ŚRODOWISKO
CZASOPISMO TECHNICZNE
TECHNICAL TRANSACTIONS
ENVIRONMENTAL ENGINEERING
WYDAWNICTWO POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ
1-Ś/2009
ZESZYT 1
ROK 106
ISSUE 1
YEAR 106

PAWEŁ ŁUCZKIEWICZ*

ZASTOSOWANIE METODY SZKIELETU W OPTYMALIZACJI FUNKCJI WEKTOROWYCH W PRZESTRZENI $\mathfrak{R}^3$

APPLYING THE SKELETON METHOD TO OPTIMIZATION OF VECTOR FUNCTIONS IN $\mathfrak{R}^3$ SPACE

Streszczenie

W artykule przedstawiono algorytm wielokryterialnej optymalizacji, opisano i pokazano na wykresach zbiór Pareto dla kilku przykładowych zadań optymalizacji wielokryterialnej. Stosując metodę szkieletu, zilustrowano przecięcie zbioru Pareto i szkieletu. Wyznaczony punkt przecięcia jest rozwiązaniem optymalnym w zdefiniowanym przez decydenta zbiorze żądanym.

Słowa kluczowe: *optymalizacja wielokryterialna*, *metoda szkieletu*

Abstract

The paper summarizes the algorithm of multicriterion optimization. The Pareto set was formed and described for a few hypotheticals multicriterion optimization problems. The skeleton method was implemented and the intersection between the Pareto set and the skeleton was shown. The intersection point is the optimal solution within the set defined by a decision-maker.

Keywords: *multicriterion optimization*, *skeleton method*

* Mgr inż. Paweł Łuczkiewicz, Instytut Inżynierii i Gospodarki Wodnej, Wydział Inżynierii Środowiska, Politechnika Krakowska.

1. Wielokryterialna optymalizacja w sensie Pareto

W zagadnieniach praktycznych problemów optymalizacji bardzo często stajemy przed koniecznością uwzględnienia więcej niż jednego kryterium optymalizacji. Kryteria te są zazwyczaj sprzeczne ze sobą oraz na ogół nie są wzajemnie przeliczalne, wobec czego nie można ich sprowadzić do jednego kryterium skalarnego. W takich warunkach rozsądnym podejściem jest poszukanie optymalnego kompromisu.

Pojęcie kompromisu optymalnego pojawiło się w 1896 r. za sprawą ekonomisty Vilfreda Pareto, który ominął problem rozwiązywania zagadnień wielokryterialnych, wprowadzając współczynniki wagowe odpowiadające kolejnym kryteriom. W ten sposób dokonał skalaryzacji problemu wielokryterialnego, w której udział poszczególnych kryteriów wyrażony był przez poszczególne wagi. Takie podejście nie rozwiązało problemu, a tylko odsunęło trudności. Pozostał bowiem nadal nierozstrzygnięty problem z właściwym doborem współczynników wag, od którego uzależnione jest rozwiązanie [1, 2].

1.1. Sformułowanie zadania wielokryterialnej optymalizacji

Załóżmy, że dany jest n-wymiarowy wektor x poszukiwanych parametrów

$$x^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{bmatrix} \in \Re^n, \qquad n \in \aleph \tag{1}$$

który oceniany jest według m-wymiarowego $F(x)$ wektora kryteriów (funkcja celów)

$$\left[F(x)\right]^T = \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_m(x) \end{bmatrix} \in \Re^m, \qquad m \in \aleph \tag{2}$$

Rozważmy dla uproszczenia, że współrzędne wektora kryterialnego są funkcjami zysku. Wówczas problem optymalizacji wielokryterialnej może być definiowany jako zadanie wielokryterialnej maksymalizacji wektora zysków

$$\max_x F(x) \tag{3}$$

Warunek optymalności w sensie Pareto dla zadania wielokryterialnej maksymalizacji wektora funkcji zysku $F(x)$ można sformułować następująco: niech dane są dwa rozwiązania x_r, x_s, które mają odpowiednie wektorowe funkcje zysku $f(x_r)$, $f(x_s) \in \Re^m$. Wektor $f(x_r)$ jest częściowo mniejszy od wektora $f(x_s)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich współrzędnych zachodzi warunek

$$\forall_{i=1,2,\dots,m} f_i(x_r) \le f_i(x_s) \wedge \exists_i f_i(x_r) < f_i(x_s) \tag{4}$$

Rozwiązanie x_r jest wówczas zdominowane w sensie Pareto, jeżeli istnieje takie rozwiązanie x_s, którego wektor funkcji zysku $f(x_s)$ jest częściowo większy od $f(x_r)$. Rozwiązanie x_s, które nie jest zdominowane, nazywa się rozwiązaniem niezdominowanym lub optymalnym w sensie Pareto (Pareto-optymalnym, P-optymalnym).

Określając kryteria, przenosimy problem z przestrzeni parametrów do przestrzeni kryteriów, tzn. do układu, w którym współrzędnymi elementów są wartości poszczególnych kryteriów. Warto zauważyć, że elementy w przestrzeni kryteriów różniące się parametrami, ale o identycznych wartościach funkcji kryterialnych, są w przestrzeni kryteriów nierozróżnialne. Metoda szeregowania rozwiązań wg Pareto-optymalności pozwala zatem na przekształcenie ich wektorowych funkcji zysku na odpowiednie rangi skalarne, ale odwzorowanie to selekcjonuje jedynie zbiór Pareto-optymalnych rozwiązań i zwykle nie wskazuje na żadne konkretne (pojedyncze) rozwiązanie. Jest to cena, jaką płaci się za równoważne traktowanie poszczególnych kryteriów składowych wektorowej funkcji zysku. Natomiast projektant musi zastosować dodatkowe oszacowanie uzyskanych P-optymalnych rozwiązań.

1.2. Metody wyboru punktu ze zbioru Pareto [1]

Uogólniając zagadnienie optymalizacji jednokryterialnej, tj. poszukiwanie minimum (maksimum) funkcji kryterialnej względem wektora zmiennych decyzyjnych, w optymalizacji wielokryterialnej należałoby poszukiwać takiego wektora zmiennych decyzyjnych, przy którym jednocześnie wszystkie funkcje kryterialne (wektor funkcji kryterialnych) osiągałyby minimum (maksimum). Taki wektor zmiennych decyzyjnych nazywany jest punktem utopijnym i nadzwyczaj rzadko występuje w praktyce, zwykle bowiem każda z funkcji kryterialnych osiąga minimum (maksimum) przy innym wektorze zmiennych decyzyjnych.

Dla wektora funkcji (2) do zbioru Pareto należeć będą takie elementy x, dla których nie ma możliwości poprawienia wartości kryterium $f_i(x)$, $\forall i \in \Re$ bez konieczności pogorszenia nawet jednego z pozostałych kryteriów. Na tym tle widać, że metody optymalizacji wielokryterialnej powinny umożliwiać wybór wariantu ze zbioru Pareto zgodnie z preferencjami decydenta.

W niniejszym artykule będziemy się zajmować minimalizacją funkcji kryterialnych. Zadanie optymalizacji przyjmuje ogólnie postać

$$\min_x \left[f_1(x) \quad f_2(x) \quad \ldots \quad f_k(x) \right] \tag{5}$$

$$g_i(x) = 0 \qquad i = 1, \ldots, m_e$$

$$g_i(x) \le 0 \qquad i = m_{e+1}, \ldots, m$$

$$x_d \le x \le x_g$$

gdzie:

- $x^T = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_{m+n}]$ – zmienna niezależna, wektor zmiennych decyzyjnych, którego elementy należą do zbioru parametrów,
- $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ – funkcje kryterialne,
- $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x)$ – funkcje ograniczeń,
- x_d, x_g – dolne i górne ograniczenia na wartości zmiennych niezależnych.

Zbiór Pareto ma czytelną interpretację geometryczną: jest to fragment zbioru brzegu parametrów przedstawiony w przestrzeni kryteriów, niezasłonięty od strony minus nieskończoności przez inne elementy zbioru dla poszczególnych kryteriów. Definicję zbioru Pareto można zapisać następująco

$$x_P = \left\{ x : \forall \left(x^* \ne x \right) \left(\exists i : f_i(x) < f_i\left(x^*\right) \right) \right\} \tag{6}$$

Przedstawione dalej metody opisują wybór punktu ze zbioru Pareto.

1.2.1. Metoda sum ważonych

Najprostszą metodą rozwiązania zadania wielokryterialnego jest jego przekształcenie do standardowego zadania optymalizacji przez utworzenie funkcji celu będącej sumą ważoną wartości wskaźników

$$\min_{x} \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot f_i(x) \tag{7}$$

$$g_i(x) = 0 \qquad i = 1, ..., m_e$$

$$g_i(x) \le 0 \qquad i = m_{e+1}, ..., m$$

$$x_d \le x \le x_g$$

Interpretacja graficzna tej metody to poszukiwanie stycznej do zbioru Pareto nachylonej pod kątem określonym przez współczynniki a_i, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Wektor A utworzony przez współczynniki a_i jest prostopadły do poszukiwanej stycznej. Rozwiązaniem jest punkt wspólny (punkty wspólne) dla brzegu zbioru i stycznej.

Metoda sum ważonych oprócz ewidentnej zalety, jaką jest jej prostota, ma poważną wadę – nie pozwala wybrać dowolnego punktu ze zbioru Pareto.

Punkty leżące w „zagłębieniach" nigdy nie zostaną osiągnięte, ponieważ styczna nie ma możliwości dotarcia do nich, pozostając na punktach dalej wysuniętych.

1.2.2. Metoda programowania celowego

Najbardziej zaawansowaną metodą rozwiązywania zadań wielokryterialnych jest metoda programowania celowego, polegająca na zastąpieniu zadania wielokryterialnego zadaniem optymalizacji postaci

$$\min_{x,y} y \tag{8}$$

$$f_1(x) - w_1 \cdot y \le c_1$$

$$\ldots,$$

$$f_p(x) - w_p \cdot y \le c_p$$

$$g_i(x) = 0 \qquad i = 1, ..., m_e$$

$$g_i(x) \le 0 \qquad i = m_{e+1}, ..., m$$

$$x_d \le x \le x_g$$

gdzie:

$w_1, w_2, \ldots, w_p$ – współrzędne wektora w określającego kierunek poszukiwań,
$c_1, c_2, \ldots, c_p$ – współrzędne wektora c określającego cel poszukiwań.

Przekształcenie to prowadzi do poszukiwań punktu ze zbioru rozwiązań dopuszczalnych, w którym wartości kryteriów są najbliższe pewnym idealnym (często nieosiągalnym) wartościom określonym przez współrzędne $c_1, c_2, \ldots, c_p$ wektora c. Przeszukiwana jest przestrzeń kryteriów, rozpoczynając od punktu odpowiadającego idealnym wartościom kryteriów w kierunku określonym przez wektor współrzędnych $w_1, w_2, \ldots, w_p$. Wybór współrzędnych punktu c stanowi formę określenia przez decydenta „satysfakcjonującego rozwiązania”, a dobór elementów wektora w określa stopień ważności dla decydenta poszczególnych kryteriów.

Przez dowolny wybór punktu c metoda programowania celowego pozwala osiągnąć dowolny punkt ze zbioru Pareto oraz zapewnia dość naturalny sposób określenia parametrów, dzięki którym możliwe jest wybranie pojedynczego rozwiązania ze zbioru Pareto.

Interpretacja graficzna metody programowania celowego jest bardzo prosta. Jeżeli współrzędne wektora $c = [c_1\ c_2]^T$ odpowiadają satysfakcjonującemu rozwiązaniu, a współczynnik kierunkowy prostej wynika z przyjętych współczynników wektora w ($\mathrm{tg}\,\alpha = w_1/w_2$), wówczas równanie prostej przechodzącej przez punkt c o współczynniku kierunkowym $\mathrm{tg}\,\alpha = w_1/w_2$ ma postać: $y = (w_2/w_1)\,x + (c_2 - c_1\,(w_2/w_1))$.

Rozwiązaniem zadania jest punkt wspólny prostej i zbioru Pareto, którą to zależność można zapisać następująco

$$f_2(x) = \frac{w_2}{w_1} \cdot f_1(x) + \left(c_2 - c_1 \cdot \frac{w_2}{w_1}\right) \tag{9}$$

2. Metoda szkieletu [1, 2]

Rozwiązaniem zadania optymalizacji wielokryterialnej może być każdy z punktów zbioru Pareto. Wybór punktu będącego rozwiązaniem zadania zależy od decydenta i od zastosowanej metody wyboru.

Przedstawiony poniżej algorytm będzie się opierał na bardzo interesującej, a zarazem przystępnej metodzie szkieletu, którą opisał w swojej książce profesor Henryk Górecki [2].

2.1. Podstawowe definicje i sformułowania

Metoda postępowania dotycząca wyboru punktu ze zbioru Pareto opiera się na kilku definicjach i określeniach, których opisanie jest niezbędne.

Definicja 1

Zbiór żądany Q to iloczyn kartezjański przedziałów domkniętych i ograniczonych $[q^l_i, q^u_i]$

$$Q = \mathop{X}_{i=1}^{n} \left[q_i^l, \quad q_i^u \right] \tag{10}$$

gdzie q^l_i, q^u_i to – odpowiednio – dolny i górny poziom aspiracji, czyli dolna i górna wartość kryteriów zaakceptowanych przez decydenta.

Definicja 2

Brzegiem zbioru Q nazywamy

$$\partial Q = Q - \operatorname{int} Q \tag{11}$$

gdzie $\operatorname{int} Q$ to wnętrze zbioru Q.

Definicja 3

Szkielet S_Q jest podzbiorem zbioru Q i stanowi zbiór punktów o następujących właściwościach:

1) punkty szkieletu są lokalnie równo oddalone od brzegu zbioru ∂Q. Zależność tę można formalnie zapisać w postaci

$$S_Q = \left\{ q \in Q : \exists x \in \partial Q_i, \quad \exists y \in \partial Q_j, \quad i \neq j : \|q - x\| = \|q - y\| = \min_{p \in \partial Q} \|q - p\| \right\} \tag{12}$$

2) punkty szkieletu określają linię łamaną, której punkty początkowy i końcowy mają – odpowiednio – współrzędne $[q^l_i, q^u_i]$, $i = 1, \ldots, n$.

2.2. Konstrukcja szkieletu

Aby dokładnie objaśnić konstrukcję szkieletu, należy umiejscowić go w przestrzeni trójwymiarowej, ale będzie to słuszne również dla przestrzeni n-wymiarowej. Zawężenie na wstępie zakresu problematyki do przestrzeni dwuwymiarowej pozbawia wskazówek dotyczących istotnego faktu, jakim jest budowa szkieletu przy zmniejszającej się z każdym krokiem postępowania wymiarowości problemu.

Przyjmijmy zatem przestrzeń trójwymiarową $n = 3$. Przede wszystkim należy określić zbiór żądany, który (jak zostało powiedziane w definicji 1) jest iloczynem kartezjańskim dolnych i górnych wymagań w każdym z kierunków przestrzeni

$$Q = \mathop{X}_{i=1}^{3} \left[q_i^l, \quad q_i^u \right] = \mathop{X}_{i=1}^{3} \left[f_i^{\text{dolne}}(x), \quad f_i^{\text{górne}}(x) \right] \tag{13}$$

o wierzchołkach A^0, A^5 określonych przez

$$A^0\left(q_1^0, \quad q_2^0, \quad q_3^0\right) = A^0\left[f_1^{\text{dolne}}(x), \quad f_2^{\text{dolne}}(x), \quad f_3^{\text{dolne}}(x) \right]$$

$$A^5\left(q_1^5, \quad q_2^5, \quad q_3^5\right) = A^0\left[f_1^{\text{górne}}(x), \quad f_2^{\text{górne}}(x), \quad f_3^{\text{górne}}(x) \right]$$

Zgodnie z definicją 3 znajdujemy współrzędne pozostałych punktów szkieletu

$$A^j, \quad j = 1, \ \ldots, \ 2n - 2; \quad \text{dla} \quad n = 3, \quad j = 1, \ 2, \ 3, \ 4$$

W tym celu przyjmijmy kierunek redukcji przestrzeni d_i określony następującą formułą

$$d_i = 0,5 \cdot \left(q_i^u - q_i^l \right) \quad i = 1, \ \ldots, \ n \tag{14}$$

dla $n = 3$

$$d_i = 0,5 \cdot \left(f_i^{\text{górne}}(x) - f_i^{\text{dolne}}(x) \right) \quad i = 1, \ 2, \ 3$$

Punkty lokalne równo oddalone od brzegów zbioru Q tworzą linię łamaną zaczynającą się w punkcie $A^0(q^0{}_1, q^0{}_2, q^0{}_3)$ i dochodzącą do punktu $A^1(q^1{}_1, q^1{}_2, q^1{}_3)$. Segment A^0A^1 jest przekątną sześcianu, której długość jest równa

$$l_1 = \min_{i=1,\ldots,n} d_i \tag{15}$$

w szczególności dla przestrzeni $n = 3$

$$l_1 = \min_{i=1,2,3} d_i$$

Przyjmujemy kierunek r_1 w przestrzeni kryteriów i oznaczamy $l_1 = d_{r_1}$. Punkt $A^2(q^2{}_1, q^2{}_2, q^2{}_3)$ znajdujemy podobnie z warunku

$$l_2 = \min_{i=2,\ldots,n} d_i$$

w szczególności dla przestrzeni $n = 3$

$$l_2 = \min_{i=2,3} d_i$$

Z każdym krokiem eliminujemy w ten sposób jeden wymiar przestrzeni i przechodzimy do przestrzeni kolejno o jeden wymiar mniejszej.

Szkielet składa się z $2n - 1$ segmentów tworzących linię łamaną łączącą dwa punkty na antypodach A^0 i A^{2n-1} żądanego zbioru Q w n-wymiarowej przestrzeni kryteriów. Dla przestrzeni $n = 3$ antypody to punkty A^0 i A^5.

Na podstawie definicji i konstrukcji szkieletu możemy sformułować jego następujące właściwości:

1. Współrzędne dowolnego punktu należącego do szkieletu zależą tylko od A^0 i przyrostów d_i. Decydent nie potrzebuje żadnej innej informacji, która zmuszałaby go do określania preferencji w przestrzeni kryteriów dla danego problemu.
2. Szkielet S_Q jest zbiorem, do którego należą uporządkowane w przestrzeni kryteria składające się z punktów takich, że jeśli

$$\forall X, Y \in S_Q: \quad X(q_1^X, \ldots, q_n^X), \quad Y(q_1^Y, \ldots, q_n^Y), \quad q_i^X \geq q_i^Y \tag{16}$$

   dla $i = 1, 2, \ldots, n$, to co najmniej dla jednego z nich nierówność ta jest mocna.
3. Biorąc pod uwagę założoną (lecz zwykle niepewną) dolną i górną aproksymację kryteriów, wprowadzamy dodatkowe kryterium, czyli preferencję opartą na właściwości szkieletu: równe oddalenie od brzegów zbioru żądanego.

Tę ostatnią własność można nazwać preferencją opartą na „zasadzie bezpieczeństwa”, która mówi, że w zbiorze rozwiązań kompromisów optymalnych najbardziej bezpieczne z punktu widzenia sperturbowanego brzegu ∂Q zbioru żądanego Q jest rozwiązanie leżące na szkielecie.

2.3. Obliczanie najlepszego rozwiązania kompromisowego w przestrzeni kryteriów

Idea szukania najlepszego rozwiązania jest oparta na następującej koncepcji optymalności.

Definicja 4

Punkt $\hat{u}$ jest najbardziej bezpiecznym rozwiązaniem optymalno-kompromisowym w sensie metody szkieletu, jeśli decyzja $\hat{u}$ jest Pareto-optymalna, a punkt $q(\hat{u})$ należy do szkieletu S_Q. Tak więc punkt przecięcia dwu zbiorów:
– zbioru optymalnych kompromisów (zbiór Pareto),
– szkieletu,
daje najlepsze rozwiązanie q.

Może się zdarzyć, że szkielet nie ma wspólnego punktu ze zbiorem żądanym. Wówczas najbezpieczniejszym rozwiązaniem w sensie szkieletu jest punkt należący do brzegu ∂Q zbioru żądanego Q i najbliższy brzegowi Pareto.

3. Algorytm optymalizacji wielokryterialnej opartej na metodzie szkieletu

3.1. Opis algorytmu

Algorytm optymalizacji wielokryterialnej opartej na metodzie szkieletu został opracowany z następującymi ograniczeniami w przestrzeni:

1) trzy funkcje kryterialne $\left[F(x)\right] = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{bmatrix}$,

2) dwuelementowy wektor zmiennych decyzyjnych $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

Z powyższego wynika, że będziemy się zajmować optymalizacją trójkryterialną przy dwuelementowym wektorze parametrów.

Przyjmujemy następnie, że poszczególne kryteria mają zostać zminimalizowane, zatem zadanie optymalizacji będzie miało postać

$$\min_x \left[f_1(x) \quad f_2(x) \quad f_3(x) \right] \tag{17}$$

$$x_d \le x \le x_g$$

$$x \ge 0$$

gdzie:

$x^T = [x_1\ x_2]$ – zmienna niezależna – wektor zmiennych decyzyjnych, którego elementy należą do zbioru parametrów,

$f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ – funkcje kryterialne,

x_d, x_g – dolne i górne ograniczenie na wartości zmiennych niezależnych.

Jako kryteria porównawcze przyjęto funkcje kryterialne postaci

$$f_1(x) = (a_1 - x_1)^2 + (a_2 - x_2)^2 + a_3$$

$$f_2(x) = (b_1 - x_1)^2 + (b_2 - x_2)^2 + b_3$$

$$f_3(x) = (c_1 - x_1)^2 + (c_2 - x_2)^2 + c_3$$

Najprostszy i jednocześnie jako pierwszy nasuwający się pomysł, aby dodać do siebie kryteria, jest możliwy tylko wówczas, jeżeli da się przeliczyć jednostki poszczególnych funkcji kryterialnych jedne na drugie. Przyjmujemy jednak, że taki wypadek nie zachodzi, zatem zadanie decyzyjne jest następujące: znaleźć taki wektor zmiennych decyzyjnych $x^T = [x_1\ x_2]$, przy którym uzyskamy jednocześnie $\min_{x} f_1(x)$, $\min_{x} f_2(x)$ oraz $\min_{x} f_3(x)$.

Jak to zostało wcześniej powiedziane, taki punkt w praktyce nie istnieje, ponieważ każda z funkcji kryterialnych osiąga minimum przy innym wektorze zmiennych decyzyjnych.

Pierwszym krokiem, jaki należy wykonać, jest przeniesienie problemu z przestrzeni parametrów do zbioru kryteriów, tzn. do układu, w którym współrzędnymi elementów są wartości poszczególnych funkcji kryterialnych.

Następnie należy wyodrębnić z przestrzeni kryteriów zbiór wariantów optymalnych w sensie Pareto. W naszym zadaniu optymalizacyjnym zbiorem Pareto będzie taki fragment zbioru brzegu parametrów w przestrzeni kryteriów, który nie będzie zasłonięty od strony minus nieskończoności przez inne elementy zbioru dla poszczególnych kryteriów.

Każde kolejne trzy punkty zbioru Pareto zostały aproksymowane płaszczyznami przechodzącymi przez te punkty. Jeżeli zdarzyłoby się, że trzy kolejne punkty leżą na jednej prostej, aproksymowane zostałyby taką prostą.

Kolejnym krokiem jest konstrukcja szkieletu. Punkt przecięcia szkieletu z powierzchnią, którą aproksymowany był zbiór Pareto, będzie poszukiwanym punktem P-optymalnym.

Zgodnie z podaną wcześniej definicją należy najpierw zdefiniować zbiór żądany, który jest iloczynem kartezjańskim górnych i dolnych wymagań w każdym z kierunków przestrzeni. Taki zbiór definiujemy przez określenie f_{1d}, f_{1g}, f_{2d}, f_{2g}, f_{3d}, f_{3g}. Szkielet budujemy zgodnie z podanym wcześniej schematem (patrz: konstrukcja szkieletu). Kierunki redukcji kolejnych przestrzeni przyjmujemy, porównując długości: $dl_1 = f_{1g} - f_{1d}$, $dl_2 = f_{2g} - f_{2d}$ i $dl_3 = f_{3g} - f_{3d}$. Punkt przecięcia szkieletu z płaszczyzną opisaną na trzech punktach znajdujemy, rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} \dfrac{f_1 - f_{1,j}}{f_{1,j+1} - f_{1,j}} = \dfrac{f_2 - f_{2,j}}{f_{2,j+1} - f_{2,j}} = \dfrac{f_3 - f_{3,j}}{f_{3,j+1} - f_{3,j}} \\[2ex] Af_1 + Bf_2 + Cf_3 + D = 0: \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0 \end{cases} \tag{18}$$

gdzie:

$(f_{1,j}, f_{2,j}, f_{3,j})$

$(f_{1,j+1}, f_{2,j+1}, f_{3,j+1})$ – A^j, A^{j+1} dwa kolejne punkty szkieletu,

A, B, C, D – współczynniki równania ogólnego płaszczyzny.

Współczynniki równania ogólnego płaszczyzny znajdujemy, rozwiązując równanie płaszczyzny przechodzącej przez dane trzy punkty $F^i(f_{1,i}, f_{2,i}, f_{3,i})$, $F^{i+1}(f_{1,i+1}, f_{2,i+1}, f_{3,i+1})$, $F^{i+2}(f_{1,i+2}, f_{2,i+2}, f_{3,i+2})$

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ f_{1,i} & f_{2,i} & f_{3,i} & 1 \\ f_{1,i+1} & f_{2,i+1} & f_{3,i+1} & 1 \\ f_{1,i+2} & f_{2,i+2} & f_{3,i+2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{19}$$

Punkty F^i, F^{i+1} oraz F^{i+2} są kolejnymi trzema elementami zbioru Pareto, przez które przeprowadzamy płaszczyznę.

Powyższy układ równań rozwiązujemy, stosując wzory Cramera

$$W = \begin{vmatrix} A & B & C \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \; W_{f_1} = \begin{vmatrix} A & B & C \\ d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \; W_{f_2} = \begin{vmatrix} A & B & C \\ a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \end{vmatrix}, \; W_{f_3} = \begin{vmatrix} A & B & C \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \end{vmatrix} \tag{20}$$

gdzie:

$a_1 = f_{2,j+1} - f_{2,j}$,

$b_1 = f_{1,j} - f_{1,j+1}$,

$c_1 = 0$,

$d_1 = f_{1,j} \cdot f_{2,j+1} - f_{1,j+1} \cdot f_{2,j}$,

$a_2 = 0$,

$b_2 = f_{3,j+1} - f_{3,j}$,

$c_2 = f_{2,j} - f_{2,j+1}$,

$d_2 = f_{2,j} \cdot f_{3,j+1} - f_{2,j+1} \cdot f_{3,j}$.

Kiedy współczynniki równania ogólnego płaszczyzny A, B, C będą jednocześnie równe zeru, okaże się, że trzy sąsiednie punkty (elementy zbioru Pareto) leżą na jednej prostej. Wówczas poszukujemy punktu przecięcia dwóch prostych w przestrzeni. Rozwiązujemy identyczny układ równań, z tym że współczynniki A, B, C, D definiujemy jako współczynniki prostej przechodzącej przez dwa punkty: $F^i(f_{1,i}, f_{2,i}, f_{3,i})$, $F^{i+2}(f_{1,i+2}, f_{2,i+2}, f_{3,i+2})$. Może się zdarzyć, że szkielet nie ma wspólnego punktu ze zbiorem Pareto. W takiej sytuacji przyjmujemy, że najbezpieczniejszym rozwiązaniem jest punkt należący do szkieletu i najbliższy brzegowi Pareto.

3.2. Przykłady obliczeniowe

W tym miejscu zaprezentujemy kilka przykładów obliczeniowych. Wartości współczynników funkcji kryterialnych będą zupełnie dowolne, natomiast wartości określające zbiór żądany dobierzemy tak, aby pokazać różne przebiegi szkieletu oraz jego położenie względem brzegu Pareto.

Przykład 1

Funkcje kryterialne

$$f_1(x) = (1{,}0 - x_1)^2 + (2{,}0 - x_2)^2 + 3{,}0$$

$$f_2(x) = (4{,}0 - x_1)^2 + (5{,}0 - x_2)^2 + 6{,}0$$

$$f_3(x) = (7{,}0 - x_1)^2 + (8{,}0 - x_2)^2 + 9{,}0$$

ograniczenia wartości zmiennych niezależnych

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

stopień dyskretyzacji

$$d_x = 1,0$$

zbiór żądany

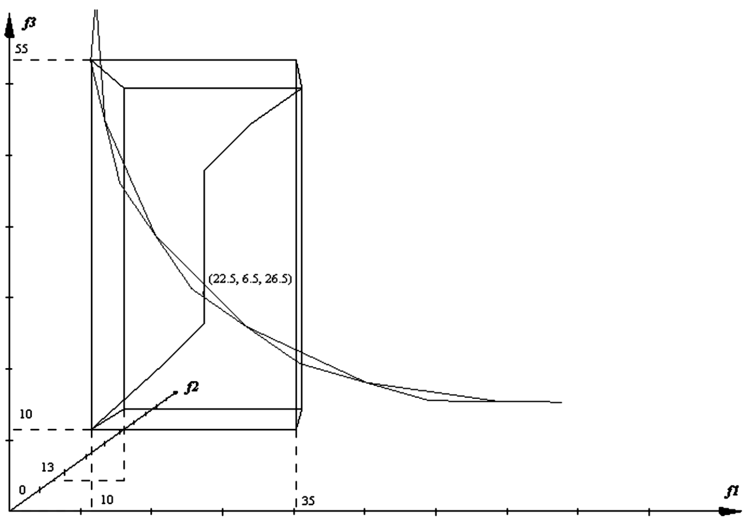
$$f_1^{\text{dolne}}(x) = 10,0 \qquad f_1^{\text{górne}}(x) = 35,0$$

$$f_2^{\text{dolne}}(x) = 0,0 \qquad f_2^{\text{górne}}(x) = 13,0$$

$$f_3^{\text{dolne}}(x) = 10,0 \qquad f_3^{\text{górne}}(x) = 55,0$$

Dla powyższych danych otrzymujemy

$$\min_x \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22,5 & 6,5 & 26,5 \end{bmatrix}$$



Rys. 1. Istnieje punkt wspólny brzegu Pareto i szkieletu – przykład 1
Fig. 1. The intersection point between the Pareto set and the skeleton exist – example 1

Przykład 2

Funkcje kryterialne

$$f_1(x) = (5,0 - x_1)^2 + (4,6 - x_2)^2 + 7,9$$

$$f_2(x) = (15,0 - x_1)^2 + (5,5 - x_2)^2 + 0,82$$

$$f_3(x) = (20,0 - x_1)^2 + (12,4 - x_2)^2 + 9,1$$

ograniczenia wartości zmiennych niezależnych

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \end{bmatrix}$$

stopień dyskretyzacji

$$d_x = 1,0$$

zbiór żądany

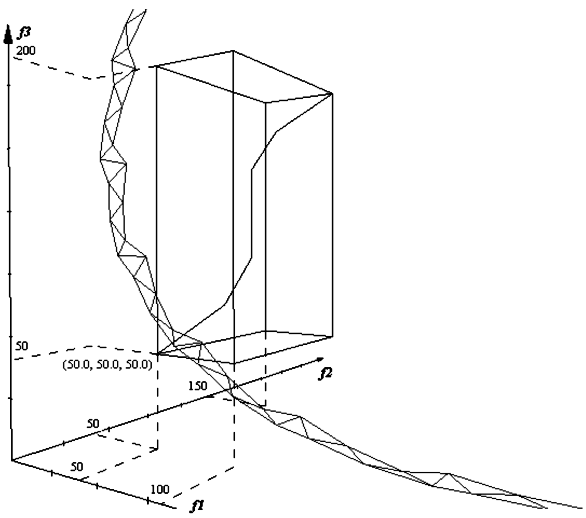
$$f_1^{\text{dolne}}(x) = 50,0 \qquad f_1^{\text{górne}}(x) = 100,0$$

$$f_2^{\text{dolne}}(x) = 50,0 \qquad f_2^{\text{górne}}(x) = 150,0$$

$$f_3^{\text{dolne}}(x) = 50,0 \qquad f_3^{\text{górne}}(x) = 200,0$$

Dla powyższych danych otrzymujemy

$$\min_x \left[f_1(x) \quad f_2(x) \quad f_3(x) \right] = \left[50,0 \quad 50,0 \quad 50,0 \right]$$



Rys. 2. Nie istnieje punkt wspólny brzegu Pareto i szkieletu – przykład 2
Fig. 2. The intersection point between the Pareto set and the skeleton does not exist – ezample 2

3.3. Możliwości zastosowania algorytmu do praktycznych rozwiązań z zakresu inżynierii środowiska

Z problemem wielokryterialności projektant spotyka się dzisiaj prawie w każdym zadaniu optymalizacyjnym. Ponieważ wszędzie oczekuje się kompleksowego wykonania danego projektu, należy się spodziewać, że prawie na pewno stanie się przed koniecznością uwzględnienia większej liczby kryteriów, niejednokrotnie sprzecznych ze sobą.

W inżynierii środowiska możemy się spotkać z sytuacjami, gdy trzeba uwzględnić więcej niż jedno kryterium – choćby przy projektowaniu stacji uzdatniania wody, projektowaniu oczyszczalni ścieków, budowie i lokalizacji obiektów gospodarki wodnej (np. zbiorniki retencyjne) czy utylizacji i składowaniu odpadów.

W przypadku projektowania stacji uzdatniania wody zakłada się, że jakość wody po uzdatnieniu musi odpowiadać co najmniej zadanym normom, co wiąże się z zastosowaniem odpowiedniej ilości odczynników, specjalistycznych technologii czy z wykorzystaniem specjalistycznego sprzętu. Załóżmy, że te składowe tworzą razem funkcję jakości wody $f_1(x)$, gdzie wektor $\boldsymbol{x}$ będzie odzwierciedlał zespół parametrów odpowiedzialnych za jakość wody po procesie uzdatniania. Skądinąd z uzyskaniem jak najwyższej jakości wody ($\max_x f_1(x)$) wiążą się, oczywiście, wyższe koszty tworzące przez wektor parametrów $\boldsymbol{x}$ funkcję kosztów $f_2(x)$ uzyskania jakości wody o odpowiednich parametrach. Rzecz jasna, każda z funkcji osiąga ekstremum przy innym wektorze zmiennych decyzyjnych.

W przypadku projektowania stacji oczyszczalni ścieków zachodzi sytuacja analogiczna. Chcąc uzyskać jak najlepszy stopień oczyszczenia ścieków, podnosi się automatycznie koszty oczyszczania.

Jeśli chodzi o budowę i lokalizację obiektów gospodarki wodnej, mamy do czynienia z wieloma kryteriami:
- kryterium kosztów budowy $f_1(x)$,
- kryterium $f_2(x)$ oceniające redukcję strat powodziowych uzyskaną w wyniku budowy zbiornika o odpowiedniej pojemności,
- kryterium $f_3(x)$ oceniające wpływ zbiornika na środowisko naturalne w obszarze zbiornika,
- kryterium społeczno-ekonomiczne $f_4(x)$ mogące wskazywać na zmiany sytuacji ekonomicznej regionu w wyniku budowy zbiornika – pojawienie się przychodów z rekreacji, ożywienie koniunktury gospodarczej regionu itp.

W wypadku utylizacji, np. przez spalanie, chcielibyśmy uzyskać na wyjściu spaliny o jak najniższym poziomie związków szkodliwych, co wiąże się, oczywiście, ze zwiększeniem kosztów procesu utylizacji. Obok funkcji jakości uzyskanych spalin i funkcji kosztów można również opisać funkcję kryterium ekonomicznego związaną z wykorzystaniem spalin na produkcję energii.

W każdym z powyższych przykładów projektant będzie ponadto zmuszony uwzględnić pewne ograniczenia (np. ustawowo zdefiniowane ilości szkodliwych związków wprowadzanych do środowiska czy środki przeznaczone przez inwestora na dany projekt). Zastosowana metoda szkieletu uwalnia decydenta od potrzeby dokładnej znajomości przestrzeni kryteriów czy przestrzeni parametrów; wystarczy zdefiniować zbiór żądany, we wnętrzu którego będzie poszukiwane optymalne rozwiązanie.

4. Dalsze kierunki badań

W przyszłości należałoby się zająć przede wszystkim zwiększeniem liczby zmiennych decyzyjnych. W niniejszym zadaniu optymalizacyjnym zastosowano dwuelementowy wektor parametrów $\boldsymbol{x}^T = [x_1\ x_2]$. Przy powiększaniu wektora parametrów niezbędne będzie zoptymalizowanie poszczególnych funkcji aplikacji, tak aby ich złożoność czasowa znacznie zmalała; dotyczy to w szczególności funkcji odpowiedzialnych za wygenerowanie brzegu Pareto. Sama zasada generowania przestrzeni parametrów i przekształcania jej w przestrzeń kryteriów nie zmieni się.

Kolejnym poważniejszym przedsięwzięciem będzie powiększenie wektora funkcji kryterialnych. Niniejszy artykuł został poprzedzony badaniami nad algorytmem opisanym dla dwuelementowego wektora funkcji kryterialnych. Sama istota działania algorytmu się nie zmieniła, zwiększyła się natomiast liczba odwołań do funkcji badających przestrzeń kryteriów (obrotów układu współrzędnych). Naturalnie, funkcje te nie przyjmowały jednakowych zmiennych, ale zachodzi widoczna analogia pomiędzy zadaniami dwuwymiarowym i trójwymiarowym. Należy się spodziewać, że podobna strategia podczas opracowywania zadania, np. czterowymiarowego, również przyniesie sukces.

Bardzo ciekawym problemem jest także badanie zbioru żądanego, który w tym artykule został zdefiniowany przez określenie dolnego i górnego poziomu aspiracji $[q^l{}_i, q^u{}_i]$, czyli dolną i górną wartość kryteriów akceptowalnych przez decydenta. Przypomnijmy: $q^l{}_i = f_i^{\text{dolne}}(x)$, $q^u{}_i = f_i^{\text{górne}}(x)$. Tak opisany zbiór żądany jest zatem prostopadłościanem, przez który zostaje przeprowadzony szkielet. Taka konstrukcja szkieletu jest znana i dokładnie opisana. Należy jednak zwrócić uwagę na to, że zbiór żądany można definiować inaczej, nie tylko jako minimalne i maksymalne wartości kryteriów, ale jako funkcje tych wartości – np. liniowe: $q^l{}_i = a_1 \cdot f_i^{\text{dolne}}(x) + b_1$ i $q^u{}_i = a_2 \cdot f_i^{\text{górne}}(x) + b_2$. Oczywiście, jeszcze bardziej zajmującym zagadnieniem byłoby ograniczenie zbioru żądanego przez funkcje bardziej złożone. Przeprowadzenie szkieletu przez tak ustalony zbiór żądany jest zagadnieniem trudnym i wymagałoby dokładniejszych badań.

5. Dodatek – implementacja konstrukcji zbioru Pareto

Aplikacja została zaimplementowana w języku programowania C++. Wszystkie elementy graficzne, tj. wykresy, powstały z wykorzystaniem środowiska OpenGL.

Przedstawiony poniżej kod źródłowy programu opisany jest swoistym pseudojęzykiem – dzięki temu kod stanie się bardziej przejrzysty i zrozumiały.

Obliczenia zaczynamy od wprowadzenia danych: współczynników funkcji kryterialnych, zakresu zmienności zmiennych niezależnych oraz stopnia dyskretyzacji. Algorytm pozwala na określenie stopnia dyskretyzacji d_x, wybierając odpowiednią wartość z listy – $d_x = 1$, $d_x = 0{,}1$, lub $d_x = 0{,}01$.

Jeśli wprowadzimy np. $x_{1,d} = 0$, $x_{1,\mathrm{g}} = 10$, $x_{2,d} = 0$, $x_{2,g} = 10$ oraz wybierzemy stopień dyskretyzacji $d_x = 1$, otrzymamy 121-elementowy zbiór rozwiązań dopuszczalnych. Jeżeli przy takich samych ograniczeniach zmiennych niezależnych wybierzemy $d_x = 0{,}1$, zbiór rozwiązań dopuszczalnych będzie zawierał aż 10201 elementów. Ponieważ złożoność obliczeniowa algorytmu jest duża, należy pamiętać, że wraz ze wzrostem wariantów (dokładności obliczeń) znacznie zwiększa się czas obliczeń.

PODAJ $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3)$;
PODAJ $(x_{1d}, x_{1g}, x_{2d}, x_{2g})$;
PODAJ (d_x);
DLA $i := x_{1d}$ *DO* x_{1g}
{
    DLA $j := x_{2d}$ *DO* x_{2g}
    {
        $f_1 = (a_1 - x_1)^2 + (a_2 - x_2)^2 + a_3$;
        $f_2 = (b_1 - x_1)^2 + (b_2 - x_2)^2 + b_3$;
        $f_3 = (c_1 - x_1)^2 + (c_2 - x_2)^2 + c_3$;
        $j := j + d_x$;
    }

```
        i:= i + d_x;
}
rozmiar = (((x_1g – x_1d)/d_x)+1)* (((x_2g – x_2d)/d_x)+1);
WYPISZ (f_1, f_2, f_3);
```

Dzięki powyższej operacji problem optymalizacyjny został przeniesiony z przestrzeni parametrów do przestrzeni kryteriów. Operacja została wykonana dla każdego wektora $\boldsymbol{x}^T = [x_1\ x_2]$ w zadanym przedziale $x_d \le x \le x_g$ i stopniu dyskretyzacji d_x.

Warto zauważyć, że elementy przestrzeni kryteriów różniące się parametrami, ale o identycznych wartościach funkcji kryterialnych nie są rozróżnialne. Wobec tego wszystkie powtarzające się elementy zbioru trzeba usunąć.

```
PODAJ (f_1, f_2, f_3);
PODAJ (rozmiar);
SORTUJ (f_1, f_2, f_3);
DLA i:= 0 DO rozmiar
{
        JEŚLI (f_1(i) ≠ f_1(i+1) I f_2(i) ≠ f_2(i+1) I f_3(i) ≠ f_3(i+1))
                WYPISZ (f_1(i), f_2(i), f_3(i));
        W PRZECIWNYM RAZIE
        {
                USUŃ (f_1(i+1), f_2(i+1), f_3(i+1));
                WYPISZ (f_1(i), f_2(i), f_3(i));
        }
}
```

Następny fragment programu przedstawia procedurę wyodrębnienia z przestrzeni kryteriów brzeg Pareto.

```
PODAJ (f_1, f_2, f_3);
PODAJ (rozmiar);
SORTUJ (f_1, f_2, f_3);
DLA i:= 0 DO rozmiar
{
        JEŚLI (f_1(i) ≠ f_1(i+1) I f_2(i) ≠ f_2(i+1))
                WYPISZ (f_1(i), f_2(i), f_3(i));
        W PRZECIWNYM RAZIE
{
                JEŚLI (f_3(i) < f_3(i+1))
                        USUŃ (f_1(i+1), f_2(i+1), f_3(i+1));
                W PRZECIWNYM RAZIE
                        WYPISZ (f_1(i), f_2(i), f_3(i));
}
}
```

Operację taką powtarzamy trzy razy, pamiętając, że za każdym razem zmniejsza się liczba elementów zbioru.

PODAJ (f_1, f_2, f_3);
PODAJ (*rozmiar*);
SORTUJ (f_1, f_3, f_2);
DLA i:= *0 DO rozmiar*
{
JEŚLI ($f_{1(i)} \neq f_{1(i+1)}$ *I* $f_{3(i)} \neq f_{3(i+1)}$)
WYPISZ ($f_{1(i)}$, $f_{2(i)}$, $f_{3(i)}$);
W PRZECIWNYM RAZIE
{
JEŚLI ($f_{2(i)} < f_{2(i+1)}$)
USUŃ ($f_{1(i+1)}$, $f_{2(i+1)}$, $f_{3(i+1)}$);
W PRZECIWNYM RAZIE
WYPISZ ($f_{1(i)}$, $f_{2(i)}$, $f_{3(i)}$);
}
}

PODAJ (f_1, f_2, f_3);
PODAJ (*rozmiar*);
SORTUJ (f_2, f_3, f_1);
DLA i:= 0 *DO rozmiar*
{
JEŚLI ($f_{2(i)} \neq f_{2(i+1)}$ *I* $f_{3(i)} \neq f_{3(i+1)}$)
WYPISZ ($f_{1(i)}$, $f_{2(i)}$, $f_{3(i)}$);
W PRZECIWNYM RAZIE
{
JEŚLI ($f_{1(i)} < f_{1(i+1)}$)
USUŃ ($f_{1(i+1)}$, $f_{2(i+1)}$, $f_{3(i+1)}$);
W PRZECIWNYM RAZIE
WYPISZ ($f_{1(i)}$, $f_{2(i)}$, $f_{3(i)}$);
}
}

Po zastosowaniu powyższych operacji ze zbioru zostały wyeliminowane warianty zdominowane, ale tylko te leżące na jego brzegu oraz te pomiędzy nimi, które są współliniowe. Aby usunąć pozostałe (leżące wewnątrz zbioru rozwiązań zdominowanych), należy wykonać:

PODAJ (f_1, f_2, f_3);
PODAJ (*rozmiar*);
PODAJ (*tmp*:= $f_{3(0)}$);
SORTUJ (f_1, f_2, f_3);
DLA i:= 1 *DO rozmiar*
{
JEŚLI ($f_{3(i)} \leq tmp$)
{
$tmp = f_{3(i)}$;

WYPISZ (f_1, f_2, f_3);
}
}

Po odjęciu ze zbioru rozwiązań dopuszczalnych zbioru zdominowanego otrzymamy zbiór wariantów tzw. nieulepszalnych, czyli takich, w których nie można poprawić żadnego z kryteriów, nie pogarszając równocześnie pozostałych.

Literatura

[1] Chmielowski W., *Zastosowania optymalizacji w gospodarce wodnej*, Wyd. PK, Kraków 2005.
[2] Górecki H., *Optymalizacja systemów dynamicznych*, WN PWN, Warszawa 1993.