^*)}{\partial t}\right)_{t=T^*} \cdot x_3(T^*) + \left(\frac{\partial b_2(T^*)}{\partial t}\right)_{t=T^*} \end{array} \right] \cdot \frac{1}{e_1(T^*)} \delta T^* = 0 \tag{19}$$

oraz warunek transwersalności dla prawego końca przedziału optymalizacji zapisujemy w postaci

$$-\eta_1(T^*) \cdot \left\{ \begin{array}{l} -\frac{e_2(T^*)}{e_1(T^*)} \cdot \delta x_2(T^*) - \frac{e_3(T^*)}{e_1(T^*)} \cdot \delta x_3(T^*) + \\ - \left[\begin{array}{l} \left(\frac{\partial e_1(T^*)}{\partial t}\right)_{t=T^*} \cdot x_1(T^*) + \left(\frac{\partial e_2(T^*)}{\partial t}\right)_{t=T^*} \cdot x_2(T^*) + \\ + \left(\frac{\partial e_3(T^*)}{\partial t}\right)_{t=T^*} \cdot x_3(T^*) + \left(\frac{\partial b_2(T^*)}{\partial t}\right)_{t=T^*} \end{array} \right] \cdot \frac{1}{e_1(T^*)} \delta T^* \end{array} \right\} + \\ -\eta_2(T^*) \cdot \delta x_2(T^*) - \eta_3(T^*) \cdot \delta x_3(T^*) = 0$$

Po przegrupowaniu otrzymujemy

$$\left[\eta_1(T^*) \cdot \frac{e_2(T^*)}{e_1(T^*)} - \eta_2(T^*)\right] \cdot \delta x_2(T^*) + \left[\eta_1(T^*) \cdot \frac{e_3(T^*)}{e_1(T^*)} - \eta_3(T^*)\right] \cdot \delta x_3(T^*) + \\ + \eta_1(T^*) \cdot \frac{\left[\begin{array}{l} \left(\frac{\partial e_1(T^*)}{\partial t}\right)_{t=T^*} \cdot x_1(T^*) + \left(\frac{\partial e_2(T^*)}{\partial t}\right)_{t=T^*} \cdot x_2(T^*) + \\ + \left(\frac{\partial e_3(T^*)}{\partial t}\right)_{t=T^*} \cdot x_3(T^*) + \left(\frac{\partial b_2(T^*)}{\partial t}\right)_{t=T^*} \end{array} \right] \cdot \delta T^*}{e_1(T^*)} = 0 \tag{20}$$

Różniczki $\delta x_2(T^*)$, $\delta x_3(T^*)$, $\delta T^* \neq 0$ i $\eta_1(T^*) \neq 0$ oraz wg (12)–(14) $\eta_1(T^*) = C_1$, $\eta_2(T^*) = C_2$, $\eta_3(T^*) = C_3$, zatem

$$C_1 = \frac{e_1(T^*)}{e_2(T^*)} \cdot C_2 \quad C_1 = \frac{e_1(T^*)}{e_3(T^*)} \cdot C_3 \tag{21}$$

$$\left(\frac{\partial e_1(T^*)}{\partial t}\right)_{t=T^*} \cdot x_1(T^*) + \left(\frac{\partial e_2(T^*)}{\partial t}\right)_{t=T^*} \cdot x_2(T^*) + \\ + \left(\frac{\partial e_3(T^*)}{\partial t}\right)_{t=T^*} \cdot x_3(T^*) + \left(\frac{\partial b_2(T^*)}{\partial t}\right)_{t=T^*} = 0 \tag{22}$$

Dodając równania (18) i (21), otrzymujemy

$$C_1 = \frac{C_2 \cdot \left[d_1(t_0) / d_2(t_0) + e_1(T^*) / e_2(T^*) \right]}{2} \\ C_1 = \frac{C_3 \cdot \left[d_1(t_0) / d_3(t_0) + e_1(T^*) / e_3(T^*) \right]}{2} \tag{23}$$

Równania (20)–(23) stanowią podstawę dalszego rozwiązania.

Wykorzystując (7), (9) i (11), otrzymujemy

$$\hat{u}_1(t) = y_1(t) - \hat{\eta}_1(t)/a_1$$

$$\hat{u}_2(t) = y_2(t) - \hat{\eta}_2(t)/a_2$$

$$\hat{u}_3(t) = y_3(t) - \hat{\eta}_3(t)/a_3$$

$$\hat{x}_1(T^*) = \int_{t_0}^{T^*} \left[Q_1^P(t) - y_1(t) \right] dt + \frac{C_1 \cdot (T^* - t_0)}{a_1} + x_1(t_0) \\ \hat{x}_2(T^*) = \int_{t_0}^{T^*} \left[Q_2^P(t) - y_2(t) \right] dt + \frac{C_2 \cdot (T^* - t_0)}{a_2} + x_2(t_0) \\ \hat{x}_3(T^*) = \int_{t_0}^{T^*} \left[Q_3^P(t) - y_3(t) \right] dt + \frac{C_3 \cdot (T^* - t_0)}{a_2} + x_3(t_0) \tag{24}$$

Dalszymi równaniami koniecznymi do rozwiązania przedstawionego zagadnienia są (3)

$$h_1(t_0): \quad d_1(t_0) \cdot x_1(t_0) + d_2(t_0) \cdot x_2(t_0) + d_3(t_0) \cdot x_3(t_0) - b_1(t) = 0$$

oraz (4)

$$h_2(T^*): \quad e_1(T^*) \cdot x_1(T^*) + e_2(T^*) \cdot x_2(T^*) + e_3(T^*) \cdot x_3(T^*) - b_2(T^*) = 0$$

Powiązanie pomiędzy swobodnym czasem początkowym t_0 i końcowym T^* wyliczamy, korzystając z warunku

$$H(t_0) - \left(\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}\right)_{t=t_0} = 0 \quad \text{lub} \quad H(T^*) - \left(\frac{\partial K(x,t)}{\partial t}\right)_{t=T^*} = 0$$

a ponieważ w rozpatrywanym przypadku we wskaźniku jakości nie występuje $K(x,t)$, zatem $H(t_0) = H(T^*) = 0$, czyli

$$\begin{aligned}
&-0,5 \cdot \left\{ \left[C_1 \cdot \left(T^* - t_0\right) / a_1 \right]^2 + \left[C_2 \left(T^* - t_0\right) / a_2 \right]^2 + \left[C_3 \cdot \left(T^* - t_0\right) / a_3 \right]^2 \right\} + \\
&+ \left[C_1 \cdot \left(T^* - t_0\right) / a_1 \right] \cdot \left[Q_1(T^*) - y_1(T^*) + C_1 \cdot \left(T^* - t_0\right) / a_1 \right] + \\
&+ \left[C_2 \cdot \left(T^* - t_0\right) / a_2 \right] \cdot \left[Q_2(T^*) - y_2(T^*) + C_2 \cdot \left(T^* - t_0\right) / a_2 \right] + \\
&+ \left[C_3 \cdot \left(T^* - t_0\right) / a_3 \right] \cdot \left[Q_3(T^*) - y_3(T^*) + C_3 \cdot \left(T^* - t_0\right) / a_3 \right] = 0
\end{aligned} \tag{25}$$

Przykład

Przyjmiemy następujące założenia:

– początkowe stany zbiorników związane równaniem

$$\left(2 + t_0\right) \cdot x_1(t_0) + \left(5 + t_0\right) \cdot x_2(t_0) + \left(6 - 0,5 \cdot t_0\right) \cdot x_3(t_0) - \left(60 + 2 \cdot t_0\right) = 0$$

– końcowe stany zbiorników związane równaniem

$$(20 - 0,5 \cdot T^*) \cdot x_1(T^*) + (20 - 0,8 \cdot T^*) \cdot x_2(T^*) + (40 - 2 \cdot T^*) \cdot x_3(T^*) - (200 + T^*) = 0$$

– dopływy do zbiorników

$$Q_1^P(t) = Q_2^P = Q_3^P = 1\,[\mathrm{m^3/s}]$$

– zapotrzebowanie na wodę poniżej zbiorników

$$y_1(t) = y_2(t) = y_3(t) = 2\,[\mathrm{m^3/s}]$$

– współczynniki wagi

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1$$

Wariacja warunku początkowego przyjmuje postać

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial h(t_0)}{\partial x_1(t)} \right)_{t=t_0} \cdot \delta x_1(t_0) + \left(\frac{\partial h(t_0)}{\partial x_2(t)} \right)_{t=t_0} \cdot \delta x_2(t_0) + \\
&+ \left(\frac{\partial h(t_0)}{\partial x_3(t)} \right)_{t=t_0} \cdot \delta x_3(t_0) + \left(\frac{\partial h(t_0)}{\partial t} \right)_{t=t_0} \cdot \delta t_0 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(2 + t_0\right) \cdot \delta x_1(t_0) + \left(5 + t_0\right) \cdot \delta x_2(t_0) + \left(6 - 0,5 \cdot t_0\right) \cdot \delta x_3(t_0) + \\
&+ \left[x_1(t_0) + x_2(t_0) - 0,5 \cdot x_3(t_0) - 2 \right] \cdot \delta t_0 = 0
\end{aligned}$$

Różniczka względem $x_1(t_0)$ przyjmuje postać

$$\delta x_1(t_0) = \frac{-\left(5+t_0\right)}{\left(2+t_0\right)}\cdot \delta x_2(t_0) - \frac{\left(6-0,5\cdot t_0\right)}{\left(2+t_0\right)}\cdot \delta x_3(t_0) + \frac{-\left[x_1(t_0)+x_2(t_0)-0,5\cdot x_3(t_0)-2\right]}{\left(2+t_0\right)}\cdot \delta t_0$$

Warunek transwersalności lewego końca przedziału przyjmuje postać

$$\eta_1(t_0)\cdot\left\{\begin{matrix}\dfrac{-\left(5+t_0\right)}{\left(2+t_0\right)}\cdot \delta x_2(t_0) - \dfrac{\left(6-0,5\cdot t_0\right)}{\left(2+t_0\right)}\cdot \delta x_3(t_0) + \\ \dfrac{-\left[x_1(t_0)+x_2(t_0)-0,5\cdot x_3(t_0)-2\right]}{\left(2+t_0\right)}\delta t_0\end{matrix}\right\} + \eta_2(t_0)\cdot \delta x_2(t_0) + \eta_3(t_0)\cdot \delta x_3(t_0) = 0$$

Po przegrupowaniu i przy założeniach

$$\delta x_2(t_0),\, \delta x_3(t_0),\, \delta t_0 \neq 0 \qquad \eta_1(t_0) = C_1 \neq 0,\ \eta_2(t_0) = C_2,\ \ \eta_3(t_0) = C_3$$

otrzymujemy

$$\begin{gathered} C_2 = C_1\cdot\left(\frac{5+t_0}{2+t_0}\right), \qquad C_3 = C_1\cdot\left(\frac{6-0,5\cdot t_0}{2+t_0}\right) \\ x_1(t_0)+x_2(t_0)-0,5\cdot x_3(t_0)-2=0 \end{gathered} \tag{26}$$

Wariacja warunku końcowego

$$\left(\frac{\partial h_2(T^*)}{\partial x_1(t)}\right)_{t=T^*}\cdot \delta x_1(T^*) + \left(\frac{\partial h_2(T^*)}{\partial x_2(t)}\right)_{t=T^*}\cdot \delta x_2(T^*) + \\ + \left(\frac{\partial h_2(T^*)}{\partial x_3(t)}\right)_{t=T^*}\cdot \delta x_3(T^*) + \left(\frac{\partial h_2(T^*)}{\partial t}\right)_{t=T}\cdot \delta T^* = 0$$

$$\left(20-0,5\cdot T^*\right)\cdot \delta x_1(T^*) + \left(20-0,8\cdot T^*\right)\cdot \delta x_2(T^*) + \left(40-2\cdot T^*\right)\cdot \delta x_3(T^*) + \\ + \left(-0,5\cdot x_1(T^*) - 0,8\cdot x_2(T^*) - 2\cdot x_3(T^*) - 10\right)\cdot \delta T^* = 0$$

Różniczka względem $x_1(T^*)$ przyjmuje postać

$$\delta x_1(T^*) = \frac{-\left(20-0,8\cdot T^*\right)}{\left(20-0,5\cdot T^*\right)}\cdot \delta x_2(T^*) - \frac{\left(40-2\cdot T^*\right)}{\left(20-0,5\cdot T^*\right)}\cdot \delta x_3(T^*) + \\ - \frac{\left(-0,5\cdot x_1(T^*) - 0,8\cdot x_2(T^*) - 2\cdot x_3(T^*) - 10\right)}{\left(20-0,5\cdot T^*\right)}\cdot \delta T^* = 0$$

Warunek transwersalności dla prawego końca przedziału przyjmuje postać

$$-\eta_1(T^*)\cdot\left[\begin{array}{l}\dfrac{-\left(20-0,8\cdot T^*\right)}{\left(20-0,5\cdot T^*\right)}\cdot\delta x_2(T^*)-\dfrac{\left(40-2\cdot T^*\right)}{\left(20-0,5\cdot T^*\right)}\cdot\delta x_3(T^*)+\\ -\dfrac{\left(-0,5\cdot x_1(T^*)-0,8\cdot x_2(T^*)-2\cdot x_3(T^*)-10\right)}{\left(20-0,5\cdot T^*\right)}\cdot\delta T^*\end{array}\right]+$$

$$-\eta_2(T^*)\cdot\delta x_2(T^*)-\eta_3(T^*)\cdot\delta x_3(T^*)=0$$

Następnie po przegrupowaniu i przy założeniach $\delta x_2(T^*),\delta x_3(T^*),\delta T^*\neq 0$ $\eta_1(T^*)=C_1\neq 0,\ \eta_2(T^*)=C_2,\ \eta_3(T^*)=C_3$ otrzymujemy

$$C_2=C_1\cdot\frac{\left(20-0,8\cdot T^*\right)}{\left(20-0,5\cdot T^*\right)}\cdot,\quad C_3=C_1\cdot\frac{\left(40-2\cdot T^*\right)}{\left(20-0,5\cdot T^*\right)} \tag{27}$$

$$-0,5\cdot x_1(T^*)-0,8\cdot x_2(T^*)-2\cdot x_3(T^*)-10=0$$

Dodając C_2 wg (26) z C_2 wg (27), otrzymujemy zależność między C_2 a C_1 w funkcji swobodnego czasu t_0,T^*

$$C_2=\frac{C_1}{2}\cdot\left[\left(\frac{5+t_0}{2+t_0}\right)+\frac{\left(20-0,8\cdot T^*\right)}{\left(20-0,5\cdot T^*\right)}\right] \tag{28}$$

Dodając C_3 wg (26) z C_3 wg (27), otrzymujemy zależność między C_3 a C_1 w funkcji swobodnego czasu t_0,T^*

$$C_3=\frac{C_1}{2}\cdot\left[\left(\frac{6-0,5\cdot t_0}{2+t_0}\right)+\frac{\left(40-2\cdot T^*\right)}{\left(20-0,5\cdot T^*\right)}\right] \tag{29}$$

Podstawienie parametrów zadania do równania (25) prowadzi do wyniku

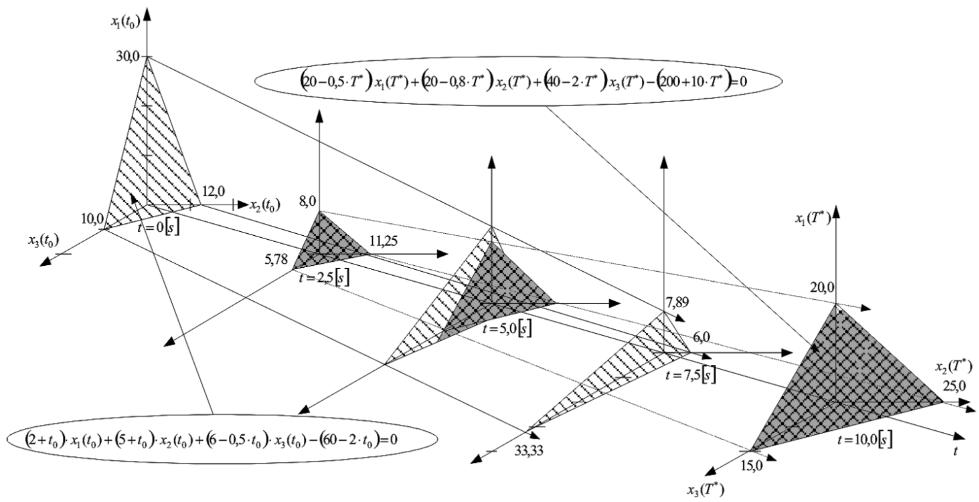
$$\begin{aligned}-0,5\cdot\left\{\left[C_1\cdot\left(T^*-t_0\right)\right]^2+\left[C_2\left(T^*-t_0\right)\right]^2+\left[C_3\cdot\left(T^*-t_0\right)\right]^2\right\}+&\\ +\left[C_1\cdot\left(T^*-t_0\right)\right]\cdot\left[-1+C_1\cdot\left(T^*-t_0\right)\right]+&\\ +\left[C_2\cdot\left(T^*-t_0\right)\right]\cdot\left[-1+C_2\cdot\left(T^*-t_0\right)\right]+&\\ +\left[C_3\cdot\left(T^*-t_0\right)\right]\cdot\left[-1+C_3\cdot\left(T^*-t_0\right)\right]=0&\end{aligned} \tag{30}$$

$$0,5\cdot\left[C_1^2+C_2^2+C_3^2\right]\cdot\left(T-2\right)-\left(C_1+C_2+C_3\right)=0$$

Komplet równań, które należy rozwiązać w celu otrzymania zależności między swobodnym czasem początkowym a swobodnym czasem końcowym, zestawiono poniżej

$$\begin{cases}
\left(2+\hat{t}_0\right)\cdot x_1(\hat{t}_0)+\left(5+\hat{t}_0\right)\cdot x_2(\hat{t}_0)+\left(6-0{,}5\cdot\hat{t}_0\right)\cdot x_3(\hat{t}_0)-\left(60+2\cdot\hat{t}_0\right)=0\\
x_1(\hat{t}_0)+x_2(\hat{t}_0)-0{,}5\cdot x_3(\hat{t}_0)-2=0\\
\left(20-0{,}5\cdot T^*\right)\cdot x_1(T^*)+\left(20-0{,}8\cdot T^*\right)\cdot x_2(T^*)+\left(40-2\cdot T^*\right)\cdot x_3(T^*)-\left(200+10\cdot T^*\right)=0\\
-0{,}5\cdot x_1(T^*)-0{,}8\cdot x_2(T^*)-2\cdot x_3(T^*)-10=0\\
C_2=\dfrac{C_1}{2}\cdot\left[\left(\dfrac{5+\hat{t}_0}{2+\hat{t}_0}\right)+\dfrac{\left(20-0{,}8\cdot T^*\right)}{\left(20-0{,}5\cdot T^*\right)}\right]\\
C_3=\dfrac{C_1}{2}\cdot\left[\left(\dfrac{6-0{,}5\cdot\hat{t}_0}{2+\hat{t}_0}\right)+\dfrac{\left(40-2\cdot T^*\right)}{\left(20-0{,}5\cdot T^*\right)}\right]\\
0{,}5\cdot\left[C_1^2+C_2^2+C_3^2\right]\cdot\left(T^*-2\right)-\left(C_1+C_2+C_3\right)=0\\
x_1(T^*)=x_1(\hat{t}_0)-\left(T^*-\hat{t}_0\right)+C_1\cdot\left(T^*-\hat{t}_0\right)\\
x_2(T^*)=x_2(\hat{t}_0)-\left(T^*-\hat{t}_0\right)+C_2\cdot\left(T^*-\hat{t}_0\right)\\
x_3(T^*)=x_3(\hat{t}_0)-\left(T^*-\hat{t}_0\right)+C_3\cdot\left(T^*-\hat{t}_0\right)
\end{cases} \tag{31}$$

W ramach ćwiczeń rachunkowych rozwiązanie układu równań algebraicznych (31) pozostawiamy czytelnikowi.



Rys. 2. Zmienność w czasie warunków brzegowych
Fig. 2. Time-dependant variability of boundary conditions

Nadmienić należy, że rozwiązanie układu równań określi zależność pomiędzy czasem początkowym a końcowym. Ustalając czas początkowy t_0, uzyskamy optymalny czas zakończenia procesu optymalizacji $\hat{T}^*$, jak również odwrotnie: ustalając czas zakończenia optymalizacji T^*, wyliczymy optymalny czas rozpoczęcia procesu optymalizacji $\hat{t}_0$.

W przykładzie przyjęto stosunkowo proste równania wiążące między sobą zarówno warunki początkowe, jak i końcowe, sprowadzające się wyłącznie do zależności liniowych. Obserwując schemat postępowania, łatwo zauważyć, że w miarę komplikacji ww. równań (nieliniowości, uwikłanie itp.) analityczne rozwiązanie problemu będzie stawało pod znakiem zapytania. Wówczas jedynym rozsądnym wyjściem jest stosowanie technik cyfrowych adekwatnych do pojawiającego się problemu.

3. Podsumowanie

W artykule przedstawiono zagadnienie optymalizacyjne dotyczące sterowania odpływami ze zbiorników. Przyjęto pewną klasę warunków brzegowych na trajektoriach stanów zbiorników oraz przedstawiono rozwiązanie w wypadku swobodnego czasu rozpoczęcia lub zakończenia procesu optymalizacji pracy zbiorników. Jak wspomniano, rozwiązanie dotyczy jedynie wybranej postaci warunków brzegowych, jednak sformułowania zawarte w rozdz. 2 pokazują, w jaki sposób można analizować zadania z dowolnie przyjętymi warunkami brzegowymi wynikającymi z zadań stawianych przed systemem współpracujących zbiorników.

Dodatkowe zestawienie dotychczasowych problemów z opcją dotyczącą swobodnego czasu trwania optymalizacji skutkuje rozwiązaniami o bardzo szerokim wachlarzu zastosowań praktycznych. Ustalenie optymalnego czasu rozpoczęcia optymalizacji w razie takiej konieczności lub ustalenie optymalnego czasu zakończenia procesu optymalizacji stanowi bardzo istotny element w sterowaniu systemami zbiornikowymi. Szeroką interpretację ww. problemów popartą licznymi przykładami znaleźć można w pracy [5].

Literatura

[1] Chmielowski W., *Symulacyjny model sterowania nadążnego zbiornikiem retencyjnym w obecności zakłóceń*, Czasopismo Techniczne, z. 2-Ś/2002, Wyd. PK, Kraków 2002.

[2] Chmielowski W., *Problemy optymalizacyjne w systemach wodnogospodarczych*, cz. 1: *Symulacyjny model sterowania nadążnego zespołem zbiorników retencyjnych*, Czasopismo Techniczne, z. 1-Ś/2003, Wyd. PK, Kraków 2003.

[3] Chmielowski W., *Problemy optymalizacyjne w systemach wodnogospodarczych*, cz. 2: *Zadanie optymalizacji dla uogólnionego systemu wodnogospodarczego o dowolnej strukturze połączeń*, Czasopismo Techniczne, z. 1-Ś/2003, Wyd. PK, Kraków 2003.

[4] Chmielowski W., *Ograniczenia stanu i sterowania jako element problemu optymalizacji pracy zbiornika retencyjnego*, Czasopismo Techniczne, z. 7-Ś/2003, Wyd. PK, Kraków 2003.

[5] C h m i e l o w s k i W., *Zastosowania optymalizacji w gospodarce wodnej*, Politechnika Krakowska, Kraków 2005.

[6] C h m i e l o w s k i W., *Czas obserwacji i rozmaitość warunków brzegowych na trajektoriach stanów, jako elementy optymalnego sterowania odpływami z systemu zbiorników retencyjnych*, Czasopismo Techniczne, z. 8-Ś/2005, Wyd. PK, Kraków 2005.

[7] F i n d e i s e n W., S z y m a n o w s k i J., W i e r z b i c k i A., *Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji*, PWN, Warszawa 1980.

[8] G ó r e c k i H., F u k s a S., K o r y t o w s k i A., M i t k o w s k i W., *Sterowanie optymalne w systemach liniowych z kwadratowym wskaźnikiem jakości*, PWN, Warszawa 1983.

[9] G ó r e c k i H., *Optymalizacja systemów dynamicznych*, PWN, Warszawa 1993.

[10] L a m b o r J., *Gospodarka wodna na zbiornikach retencyjnych*, Arkady, Warszawa 1962.

[11] S ł o t a H., *Dyspozytorskie sterowanie retencją wody w systemach wodnogospodarczych*, Arch. Hydrotechniki, t. 35, z. 1–2, 1988.

[12] S ł o t a H., *Operacyjne sterowanie retencją wody w zbiornikach z uwzględnieniem stanów końcowych*, Mon. Kom. Gospodarki Wodnej, z. 7, PAN, 1995.

[13] S ł o t a H., *Sterowanie wielozbiornikowymi systemami wodnogospodarczymi*, Warszawa 1983.