NAUKI PODSTAWOWE
CZASOPISMO TECHNICZNE
TECHNICAL TRANSACTIONS
FUNDAMENTAL SCIENCES
WYDAWNICTWO POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ
1-NP/2009
ZESZYT 8
ROK 106
ISSUE 8
YEAR 106

JAN KOROŃSKI*

PROBLEM ODWROTNY DLA RÓWNANIA PARABOLICZNEGO W PRZESTRZENI NIESKOŃCZENIE WYMIAROWEJ

THE INVERSE PARABOLIC PROBLEM IN THE INFINITE DIMENSIONAL SPACE

S t r e s z c z e n i e

W artykule skonstruowano jawne rozwiązanie odwrotnego problemu parabolicznego (1)–(3) w nieskończenie wymiarowej przestrzeni kartezjańskiej.

Słowa kluczowe: *odwrotny problem paraboliczny, przestrzeń nieskończenie wymiarowa, warunek początkowy, warunek kontrolny*

A b s t r a c t

In this article we construct an explicit solution to the inverse initial-value parabolic problem (1)–(3) in the infinite dimensional Cartesian space.

Keywords: *inverse parabolic problem, infinite dimensional space, initial condition, control condition*

* Dr Jan Koroński, Instytut Matematyki, Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki Stosowanej, Politechnika Krakowska.

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

1. Wstęp

Klasycznie w zagadnieniach granicznych dla równań różniczkowych cząstkowych, mając dane warunki graniczne i prawą stronę równania różniczkowego rozważanego w określonym obszarze, szukamy funkcji, która spełnia rozważane równanie i warunki graniczne. Można jednak zapytać np. o to, jaka ma być prawa strona równania różniczkowego, aby w pewnym punkcie rozważanego obszaru rozwiązanie równania różniczkowego przyjmowało z góry określoną wartość (tzw. warunek kontrolny albo warunek sterowania). W takiej sytuacji prawa strona równania różniczkowego jest bądź nieznana, bądź też niecałkowicie zadana. Mówimy wtedy o tzw. zagadnieniach odwrotnych dla równań różniczkowych.

Zagadnienia odwrotne dla różnych typów równań cząstkowych można sklasyfikować w zależności od tego, jakie funkcje (oprócz rozwiązania równania) będą wyznaczane, a jakie są zadane w rozważanym zagadnieniu. Można wyróżnić następujące typy zagadnień odwrotnych:

1. Zagadnienia, w których wyznaczone są funkcje występujące w równaniu różniczkowym.
2. Brzegowe zagadnienia odwrotne, w których poszukiwana jest funkcja lub funkcje występujące w warunkach brzegowych.
3. Geometryczne zagadnienia odwrotne, w których poszukiwane są pewne geometryczne charakterystyki powierzchni będącej brzegiem pewnego obszaru lub opisu obszaru ograniczonego tą powierzchnią.
4. Zagadnienia retrospektywne (z warunkiem końcowym).

Występować mogą również zagadnienia mieszanych typów. Wśród zagadnień typu 1. można wyróżnić takie, w których poszukiwana jest funkcja źródła (prawa strona równania).

2. Sformułowanie zagadnienia odwrotnego dla równania parabolicznego w przestrzeni nieskończenie wymiarowej

W niniejszym artykule rozważamy następujący problem: Skonstruować parę funkcji (u, f) danych jawnymi wzorami i spełniających równanie różniczkowe typu parabolicznego w przestrzeni nieskończenie wymiarowej (które zostało wprowadzone do literatury przedmiotu w 2004 r. w [1]) i warunek początkowy typu Cauchy'ego oraz pewien warunek kontrolny. Dokładniej mówiąc, problem odwrotny dla równania parabolicznego w przestrzeni nieskończenie wymiarowej $R^{\infty}\times(0,T)$ polega na wyznaczeniu pary funkcji $(u(x,t),\ f(t))$, gdzie $x\in R^{\infty}$, $t\in(0,T)$, spełniających następujące równanie

$$[\sum_{i=1}^{\infty} D_{x_i}^2 - D_t]u(x,t)=\prod_{i=1}^{\infty}[\,f_i(x_i,t)\,f(t)+g_i(x_i,t)],\quad x=(x_1,x_2,...)\in R^{\infty} \tag{1}$$

w obszarze

$$D=\{(x,t): x_i\in(-\infty,\infty),\ i=1,2,...,\ t\in(0,T),\ T<\infty\},$$

a funkcja u spełnia ponadto następujący warunek początkowy

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

$$u(x,0)=\prod_{i=1}^{\infty} h_i(x_i), \quad x_i \in (-\infty,\ \infty), \quad i=1,\ 2,\ ... \tag{2}$$

i następujący tzw. warunek kontrolny

$$u(x_0,t)=h(t), \quad x_0=(x_1^0,\ x_2^0,...)\in R^{\infty}, \quad i=1,\ 2,\ ... \tag{3}$$

Punkt $x_0=(x_1^0,\ x_2^0,...)\in R^{\infty}$ jest dowolnym, ale ustalonym punktem. Funkcje f_i, g_i, h_i, $i=1,2,\dots$ oraz h są zadane i odpowiednio regularne.

3. Rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego dla równania parabolicznego w przestrzeni nieskończenie wymiarowej

Rozważamy następujące klasy regularnościowe funkcji:

Oznaczmy przez (Π) klasę wszystkich funkcji $h_i : R \to R$, takich że nieskończony iloczyn $\prod_{i=1}^{\infty} h_i(y_i)$, $y_i \in (-\infty,\ \infty)$, $i=1,\ 2,\ ...$ jest zbieżny.

Oznaczmy przez $C(R)\cap B(R)$ klasę wszystkich funkcji $h_i : R \to R$ ciągłych i ograniczonych na R.

Oznaczmy przez (K) klasę wszystkich funkcji $f_i : D_1 \to R$, $D_1=(-\infty,\infty)\times(0,T)$, takich że:

1. $f_i \in C^{1,0}(D_1)$, $i=1,\ 2,\ 3,\ ...$
2. $D_{y_i}^j f_i(-\infty,s)=D_{y_i}^j f_i(\infty,s)=0$, $s\in(0,T)$, $j=0,1,\ 2,$ $i=1,\ 2,\ 3$
3. $D_{y_i}^j \prod_{i=1}^{\infty} f_i(y_i,t)$ jest zbieżny dla $y_i \in (-\infty,\ \infty)$, $j=0,1,\ 2,\ ...$
4. $D_t \prod_{i=1}^{\infty} f_i(y_i,t)$ jest zbieżny dla $y_i \in (-\infty,\ \infty)$, $j=0,1,\ 2,\ ...$
5. comp.supp $f_i \subset (-\infty,\infty)\times(0,T)$, $i=1,\ 2,\ 3,\dots$

Z prac [1] i [2] wynika, że o ile $h_i \in (\Pi)$, $i=1,\ 2,\dots$ i jednocześnie $h_i \in C(R)\cap B(R)$ oraz jeśli $f_i \in (K)$, $i=1,\ 2,\dots,$ to rozwiązanie następującego problemu początkowego Cauchy'ego dla równania parabolicznego w przestrzeni $R^{\infty}\times(0,T)$, który polega na wyznaczeniu funkcji u spełniającej równanie

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} D_{x_i}^2 - D_t\right)u(x,t)=\prod_{i=1}^{\infty}\xi_i(x_i,t), \qquad x=(x_1,x_2,...)\ \in\ R^{\infty} \tag{4}$$

w obszarze

$$D=\{(x,\ t):\ x_i \in\ (-\infty,\ \infty),\ i=1,\ 2,\ ...,\ t\in(0,\ T\ ),\ T<\infty\ \}$$

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

i spełniającej następujący warunek początkowy

$$u(x,0)=\prod_{i=1}^{\infty} h_i(x_i), \quad x_i\in(-\infty,\ \infty), \quad i=1,2,... \tag{5}$$

istnieje i ma postać

$$u(x,t)=\prod_{i=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_i(y_i)U_i(x_i,t;y_i,0)dy_i+\int_0^t\int_{R^\infty}\prod_{i=1}^{\infty}\xi_i(y_i,s)U_i(x_i,t;y_i,s)dy_i ds, \tag{6}$$

gdzie

$$x=(x_1,x_2,...)\in R^\infty, \quad t\in(0,T),$$

$$U_i(x_i,t;y_i,s)=(t-s)^{-\frac{1}{2}}\exp(B(t,s)(x_i-y_i)^2), \quad B(t,s)=(-4(t-s))^{-1}.$$

4. Równanie całkowe na nieznany składnik prawej strony równania różniczkowego

Z równań (3) i (6) otrzymujemy następujące równanie całkowe

$$\prod_{i=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_i(y_i)U_i(x_i^0,t;y_i,0)dy_i+\int_0^t\int_{R^\infty}\prod_{i=1}^{\infty}\xi_i(y_i,s)U_i(x_i^0,t;y_i,0)dy_i ds=h(t) \tag{7}$$

dla dowolnego $t\in(0,\ T)$. Podstawiając w (7)

$$\xi_i(y_i,s)=\prod_{i=1}^{\infty}[f_i(y_i,s)f(s)+g_i(y_i,s)]$$

otrzymujemy następujące równanie całkowe typu Volterry pierwszego rodzaju na funkcję f

$$\prod_{i=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_i(y_i)U_i(x_i^0,t;y_i,0)dy_i+\int_0^t\int_{R^\infty}\prod_{i=1}^{\infty}[f_i(y_i,s)f(s)+g_i(y_i,s)]U_i(x_i^0,t;y_i,s)dy_i ds=h(t),$$

które można zapisać następująco

$$\begin{aligned}&\prod_{i=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_i(y_i)U_i(x_i^0,t;y_i,0)dy_i+\int_0^t\int_{R^\infty}\prod_{i=1}^{\infty} f_i(y_i,s)f(s)U_i(x_i^0,t;y_i,s)dy_i ds+\\&\qquad+\int_0^t\int_{R^\infty}\prod_{i=1}^{\infty} g_i(y_i,s)U_i(x_i^0,t;y_i,s)dy_i ds=h(t), \quad t\in(0,T).\end{aligned} \tag{8}$$

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

5. Rozwiązanie równania całkowego i twierdzenie o istnieniu i o postaci rozwiązania zagadnienia odwrotnego (1)–(3)

Twierdzenie. Jeżeli $h_i \in (\Pi)$, $i = 1, 2, \ldots$ i jednocześnie gdy $h_i \in C(R) \cap B(R)$ oraz jeśli $f_i \in (K)$, $i = 1, 2, \ldots$, i jeśli ponadto $0 < C_1 < f_i < C_2$, gdzie C_1, C_2 są pewnymi stałymi, to wówczas para funkcji (u, f) określonych wzorami (6) i (22) jest rozwiązaniem problemu odwrotnego (1)–(3).

Dowód. Wobec rozważań zawartych w rozdz. 3, gdzie podano efektywnym wzorem rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego w przestrzeni nieskończenie wymiarowej dla rozważanego w artykule równania różniczkowego i wobec rozważań z rozdz. 4, gdzie wypisano równanie całkowe (8) na nieznany składnik prawej strony równania różniczkowego, dla dowodu sformułowanego twierdzenia o rozwiązaniu zagadnienia odwrotnego (1)–(3) wystarczy pokazać, że równanie całkowe (8) ma jedyne rozwiązanie ciągłe w przedziale $[0, T]$.

Powyższe równanie (8) sprowadzamy do równania całkowego typu Volterry drugiego rodzaju, które następnie rozwiązujemy efektywnie w znany sposób. Zapiszemy równanie całkowe (8) w następującej postaci

$$\int_0^t N(t,s) f(s) ds = K(t), \tag{9}$$

gdzie

$$K(t) = h(t) - \prod_{i=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_i(y_i) U_i(x_i^0, t; y_i, 0) dy_i - \int_0^t \int_{R^\infty} \prod_{i=1}^{\infty} g_i(y_i, s) U_i(x_i^0, t; y_i, s) dy_i ds$$

oraz

$$N(t,s) = \int_{R^\infty} \prod_{i=1}^{\infty} [f_i(y_i, s) U_i(x_i^0, t; y_i, s) dy_i = (t-s)^{-\frac{1}{2}} C(x_i^0, t, s),$$

gdzie z kolei

$$C(x_i^0, t, s) = \int_{R^\infty} \prod_{i=1}^{\infty} [f_i(y_i, s) \exp(-(x_i^0 - y_i)^2)(4(t-s))^{-1}] dy_i.$$

Z (9) otrzymujemy równanie całkowe w następującej postaci

$$\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} C(x_i^0, t, s) f(s) ds = K(t). \tag{10}$$

Stosując w równaniu (10) transformację Abela ([3], Vol. I, s. 16), otrzymujemy równoważne równanie całkowe w postaci

$$\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} [\int_0^s (s-s_1)^{-\frac{1}{2}} C(x_i^0, s, s_1) f(s_1) ds_1] ds = \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} K(t) ds \tag{11}$$

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Zamieniając w (11) porządek całkowania, otrzymujemy równoważne równanie całkowe

$$\int_0^t \Big[\int_0^s (t-s)^{-\frac{1}{2}}(s-s_1)^{-\frac{1}{2}} C(x_i^0, s, s_1)ds\Big] f(s_1)ds_1 = F(t), \tag{12}$$

gdzie

$$F(t) = \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} K(t)ds. \tag{13}$$

Całkując (13) przez części, otrzymujemy

$$F(t) = (t-s)^{-\frac{1}{2}} K(s)\Big|_{s=0}^{s=t} + 2\int_0^t (t-s)^{\frac{1}{2}} D_s K(s)ds = 2\int_0^t (t-s)^{\frac{1}{2}} D_s K(s)ds$$

ponieważ z założenia $K(0) = 0$.

Stosując teraz zamianę zmiennych

$$s = s_1 + (t-s_1)u, \quad ds = (t-s_1)du, \quad u \in (0,1)$$

otrzymujemy równoważne równanie całkowe do równania (12)

$$\int_0^t \Big[\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}} C(x_i^0, s_1 + (t-s_1)u, s_1)du\Big] f(s_1)ds_1 = F(t). \tag{14}$$

Możemy równanie (14) zapisać w postaci

$$\int_0^t K(t, s_1) f(s_1)ds_1 = F(t), \tag{15}$$

gdzie

$$K(t, s_1) = \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}} C(x_i^0, s_1 + (t-s_1)u, s_1)du. \tag{16}$$

Różniczkując stronami równość (15), otrzymujemy

$$K(t,t) f(t) + \int_0^t D_t K(t, s_1) f(s_1)ds_1 = D_t F(t). \tag{17}$$

Z równania (17) otrzymujemy

$$f(t) = M(t) + \int_0^t E(t, s_1) f(s_1)ds_1, \tag{18}$$

gdzie

$$M(t) = D_t F(t), \quad E(t, s_1) = -(K(t,t))^{-1} D_t K(t, s_1), \quad K(t,t) \neq 0.$$

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Równanie (18) możemy zapisać w następującej postaci

$$f(t) = M(t) + \int_0^t E(t,s) f(s) ds. \tag{19}$$

Rozważmy równanie całkowe typu Volterry drugiego rodzaju z parametrem λ w następującej postaci

$$f(t,\lambda) = M(t) + \lambda \int_0^t E(t,s) f(s) ds. \tag{20}$$

Na podstawie [3], Vol. 2, s. 4 wiadomo, że istnieje jedyne ciągłe na przedziale $[0, T]$ rozwiązanie równania całkowego (20) i ma ono postać

$$f(t,\lambda) = M(t) + \lambda \int_0^t R(t,s,\lambda) M(s) ds, \tag{21}$$

gdzie

$$R(t,s,\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} N_i(t,s),$$

$$N_0(t,s) = E(t,s),$$

$$N_i(t,s) = \int_0^t N_0(t,s_1) N_{i-1}(s_1,s) ds_1, \quad i = 1, 2, 3, \ldots.$$

Funkcja określona wzorem (21) dla $\lambda = 1$ przyjmuje postać

$$f(t,1) = f(t) = M(t) + \int_0^t R(t,s,1) M(s) ds, \tag{22}$$

gdzie

$$R(t,s,1) = \sum_{i=0}^{\infty} N_i(t,s),$$

$$N_0(t,s) = E(t,s),$$

$$N_i(t,s) = \int_0^t N_0(t,s_1) N_{i-1}(s_1,s) ds_1, \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

i funkcja ta jest jedynym ciągłym w przedziale $[0, T]$ rozwiązaniem równania całkowego (19). Zatem dowód twierdzenia o istnieniu i o postaci rozwiązania rozważanego zagadnienia odwrotnego (1)–(3) jest zakończony.

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

L i t e r a t u r a

[1] K o r o ń s k i J., *Parabolic problem in the space* R^{∞}, Commentationes Mathematicae XLIV (1), 2004, 301-306.

[2] K o r o ń s k i J., *Nonhomogeneous parabolic problem in the space* R^{∞}, Fasciculi Mathematici 38, 2007, 41-45.

[3] P o g o r z e l s k i W., *Równania całkowe i ich zastosowania*, Vol. 1 i Vol. 2, PWN, Warszawa 1958.

BIBLIOTEKA CYFROWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ