ŚRODOWISKO
CZASOPISMO TECHNICZNE
TECHNICAL TRANSACTIONS
ENVIRONMENTAL ENGINEERING
WYDAWNICTWO POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ
2-Ś/2009
ZESZYT 2
ROK 106
ISSUE 2
YEAR 106

RYSZARDA IWANEJKO*

OCENA DOKŁADNOŚCI MIAR NIEZAWODNOŚCIOWYCH SYSTEMÓW WODOCIĄGOWYCH I KANALIZACYJNYCH

CZĘŚĆ I. OCENY WSTĘPNE

EVALUATION OF ACCURACY OF RELIABILITY PARAMETERS IN WATER AND SEWAGE SYSTEMS

PART I. APPROXIMATED ESTIMATES

Streszczenie

Obiekty wodociągowe i kanalizacyjne należą do obiektów strategicznej infrastruktury miejskiej. Muszą więc spełniać odpowiednie wymagania techniczne, ekonomiczne i niezawodnościowe. Kryteria niezawodnościowe mogą być sformułowane w odniesieniu do wyznaczanych najczęściej miar niezawodności tych obiektów, tj. stacjonarnego wskaźnika gotowości K, średniego czasu pracy między uszkodzeniami Tp, średniego czasu niesprawności Tn czy intensywności uszkodzeń λ. Dlatego ważne są zarówno umiejętność wyznaczania tych miar, jak i umiejętność oceny popełnianego przy tym błędu. Podstawowymi źródłami błędów mogą być tzw. niepewność danych lub stosowanie uproszczonych modeli matematycznych. W artykule przedstawiono metody rachunku przybliżonego (w tym klasyczne prawo propagacji błędów). Jeśli to możliwe, to poleca się stosowanie kilku różnych metod i przeprowadzenie analizy uzyskanych wyników.

Słowa kluczowe: *wodociągi*, *kanalizacje*, *niezawodność*, *dokładność*

Abstract

Both water supply and sewage utilities constitute a strategic municipal infrastructure. Hence, they have to comply with specific technical, economic and reliability standards. The reliability criteria may be defined based on the reliability measures that are most commonly determined for these utilities, such as: stationary indicator of operational capacity K, average operation time between the subsequent failures Tp, average non-operation time Tn or failure rate λ. Therefore, the ability to determine these measures and to evaluate their possible errors is vital. The most frequent sources of errors are so called data uncertainty or application of simplified mathematical models. The paper presents the methods of approximate calculus (including a classical law of errors propagation). If it is possible, the author recommends using some different methods and than a comprehensive analysis of the results.

Keywords: *water supply systems*, *sewage systems*, *reliability*, *accuracy*

* Dr Ryszarda Iwanejko, Instytut Zaopatrzenia w Wodę i Ochrony Środowiska, Wydział Inżynierii Środowiska, Politechnika Krakowska.

1. Wstęp

Obiekty wodociągowe i kanalizacyjne należą do obiektów strategicznej infrastruktury miejskiej. Muszą więc spełniać odpowiednie wymagania techniczne, ekonomiczne i niezawodnościowe. Miarami niezawodności obiektów mogą być przykładowo stacjonarny wskaźnik gotowości K czy intensywność uszkodzeń λ [17]. Sprawdzenie spełnienia kryterium niezawodnościowego jest możliwe po: 1) uprzednim jego sformułowaniu (np. $K \geq Kw$, $\lambda \leq \lambda_{max}$, gdzie Kw to wymagany poziom niezawodności, λ_{max} – dopuszczalna intensywność uszkodzeń); 2) przyjęciu poziomu odniesienia (np. Kw, λ_{max}) oraz 3) po wyznaczeniu odpowiedniej, rzeczywistej miary niezawodności obiektu (np. K, λ). Miary niezawodności obiektów wyznacza się w zależności od potrzeb dla pojedynczych elementów systemu oraz dla całych systemów na podstawie danych eksploatacyjnych z zastosowaniem metod statystyki matematycznej albo za pomocą metod teorii niezawodności. W każdym przypadku wyznaczone wartości nie są dokładne, lecz są obarczone błędami. Ogólnie błędy mogą być:

– losowe (przypadkowe) – są wynikiem wpływu wielu czynników,
– systematyczne – powodowane przez ściśle określone czynniki, wpływające tendencyjnie na wynik (np. zawyżanie lub zaniżanie wyników wszystkich obserwacji).

Błędy oceny mogą wynikać z wielu przyczyn; przykładowo z:

– niedokładności zapisów zdarzeń awaryjnych prowadzonych przez odpowiednie służby,
– niepełności danych, tj. z niewystarczającej ilości informacji (zbyt mała próba danych, za krótki okres obserwacji, w którym odnotowano za mało uszkodzeń),
– czynników wpływających na istnienie błędu systematycznego (np. złe wyskalowanie urządzeń pomiarowych, wykorzystanie tendencyjnych technik zbierania lub przetwarzania danych),
– przyjęcia uproszczonych modeli (np. przyjęcia bez weryfikacji założenia o wykładniczym rozkładzie czasów sprawności, normalnego okresu eksploatacji, braku wpływu modernizacji systemu na jego działanie),
– przenoszenia się błędów pochodzących z pojedynczych elementów na błąd miary całego systemu,
– zastosowania nieodpowiedniej lub przybliżonej metody wyznaczania miary niezawodności dla całego systemu (np. przybliżonej metody przeglądu częściowego MPCz) albo metody generującej błędy numeryczne dla pewnych danych (np. klasyczna metoda dwuparametryczna dla struktury progowej wysoce niezawodnych elementów [7]); są to tzw. błędy metody.

Do oceny dokładności wyznaczanego parametru możliwe jest stosowanie różnych metod, m.in.:

– rachunku błędów, stosowane w odniesieniu do pojedynczego elementu lub obiektów z uwzględnieniem ich struktury oraz do określenia propagacji błędów pojedynczych danych na końcowy błąd parametru,
– statystyczne, stosowane do estymacji (punktowej lub przedziałowej) parametrów niezawodnościowych zazwyczaj w odniesieniu do pojedynczych elementów lub systemów traktowanych globalnie bez wnikania w ich strukturę,
– numerycznego szacowania, stosowane w odniesieniu do metod przybliżonych i wynikające z upraszczania złożonych modeli (np. MPCz).

W wypadku praktycznych zastosowań inżynierskich szczególnie ważna jest możliwość oceny popełnianego błędu. Informacji o błędzie, a tym samym o dokładności oceny, dostarczają wartości:

– błędu lub niepewności (w klasycznym rachunku błędów), w tym oszacowania błędu wynikającego z wykonywania operacji arytmetycznych na wielkościach przybliżonych oraz z upraszczania obliczeń i pomijania pewnych, niewielkich z reguły, członów wyznaczanej wartości,
– wariancji lub odchylenia standardowego,
– granice (szerokości) przedziału ufności.

Choć są to wartości różnie interpretowane, to pozwalają na ocenę popełnianego błędu, a tym samym na ocenę dokładności uzyskiwanego wyniku.

W sytuacji gdy parametr niezawodnościowy jest szacowany na podstawie danych eksploatacyjnych, mogą zajść dwie sytuacje:

– liczebność próby jest znaczna (co najmniej kilkadziesiąt obserwacji),
– liczebność próby jest niewielka (kilka obserwacji, zaś w skrajnym wypadku brak danych liczbowych, a jedynie np. informacja o braku uszkodzenia tzw. wysoce niezawodnych obiektów w pewnym, długim okresie), co uniemożliwia stosowanie większości metod statystycznych.

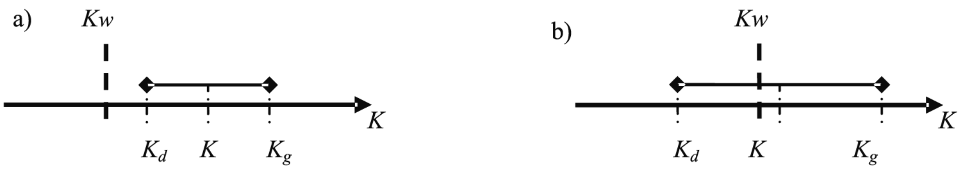
Równocześnie można przyjąć, że rozkład odpowiedniej zmiennej losowej jest:

– znany, czyli może wynikać z przesłanek fizycznych lub można go zweryfikować graficznie (na podstawie podobieństwa wykresów dystrybuanty albo funkcji gęstości empirycznej i teoretycznej) lub analitycznie (za pomocą odpowiedniego testu statystycznego),
– nieznany, gdy brak uzasadnionych podstaw do przyjęcia typu rozkładu.

Najczęstszą praktyką jest wyznaczanie jedynie pojedynczych wartości miar niezawodności (np. punktowych estymatorów) i stosowanie ich w dalszych obliczeniach oraz przy sprawdzaniu spełnienia przyjętych kryteriów niezawodnościowych. Oznacza to równoważne traktowanie wartości przybliżonej (oznaczanej dalej ogólnie przez X, a w szczególności np. przez K, Tp, Tn, λ) i wartości dokładnej (oznaczanej dalej ogólnie przez X^0, a w szczególności np. przez K^0, Tp^0, Tn^0, λ^0). Podstawą takich działań jest powszechnie przyjmowane założenie, że popełniany błąd jest niewielki. Stosunkowo rzadko dokonuje się estymacji przedziałowej pojedynczych miar niezawodności (w literaturze przedmiotu można odnaleźć jedynie estymację przedziałową średniego czasu sprawności Tp^0), a wyznaczony przedział ufności wykorzystuje się do oceny błędu. W pracy [11] przedstawiono związek do określenia warunków wymaganych do badań elementów sieci wodociągowej (tj. minimalna liczebność próby, wystarczający okres obserwacji, wystarczająca długość obiektów liniowych). Związek ten pozwala na uzyskanie wyników badań na zadanym poziomie ufności i z żądaną dokładnością oceny, więc powinien być stosowany, gdy baza danych jest znaczna. Jednak w praktyce rzadko mamy możliwość „planowania” badań, zazwyczaj opieramy się na dostępnych danych, które często nie są wystarczające.

Dotychczas w odniesieniu do miar niezawodności obiektów wodociągowych i kanalizacyjnych nie przedstawiono kompleksowej metodyki oceny popełnianego błędu. Ocena błędu (w jakiejkolwiek formie) wydaje się konieczna, zwłaszcza gdy wyznaczona wartość oraz przyjęty w kryterium niezawodnościowym poziom odniesienia różnią się w niewielkim stopniu. Załóżmy przykładowo, że na podstawie danych empirycznych oszacowano: wartość stacjonarnego wskaźnika gotowości i błąd jego oceny. Niech będą to punktowy estymator stacjonarnego wskaźnika gotowości równy K oraz dwustronny przedział ufności na poziomie wiarygodności (np. 95%) dla wartości dokładnej K^0 w postaci (K_d, K_g), gdzie K_d i K_g to – odpowiednio – dolna i górna granica dwustronnego przedziału ufności. Dla hipotetycznego przypadku: $K \geq Kw$ (gdzie Kw to wymagany poziom niezawodności obiektu – poziom odniesienia w podstawowym kryterium niezawodnościowym) możliwe są dwie sytuacje (rys. 1):

a) $K_d \geq Kw$ – wówczas z wysokim prawdopodobieństwem (np. co najmniej 95%) można przypuszczać, że dokładna, nieznana wartość K^0 spełnia analogiczne kryterium,
b) $K_d < Kw$ – wówczas przypuszczenie na tak wysokim poziomie wiarygodności nie ma podstaw; czasem jednak uzasadnione może być złagodzenie kryterium do postaci: $K_d \geq Kw'$, gdzie Kw' to obniżony wymagany poziom niezawodności.



Rys. 1. Przedziały ufności (K_d, K_g) dla przypadku $K \geq Kw$ (opis w tekście)

Fig. 1. Confidence intervals (K_d, K_g) for a case when $K \leq Kw$ (see the text)

W dalszej części artykułu zostaną przedstawione wybrane sposoby oceny błędów wynikające z niedokładności zapisów, kumulowania się błędów elementów, niepełności danych.

2. Rachunek przybliżony

W praktycznych zadaniach inżynierskich często wykorzystuje się dane empiryczne. Nie są znane dokładne wartości potrzebnych danych, lecz jedynie ich przybliżenia. Stopień dokładności danego przybliżenia jest określany przez liczbę tzw. cyfr znaczących. Mówimy, że liczba x ma t poprawnych cyfr ułamkowych, gdy moduł błędu nie przekracza $1/2 \cdot 10^{-t}$. Cyfry istotne (tj. po pominięciu zer początkowych) występujące aż do pozycji t po kropce nazywamy cyframi znaczącymi [2]. Przykładowo, wartości a) 0,001234 ± 0,000004 oraz b) 0,001234 ± 0,000006 mają, odpowiednio: a) pięć cyfr poprawnych i trzy znaczące, b) cztery cyfry poprawne i dwie znaczące.

Błędy danych wykorzystywanych w obliczeniach decydują o wielkości błędu wyniku końcowego. Jest to tzw. błąd nieunikniony. Znając jednak oszacowania błędów danych wyjściowych, można oszacować błąd wyniku obliczeń. Podstawą są podane niżej zasady określania błędów działań matematycznych. W dalszym ciągu będą stosowane następujące oznaczenia:

n – liczba danych wyjściowych,

$x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$ – dokładne wartości danych wyjściowych,

$y^0 = y^0(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0)$ – dokładny wynik obliczeń,

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – przybliżone wartości danych wyjściowych,

$y = y(x_1, x_2, ..., x_n)$ – przybliżony wynik,
$\Delta x_1, ..., \Delta x_n, \Delta y$ – błędy bezwzględne określone z formuły ogólnej jako

$$\Delta x = x - x^0 \tag{1}$$

$\delta x_1, ..., \delta x_n, \delta y$ – błędy względne określone z formuły ogólnej jako

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x^0} \tag{2}$$

Błędy względne najczęściej są wyrażane w procentach, dają lepszą orientację co do jakości wyniku niż błąd bezwzględny.

Wynik y uzyskany z obliczeń powinien zostać prawidłowo zaokrąglony. Kolejne kroki i zasady postępowania są następujące:

1. Wyznaczenie Δx_i – te wielkości są określone np. przez dokładność zapisów zdarzeń przez eksploatatora lub przez odpowiednie służby; w dalszej części są interpretowane jako niepewności danych.
2. Wyznaczenie niepewności wyniku Δy z dokładnością do kilku miejsc znaczących, a następnie zaokrąglenie tej niepewności (zawsze w górę, gdyż lepiej jest podać błąd większy niż zaniżony) do dwóch miejsc znaczących (rzadziej do jednego miejsca znaczącego).
3. Wyznaczenie wyniku y (obliczenia przeprowadza się na niezaokrąglonych wartościach $x_1, ..., x_n$) z dokładnością o kilka miejsc dziesiętnych dalej niż miejsce dziesiętne, do którego zaokrąglono błąd Δy, po czym wynik zaokrągla się do tego samego miejsca dziesiętnego, do którego wyznaczono błąd (przy czym jeżeli pierwsza z odrzucanych cyfr liczby jest mniejsza od 5, to ostatnią cyfrę w liczbie pozostawia się bez zmian; jeżeli pierwsza z odrzucanych cyfr liczby jest większa od 5, to ostatnią cyfrę w liczbie zwiększa się o 1, a jeżeli pierwsza z odrzucanych cyfr liczby jest równa 5, to ostatnią cyfrę w liczbie albo pozostawia się, jeżeli jest parzysta, albo zwiększa się o 1, jeżeli jest nieparzysta).

Prawidłowo zaokrąglony wynik i jego niepewność mają taką samą liczbę miejsc dziesiętnych. Spotykane często posługiwanie się wynikami z wieloma miejscami dziesiętnymi jest nieuzasadnione i błędnie sugeruje większą dokładność wyniku. W praktyce należy posługiwać się wynikami odpowiednio zaokrąglonymi. Dodatkowo liczbowe wyniki y należy uzupełniać wielkością błędu lub informacją, że np. błąd wynosi co najwyżej 3 jednostki na ostatniej pozycji, wszystkie cyfry są znaczące itp.

Błędy danych wyjściowych wykorzystywanych w obliczeniach (Δx_i) wpływają na błąd wyniku końcowego (Δy). Najczęściej stosuje się trzy metody oceny przenoszenia się błędów. Są to:

- analiza przedziałowa,
- ocena na podstawie definicji błędu,
- metoda różniczki zupełnej.

Pierwsza metoda polega na określaniu krok po kroku możliwego zakresu wyników cząstkowych (a tym samym błędów) uzyskiwanych w kolejnych krokach obliczeń.

Druga metoda polega na zastosowaniu wzorów podstawowych. Do wzoru na błąd wyniku $\Delta y = y - y^0$ podstawia się wzory na wartości dokładne (w celu ich wyeliminowania) $x_i^0 = x_i - \Delta x_i$ i dokonuje wielu przekształceń.

Trzecia metoda opiera się na rozwinięciu Taylora funkcji y. Po dokonaniu koniecznych przekształceń dla błędu bezwzględnego wyniku obliczeń $\Delta y = y - y^0$ mamy

$$\Delta y \cong \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}(x) \cdot \Delta x_i \qquad \text{oraz} \qquad |\Delta y| \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial y}{\partial x_i}(x) \right| \cdot |\Delta x_i| \tag{3}$$

Błąd Δy, który może być dodatni lub ujemny, należy odróżniać od oszacowania błędu $|\Delta y|$. Oszacowanie $|\Delta y|$ uwzględnia najgorsze przypadki (gdy błędy Δx_i mają maksymalne wartości bezwzględne i odpowiednie znaki), jest pesymistyczne i dlatego nazywamy je błędem maksymalnym. Człony $\frac{\partial y}{\partial x_i}(x)$ występujące we wzorze (3) mogą być traktowane jako współczynniki wrażliwości wyznaczanej wielkości y na odchylenia (błędy) czynników składowych. Natomiast błąd względny można wyznaczyć jako

$$\delta y \cong \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln y}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \tag{4}$$

Znak przybliżenia we wzorach na Δy i δy wynika z przyjęcia założeń, że pochodne cząstkowe funkcji $y(x_1, x_2, ..., x_n)$ zmieniają się dostatecznie wolno oraz że błędy względne danych wyjściowych $\delta x_1, ..., \delta x_n$ są dostatecznie małe [15]. Przyjęcie takich założeń uzasadnia pominięcie reszty w rozwinięciu Taylora. Podane wzory mogą mieć zastosowanie przy ocenie błędów prowadzonych obliczeń niezawodnościowych i prawidłowym zaokrąglaniu wyników.

Wymienione metody oceny propagacji błędów zostaną przedstawione na przykładach w dalszej części artykułu.

2.1. Błąd pojedynczej miary niezawodności obiektu

Pojedyncze miary niezawodności są związane albo ze sprawnością, albo z niesprawnością obiektu. Takimi podstawowymi miarami są średni czas sprawności *Tp*, średnia intensywność uszkodzeń λ czy średni czas niesprawności *Tn*. Średni czas sprawności (dla obiektów przeznaczonych do ciągłego wykonywania zadań to zarazem średni czas pracy) jest wyznaczany jako

$$Tp = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} tp_i \tag{5}$$

gdzie:

tp_i – długość *i*-tego odcinka sprawności,
n – liczba danych.

Na podstawie (3) błąd bezwzględny tej wielkości wynosi

$$\Delta Tp \cong \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta tp_i \tag{6}$$

gdzie Δtp_i to błąd względny pojedynczej obserwacji tp_i.

Przykład 1. Czasy pracy między uszkodzeniami obiektów wodociągowych można określić na podstawie zapisów w księgach awarii. Dokładność zapisu czasu wystąpienia awarii i czasu ukończenia naprawy jest różna i zależy m.in. od stopnia ważności obiektu, od zasad przyjętych w danym zakładzie i od sumienności pracowników. Przykładowo, dokładność zapisu może być równa: a) 1 doba – jeśli notowane są jedynie daty, b) 8 h – jeśli notowane są daty i zmiany (w systemie trójzmianowym), c) 0,5 h – przy zapisach dokładnych, d) 10 min – przy zapisach bardzo dokładnych, prowadzonych dla obiektów o wyjątkowym znaczeniu. Te wielkości określają równocześnie błędy danych wejściowych. Załóżmy, że na podstawie *n* czasów pracy między uszkodzeniami z zastosowaniem kalkulatora lub arkusza kalkulacyjnego EXCEL wyznaczono średni czas pracy za pomocą wzoru (5) i otrzymano Tp = 50,306445 d = 1207,354672 h (niezależnie od jednostki wynik przepisano z 6 miejscami dziesiętnymi). Jednak nie wszystkie cyfry tego wyniku są pewne i wynik należy zaokrąglić. Na podstawie (6) błąd bezwzględny średniego czasu pracy dla kolejnych przypadków wynosi, odpowiednio: 1 doba (0,1·10 d); 0,34 d; 0,5 h i 0,17 h. Dla kolejnych przypadków możemy podać Tp jako: a) 50 ± 1 d (dwie cyfry pewne), b) 50,31 ± 0,34 d; c) 1207,4 ± 0,5 h oraz d) 1207,35 ± 0,17 h. Podawanie Tp z większą liczbą cyfr ułamkowych nie ma sensu fizycznego i błędnie sugeruje większą dokładność wyniku.

2.2. Błąd kompleksowej miary obiektu

Miary kompleksowe charakteryzują łącznie sprawność i niesprawność obiektu. Taką podstawową miarą jest tzw. stacjonarny wskaźnik gotowości obiektu równy

$$K = \frac{Tp}{Tp + Tn} \tag{7}$$

gdzie Tp, Tn to – odpowiednio – średni czas sprawności i niesprawności obiektu.

Wyznaczony na podstawie różniczki zupełnej (3) błąd względny K jest równy

$$\Delta K = \frac{Tn \cdot \Delta Tp - \Delta Tn}{(Tp + Tn)^2} \tag{8}$$

Na podstawie tego wzoru można wnioskować, że rząd błędu wyniku będzie wynikać z największego z rzędów błędów parametrów Tp i Tn.

Przykład 2. Na podstawie danych eksploatatora wyznaczono Tp = 2678 h oraz Tn = 47 h. Ich błędy określono jako ΔTp = 1 d = 24 h oraz ΔTn = 4 h. Wartość miary K wyznaczono do 9 miejsc po przecinku i otrzymano K = 0,982752293. Stosując metodę analizy przedziałowej, mamy: $2654 \le Tp \le 2702$ oraz $43 \le Tn \le 51$. Stąd $0{,}981146025 \le K \le 0{,}984335154$, a w rezultacie $K = 0{,}982752293 \pm 0{,}00159456$. Po zaokrągleniu $K = 0{,}9828 \pm 0{,}0016$. Stosując metodę różniczki zupełnej, na podstawie (8) błąd względny można ocenić jako ΔK = 0,0012907, a po zaokrągleniu ΔK = 0,0013. Stąd K = 0,9828±0,0013. Gdyby jednak $\Delta Tp = \Delta Tn$ = 1 h, to ΔK = 0,0003543, po zaokrągleniu ΔK = 0,00036 i w rezultacie byłoby K = 0,98275 ± 0,00036. Jak widać, znaczna poprawa dokładności Tp wpłynęła w istotny sposób (o rząd wielkości) na poprawę dokładności wyniku K.

2.3. Błąd miary niezawodności struktury

Dla struktur mieszanych wartość stacjonarnego wskaźnika gotowości K_S można wyznaczać za pomocą wzorów analitycznych. Wykorzystuje się wzory dla struktury:
– szeregowej

$$K_S = \prod_{i=1}^{n} K_i \tag{9}$$

– równoległej

$$K_S = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - K_i\right) \tag{10}$$

– progowej (np. dla struktury niejednorodnej „2 z 3”)

$$K_S = \prod_{i=1}^{3} K_i + \sum_{i=1}^{3} \left(1 - K_i\right) \cdot \prod_{j \neq i} K_j \tag{11}$$

gdzie:
n – liczba elementów struktury,
K_i – wskaźnik gotowości i-tego elementu.

Błędy miar niezawodności poszczególnych elementów, zgodnie z prawem propagacji błędów, wpływają na dokładność wyniku końcowego. Ogólne wzory na błędy względne ΔK_S dla struktur można wyznaczyć, stosując dowolną z wymienionych w rozdz. 2 metod. Poniżej zastosowano metodę wzorów podstawowych oraz metodę różniczki zupełnej.

Załóżmy, że dla dwuelementowej struktury S dane są: przybliżone wartości stacjonarnych wskaźników gotowości elementów równe K_1, K_2 oraz błędy (niepewności), z jakimi te wartości zostały wyznaczone, równe ΔK_1 i ΔK_2.

Na podstawie definicji błędu mamy:
jeśli S jest strukturą szeregową, to $K_S = K_1 \cdot K_2$, stąd

$$\Delta K_S = K_S - K_S^0 = K_1 K_2 - (K_1 - \Delta K_1) \cdot (K_2 - \Delta K_2)$$

a po dokonaniu koniecznych przekształceń

$$\Delta K_S = \Delta K_1 \cdot K_2 + K_1 \cdot \Delta K_2 - \Delta K_1 \cdot \Delta K_2$$

– jeśli S jest strukturą równoległą, to $K_S = 1 - (1 - K_1) \cdot (1 - K_2)$, stąd

$$\Delta K_S = K_S - K_S^0 = 1 - (1 - K_1)(1 - K_2) - \left[1 - \left(1 - (K_1 - \Delta K_1)\right) \cdot \left(1 - (K_2 - \Delta K_2)\right)\right]$$

a po dokonaniu koniecznych przekształceń

$$\Delta K_S = \Delta K_1 + \Delta K_2 - \Delta K_1 \cdot K_2 - K_1 \cdot \Delta K_2 + \Delta K_1 \cdot \Delta K_2$$

Natomiast na podstawie różniczki zupełnej (3) mamy:

– jeśli S jest strukturą szeregową, to $\Delta K_S = \Delta K_1 \cdot K_2 + K_1 \cdot \Delta K_2$,

– jeśli S jest strukturą równoległą, to $\Delta K_S = \Delta K_1 + \Delta K_2 - \Delta K_1 \cdot K_2 - K_1 \cdot \Delta K_2$ lub $\Delta K_S = \Delta K_1 (1 - K_2) + \Delta K_2 (1 - K_1)$.

Jak widać, dla dwuelementowych struktur prostych wzory na ΔK_S różnią się o człony postaci $\Delta K_1 \cdot \Delta K_2$. Widać też, że metoda różniczki zupełnej jest łatwiejsza w stosowaniu. Na jej podstawie można podać wzór:

– dla struktury progowej „2 z 3”

$$\begin{aligned} K_S = {} & \left[K_2(1 - K_3) + (1 - K_2)K_3\right]\Delta K_1 + \left[K_1(1 - K_3) + (1 - K_1)K_3\right]\Delta K_2 + \\ & + \left[K_1(1 - K_2) + (1 - K_1)K_2\right]\Delta K_3 \end{aligned} \tag{12}$$

oraz ogólne, nieskomplikowane wzory dla struktur n-elementowych:

– szeregowej

$$\Delta K_S = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} K_j \cdot \Delta K_i \tag{13}$$

– równoległej

$$\Delta K_S = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} \left(1 - K_j\right) \cdot \Delta K_i \tag{14}$$

Na podstawie powyższych wzorów, bez przeprowadzania obliczeń, można przykładowo wnioskować, że błąd struktury:

– szeregowej rośnie, gdy wzrasta liczba elementów struktury n lub gdy wzrastają błędy względne miar elementów struktury ΔK_i; jednak w wypadku, gdy $K_1 \approx K_2$ oraz gdy błędy ΔK_i są duże, lecz $\left|\Delta K_1\right| \approx \left|\Delta K_2\right|$ i błędy mają przeciwne znaki (tzn. jeden z parametrów, Tp lub Tn, został przyjęty z nadmiarem, a drugi z niedomiarem), błąd ΔK może być bardzo mały,

– równoległej jest mały, gdy elementy są wysoce niezawodne ($K_j \approx 1$) lub gdy poszczególne błędy ΔK_i są małe.

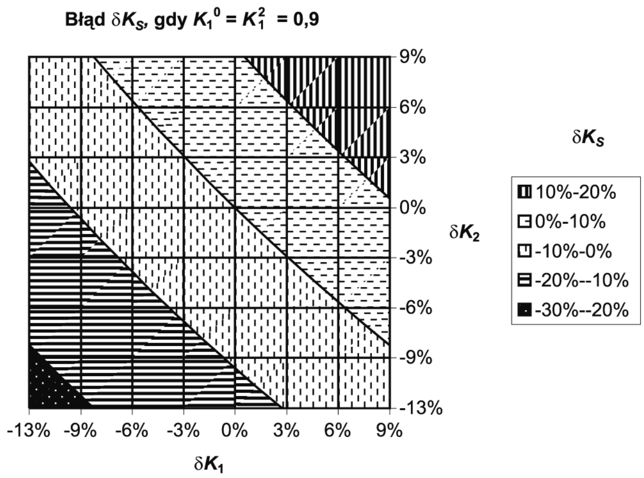
Aby dokładniej ocenić błąd, dla najprostszych przypadków (tj. dla dwu- i trójelementowych struktur szeregowej i równoległej oraz dla struktury progowej „2 z 3”), wykorzystując wzory oparte na definicji błędu, obliczono błędy ΔK_S oraz δK_S. Obliczenia prowadzono dla przypadków, gdy błędy $\Delta K_{1,}$ ΔK_2 $\in [-0{,}1;\ 0{,}1]$ z ograniczeniem $K_i = K_i^0 + \Delta K_i < 1.$ Wyniki zestawiono w tab. 1–3 oraz przedstawiono na wykresach (rys. 2 i 3).

T a b e l a 1

Maksymalne błędy $|\Delta K_S|$ oraz $|\delta K_S|$ dla *n*-elementowej struktury szeregowej dla przypadków, gdy ΔK_1, $\Delta K_2 \in [-0{,}1;\ 0{,}1]$

		$n = 2$		$n = 3$	
$K_1^0 = K_2^0$	max $\lvert\delta K_i\rvert$	$\lvert K_S\rvert$	$\lvert\delta K_S\rvert$	$\lvert K_S\rvert$	$\lvert\delta K_S\rvert$
0,80	13%	0,17	27%	0,24	42%
0,85	12%	0,18	25%	0,25	40%
0,90	11%	0,18	21%	0,27	37%
0,95	11%	0,19	20%	0,28	35%
0,99	10%	0,198	19%	0,297	33%

Uzyskane wyniki potwierdziły wcześniejsze spostrzeżenia. Poniżej (rys. 1) przedstawiono rozkład błędów δK_S dwuelementowej struktury szeregowej dla przypadku, gdy $K_1^0 = K_2^0 = 0{,}9.$ Z wykresu wynika wyraźnie, że błędy znoszą się, gdy $\Delta K_1 = -\Delta K_2$.



Rys. 2. Poziomice błędu względnego δK_S dla dwuelementowej struktury szeregowej, gdy $K_1{}^0 = K_2{}^0 = 0{,}9$

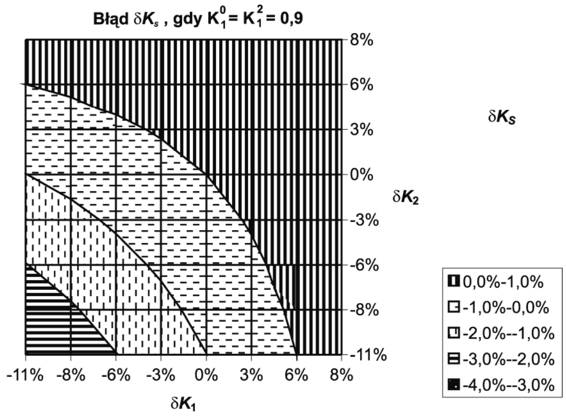
Fig. 2. Level lines of a relative error δK_S for a two-elements serial structure when $K_1{}^0 = K_2{}^0 = 0{,}9$

Tabela 2

Maksymalne błędy |ΔK_S| oraz |δK_S| dla *n*-elementowej struktury równoległej dla przypadków, gdy ΔK_1, $\Delta K_2 \in [-0,1; 0,1]$

		$n = 2$		$n = 3$	
$K_1^0 = K_2^0$	max $\lvert\delta K_i\rvert$	$\lvert K_S\rvert$	$\lvert\delta K_S\rvert$	$\lvert K_S\rvert$	$\lvert\delta K_S\rvert$
0,80	13%	0,05	5,2%	0,007	0,71%
0,85	12%	0,04	4,1%	0,003	0,33%
0,90	11%	0,03	3,0%	0,001	0,10%
0,95	11%	0,02	2,0%	0,0003	0,03%
0,99	10%	0,01	1,2%	0,0007	0,07%

Jak widać, błędy dla pojedynczych elementów struktury równoległej nie mają aż tak wielkiego wpływu na błąd końcowy jak dla struktury szeregowej. Na uwagę zasługuje jednak fakt, że gdy obie wartości K_1 oraz K_2 są wyznaczone z niedomiarem, błąd ΔK_S jest większy niż dla przypadku, gdy obie wartości K_1 oraz K_2 są wyznaczone z nadmiarem (rys. 3). Przykładowo, gdy $K_1^0 = K_2^0 = 0{,}9$, dla $\Delta K_1 = \Delta K_2 = 0{,}05$ mamy $\delta K_S = 0{,}75\%$, a dla $\Delta K_1 = \Delta K_2 = -0{,}05$ mamy $\delta K_S = -1{,}26\%$.



Rys. 3. Poziomice błędu względnego δK_S dla dwuelementowej struktury równoległej, gdy $K_1{}^0 = K_2{}^0 = 0{,}9$

Fig. 3. Level lines of a relative error δK_S for a two-elements parallel structure when $K_1{}^0 = K_2{}^0 = 0{,}9$

Dla struktury progowej „2 z 3” błędy |ΔK_S| oraz |δK_S| są mniejsze niż dla struktury szeregowej, lecz większe niż dla struktury równoległej (tab. 3).

Tabela 3

Maksymalne błędy $|\Delta K_S|$ oraz $|\delta K_S|$ dla struktury progowej „2 z 3" dla przypadków, gdy ΔK_1, $\Delta K_2 \in$ [-0,1; 0,1]

		„2 z 3"	
$K_1^0 = K_2^0$	max $\lvert\delta K_i\rvert$	$\lvert K_S\rvert$	$\lvert\delta K_S\rvert$
0,80	13%	0,112	12,5%
0,85	12%	0,095	10,2%
0,90	11%	0,076	7,8%
0,95	11%	0,054	5,4%
0,99	10%	0,033	3,3%

W praktycznych zastosowaniach błędy dla pojedynczych elementów różnych struktur na ogół nie przyjmują dużych wartości, więc i błędy końcowe nie są bardzo duże.

Przykład 3. Dla trzech elementów układu zasilania w wodę (tj. ujęcia wody powierzchniowej, zakładu uzdatniania wody i pompowni II stopnia) na podstawie danych empirycznych wyznaczono ich stacjonarne wskaźniki gotowości oraz niepewności. Wynoszą one, odpowiednio: K_1 = 0,975 ± 0,008, K_2 = 0,992 ± 0,001 oraz K_3 = 0,986 ± 0,004. Wyliczono K_S = 0,9536592 (wynik niezaokrąglony, tj. surowy) oraz za pomocą różniczki zupełnej wyznaczono $\Delta K_S = 0{,}012655$. Następnie zaokrąglono błąd $\Delta K_S = 0{,}013$ oraz zaokrąglono miarę niezawodności K_S. W rezultacie otrzymano K_S = 0,954 ± 0,013. Błędy względne dla niezawodności elementów struktury nie przekraczają 1%, a maksymalny błąd względny dla niezawodności struktury nie przekracza $\lvert\delta K_S\rvert \le 1{,}4\%$.

3. Podsumowanie

W artykule przedstawiono trzy podstawowe metody rachunku przybliżonego służące do oceny błędu wyniku obliczeń. Metody mogą być wykorzystane do oceny błędu wyznaczanych miar niezawodności obiektu bez wnikania w jego strukturę oraz przy uwzględnieniu struktury obiektu. W pierwszym przypadku są to miary pojedyncze (np. średni czas sprawności; rozdz. 2.1) i kompleksowe (np. stacjonarny wskaźnik gotowości; rozdz. 2.2). W drugim przypadku rozważano stacjonarny wskaźnik gotowości dla struktury mieszanej (rozdz. 2.3). Metody te zaprezentowano na przykładach. W zastosowaniach praktycznych łatwiejsza jest metoda różniczki zupełnej, czyli tzw. klasyczne prawo propagacji błędów. Inną możliwością niż zaprezentowane w tym artykule są metody statystyczne, które przedstawiono w następnym artykule (część II).

Literatura

[1] Bajer J., Iwanejko R., *Eksploatacyjne badania niezawodności podstawowych elementów uzbrojenia pompowni wodociągowych*, Instal (228) 10/2008.

[2] B j ö r c k A., D a h l a q u i s t G., *Metody numeryczne*, PWN, Warszawa 1983.
[3] B o b r o w s k i D., *Modele i metody matematyczne teorii niezawodności w przykładach i zadaniach*, WNT, Warszawa 1985.
[4] D a w i d o w i c z A.L., I w a n e j k o R., B a j e r J., *Metody wyznaczania oczekiwanego czasu poprawnej pracy między uszkodzeniami wysoce niezawodnych elementów pompowni*, Gospodarka Wodna 4(532), 1993.
[5] D o m a ń s k i Cz., P r u s k a K., *Nieklasyczne metody statystyczne*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne,Warszawa 2000.
[6] G r e ń J., *Statystyka matematyczna. Modele i zadania*, PWN, Warszawa 1982.
[7] I w a n e j k o R., B u d z i ł o B., *Uwagi do dwuparametrycznej metody wyznaczania niezawodności obiektów wodociągowych*, Czasopismo Techniczne, z. 7-Ś/2003, Wyd. PK, Kraków 2003.
[8] I w a n e j k o R., *Program obliczeniowy „Błędy”*, materiały niepublikowane, Kraków 2008.
[9] K r y s i c k i W. i in., *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach. Część II – Statystyka matematyczna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1994.
[10] K w i e t n i e w s k i M., R o m a n M., K ł o s s - T r ę b a c z k i e w i c z H., *Niezawodność wodociągów i kanalizacji*, Arkady, Warszawa 1993.
[11] K w i e t n i e w s k i M., *Metodyka badań eksploatacyjnych sieci wodociągowych pod kątem niezawodności dostawy wody do odbiorców*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1999.
[12] M i g d a l s k i J. (red.), *Poradnik niezawodności: podstawy matematyczne*, Wydawnictwo WEMA, Warszawa 1982.
[13] O k t a b a W., *Elementy statystyki matematycznej i metodyka doświadczalnictwa*, PWN, Warszawa 1980.
[14] P i o t r o w s k a M., *Ocena możliwości opisu zdarzeń losowych zachodzących w systemie zaopatrzenia w wodę za pomocą rozkładu Poissona*, praca dyplomowa na Wydziale Inżynierii Środowiska Politechniki Krakowskiej, Kraków 2002.
[15] P o ł o ż y G.N. i in., *Metody przybliżonych obliczeń*, WNT, Warszawa 1966.
[16] S o b c z y k M., *Statystyka*, PWN, Warszawa 1996.
[17] W i e c z y s t y A. i in., *Metody oceny i podnoszenia niezawodności działania komunalnych systemów zaopatrzenia w wodę*, Monografie Komitetu Inżynierii Środowiska Polskiej Akademii Nauk, Vol. 2, Kraków 2001.
[18] W ę g l a r c z y k S., *Metody statystyczne*, Wyd. PK, Kraków 1993.
[19] Z i e l i ń s k i R., *Tablice statystyczne*, PWN, Warszawa 1972.