

BARBARA BOROWIK*, BOHDAN BOROWIK**, SOPHIE LAIRD***

POWIĄZANIA POMIĘDZY
ROZMYTYMI PAMIĘCIAMI ASOCJACYJNYMI
I ROZMYTĄ MORFOLOGIĄ MATEMATYCZNĄCONNECTIONS BETWEEN
FUZZY ASSOCIATIVE MEMORIES
AND FUZZY MATHEMATICAL MORPHOLOGY

Streszczenie

Wewnętrzne podobieństwo rozmytych pamięci asocjacyjnych FAM (wprowadzonych w 1992 r. przez B. Kosko, a potem intensywnie badanych przez innych) do rozmytej morfologii matematycznej stało się przyczyną rozwoju nowych rozmytych morfologicznych pamięci asocjacyjnych FMAMs jako podklasy klasy FAM. Analiza sieci FMAM oraz FAM w kontekście operacji rozmytej morfologii matematycznej, możliwych do realizowania w każdym neuronie tych sieci, pozwala na głębsze poznanie właściwości i możliwości tych sieci, na ich dalszą eksplorację oraz na konstrukcję (na ich bazie) nowych modeli sieci. W artykule przedstawiono ogólną charakterystykę cech wspólnych rozmytych pamięci FAM i rozmytej morfologii matematycznej FMM.

Słowa kluczowe: rozmyte morfologiczne pamięci asocjacyjne, rozmyta morfologia matematyczna, rozmyta dylacja, rozmyta erozja

Abstract

Internal similarity of fuzzy associative memories FAM (introduced in 1992 by B. Kosko, and then extensively researched by others) to fuzzy mathematical morphology has become the reason for a development of new models of fuzzy morphological associative memories (FMAMs), which belong to the FAM class. The analysis of FMAM and FAM in the context of fuzzy mathematical morphology operations that are possible to realize in every neuron of these nets, allows for a deeper understanding of the properties of these nets and their further exploration or a construction (on their basis) new fuzzy morphological neural network models. This article presents a general characteristics of common attributes and similar internal properties of fuzzy associative memories and fuzzy mathematical morphology.

Keywords: fuzzy morphological associative memories, fuzzy mathematical morphology, fuzzy dilation, fuzzy erosion

* Dr Barbara Borowik, Instytut Modelowania Komputerowego, Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki Stosowanej, Politechnika Krakowska.

** Dr inż. Bohdan Borowik, Katedra Elektrotechniki i Automatyki, Wydział Budowy Maszyn i Informatyki, Akademia Techniczno-Humanistyczna w Bielsku Białej.

*** M.Sc. Sophie Laird, Department of e-Business & Technology Management, Towson University, Maryland State, USA.

Oznaczenia

- AM – pamięć asocjacyjna (*associative memory*)
 FMAM – rozmyta morfologiczna pamięć asocjacyjna (*fuzzy morphological associative memory*)
 FMM – rozmyta morfologia matematyczna (*fuzzy mathematical morphology*)
 FMNN – rozmyta morfologiczna sieć neuronowa (*fuzzy morphological neural network*)
 IFAM – implikatywna rozmyta pamięć asocjacyjna (*implicative fuzzy associative memory*)
 MM – morfologia matematyczna (*mathematical morphology*)

1. Wstęp

Morfologia matematyczna (*mathematical morphology*, MM) została wprowadzona w latach 60. XX w. przez G. Matherona i J. Serrę w celu umożliwienia lepszej analizy obrazów binarnych [18]. W latach 80. J. Serra i S. Sternberg pomyślnie rozszerzyli i uogólnili binarną morfologię matematyczną do rozmytej morfologii matematycznej (FMM), pozwalającej na analizę obrazów w odcieniach szarości (*gray-scale*) [9, 10, 19, 23].

W ciągu następnego dziesięciolecia MM oraz FMM stopniowo uzyskiwały swój specjalny status w takich dziedzinach, jak przetwarzanie obrazów, rozpoznawanie wzorców czy spostrzeganie komputerowe. Aplikacje MM i FMM związane są np. z segmentacją i rekonstrukcją obrazów, z badaniem cech obiektów (*feature detection*) czy z dekompozycją sygnału [9, 10, 16, 17, 23, 25].

2. Znaczenie struktury kraty zupełnej w morfologii matematycznej

Podstawy MM można odnaleźć w teorii krat, która jest związana ze strukturami algebraicznymi powstałymi poprzez wprowadzenie do zbioru relacji porządku [1, 9, 10, 17, 18, 23] (przykładem kraty jest dowolna algebra Boole'a).

Krata X jest zupełna (*a complete lattice*), jeżeli każdy (skończony lub nieskończony) podzbiór ma kres dolny i górny w tym podzbiorniku [17]. Na przykład rozszerzony zbiór liczb rzeczywistych $\mathbf{R}_{\pm\infty}$ oraz przedział $[0,1]$ reprezentują specyficzne przykłady krat zupełnych [17]. Co więcej, zbiór funkcji ze zbioru U (gdzie U np. jest zbiorem skończonym, tj. $U = \{u_1, \dots, u_n\}$) do przedziału $[0,1]$, oznaczony przez $[0,1]^U$, dziedziczy po przedziale $[0,1]$ strukturę kraty zupełnej w terminach następującego częściowego porządku [17]

$$\text{Dla każdego } x, y \in [0,1]^U \text{ mamy: } x \leq y \Leftrightarrow x(u) \leq y(u) \quad \forall u \in U. \quad (1)$$

Często w literaturze przedmiotu kres dolny zbioru $Y \subset X$ (gdzie zbiór X jest kratą) jest oznaczony jako $\wedge Y$, a przez $\wedge_{j \in J} y_j$ oznaczony jest kres dolny (*infimum*) zbioru $Y = \{y_j: j \in J\}$, po wszystkich elementach y_j tego zbioru. Analogiczne oznaczenie $\vee Y$ jest często w publikacjach zagranicznych przyjęte dla kresu górnego (*supremum*) zbioru Y , oraz $\vee_{j \in J} y_j$ – dla *supremum* tego zbioru, po wszystkich jego elementach y_j , kiedy bezpośrednio możemy te elementy wskazać.

3. Główne operacje morfologii matematycznej

Elementarnymi operacjami MM są operacje **erozji**, **dylacji**, **antyerozji** oraz **anty-dylacji** [8]. Te cztery operatory są zdefiniowane następująco:

Niech \mathbf{L} i \mathbf{M} oznaczają struktury algebraiczne krat zupełnych.

Operator $\varepsilon: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{M}$ reprezentuje **operację erozji** wtedy i tylko wtedy, gdy [17]

$$\varepsilon(\wedge Y) = \wedge_{y \in Y} \varepsilon(y), \quad \forall Y \subseteq \mathbf{L} \quad (\text{tj. } \varepsilon \text{ jest przemienne z operacją } \textit{infimum}). \quad (2)$$

Operator $\delta: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{M}$ reprezentuje **operację dylacji** wtedy i tylko wtedy, gdy [17]

$$\delta(\vee Y) = \vee_{y \in Y} \delta(y), \quad \forall Y \subseteq \mathbf{L} \quad (\text{tj. } \delta \text{ jest przemienne z operacją } \textit{supremum}). \quad (3)$$

Operator $\bar{\varepsilon}: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{M}$ reprezentuje **operację antyerozji** wtedy i tylko wtedy, gdy [17]

$$\bar{\varepsilon}(\wedge Y) = \vee_{y \in Y} \bar{\varepsilon}(y), \quad \forall Y \subseteq \mathbf{L}. \quad (4)$$

Operator $\bar{\delta}: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{M}$ reprezentuje **operację antydylacji** wtedy i tylko wtedy, gdy [17]

$$\bar{\delta}(\vee Y) = \wedge_{y \in Y} \bar{\delta}(y), \quad \forall Y \subseteq \mathbf{L}. \quad (5)$$

Ważnymi pojęciami MM są pojęcia **sprzężenia** (*adjunction*) i **negacji**. Operacją **negacji** w strukturze kraty zupełnej \mathbf{L} jest **inwolucyjna bijekcja** $\nu_L: \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}$, która odwraca częściowy porządek [17]. Na przykład operator $N_s(x) = 1 - x$ reprezentuje operację negacji na przedziale $[0,1]$.

Peter Sussner udowodnił m.in., że **negacją operacji erozji jest operacja dylacji**, i **negacją operacji dylacji jest operacja erozji** [21, 25].

Jednym z najważniejszych rezultatów rozwiniętej teorii morfologii matematycznej jest twierdzenie z 1993 r. Banona i Barrery [1], którzy udowodnili, że każde odwzorowanie ϕ z jednej kraty zupełnej w inną kratę zupełną można rozpisać jako *supremum* infimów par złożonych z operacji **erozji** i **anty-dylacji**, tj. istnieje operacja erozji ε^i , **anty-dylacji** $\bar{\delta}^i$ oraz zbiór indeksów I , taki, że [1]

$$\phi = \bigvee_{i \in I} (\varepsilon^i \wedge \bar{\delta}^i). \quad (6)$$

Analogicznie, odwzorowanie ϕ można rozpisać jako *infimum* **supremów** par złożonych z operacji **dylacji** i **antyerozji**. W wyjątkowym przypadku, gdy ϕ jest funkcją rosnącą, funkcję ϕ można rozpisać jako *supremum* **erozji** lub jako *infimum* **dylacji** [1].

Ten ważny wniosek otrzymany przez Banona i Barrerę [1] spowodował, że podczas ostatniego dziesięciolecia wielu badaczy zaczęło stosować elementarne operacje morfologii matematycznej jako **nową funkcję agregacji sztucznych neuronów w klasie sztucznych sieci neuronowych**, tworząc nową klasę tych sieci, zwaną **morfologicznymi sieciami neuronowymi** [16, 17, 21].

4. Morfologiczne sieci neuronowe

Teorie minimax algebry i matematycznej morfologii są ściśle spokrewnione, chociaż były rozwijane dla zupełnie odmiennych celów [25]. Jedną z podstawowych struktur algebraicznych występujących w minimax algebrze jest struktura $(\mathbf{R}_{\pm\infty}, \vee, \wedge, +, +')$, która reprezentuje grupę ograniczonych, uporządkowanych krat (*bounded lattice ordered group*, blog) [21, 25]. Wiele modeli morfologicznych sieci neuronowych jest wewnętrznie zakorzenionych w tej właśnie strukturze matematycznej. Symbole „ \vee ” oraz „ \wedge ” reprezentują operacje maksimum i minimum. Operacje „ $+$ ” oraz „ $+$ '” działają jak zwykłe operacje sumowania i są identyczne na zbiorze $\mathbf{R}_{\pm\infty}$ z następującymi wyjątkami [17, 25]

$$(-\infty) + (+\infty) = (+\infty) + (-\infty) = -\infty \quad \text{oraz} \quad (-\infty) + ' (+\infty) = (+\infty) + ' (-\infty) = +\infty. \quad (7)$$

W praktyce wektory wejściowe i wektory synaptyczne morfologicznej sieci neuronowej mają wartości w \mathbf{R} , gdzie operacje „ $+$ ” oraz „ $+$ '” są jednakowe.

W większości przypadków modele morfologicznych sieci neuronowych są zdefiniowane w terminach iloczynów macierzowych – nazywanych **max** iloczynami (oznaczane symbolem \boxtimes lub symbolem \otimes) oraz **min** iloczynami (oznaczane symbolem \boxminus lub symbolem \oplus) [25].

I tak na przykład dla wektora wejściowego tej sieci, $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$ oraz wektora $\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_n]^T \in \mathbf{R}^n$ akumulowany rezultat tych dwóch wektorów w prostym neuronie morfologicznym dany jest w jednej z poniżej przywołanych form [25]

$$\mathbf{w}^T \boxtimes \mathbf{x} = \bigvee_{i=1}^n (w_i + x_i) \quad \text{lub} \quad \mathbf{w}^T \boxminus \mathbf{x} = \bigwedge_{i=1}^n (w_i + ' x_i). \quad (8)$$

Ponieważ struktura $(\mathbf{R}_{\pm\infty}, \vee, \wedge, +, +')$ grupy ograniczonych, uporządkowanych krat jest izomorficzna do struktury $([0, \infty], \vee, \wedge, \cdot, \cdot')$ grupy ograniczonych, uporządkowanych krat, dla izomorfizmu równego $\phi(x) = e^x$ (przy założeniu, że $e^{-\infty} = 0$ oraz $e^{\infty} = \infty$) w morfologicznych sieciach neuronowych można również stosować operację mnożenia (zamiast operacji dodawania, czyli $w_i \cdot x_i$ zamiast $w_i + x_i$ lub $w_i + ' x_i$) [25]. W odniesieniu do struktury $([0, \infty], \vee, \wedge, \cdot, \cdot')$ odpowiednie wyjątki mają postać [25]

$$0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0 \quad \text{oraz} \quad 0 \cdot ' \infty = \infty \cdot ' 0 = +\infty \quad (9)$$

Tak więc w strukturze $([0, \infty], \vee, \wedge, \cdot, \cdot')$ odpowiednikiem wzorów z równania (7), stosowanych w morfologicznych neuronach, będą następujące iloczyny [25]

$$\mathbf{w}^T \boxtimes \mathbf{x} = \bigvee_{i=1}^n (w_i \cdot x_i) \quad \text{lub} \quad \mathbf{w}^T \boxminus \mathbf{x} = \bigvee_{i=1}^n (w_i \cdot ' x_i). \quad (10)$$

Mając dany wektor wejściowy $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_{\pm\infty}^n$, wektor wag synaptycznych $\mathbf{w} \in \mathbf{R}_{\pm\infty}^{l \times n}$ oraz funkcję aktywacji f , **morfologiczny neuron oblicza sygnał wyjściowy** $y = f(g_w(\mathbf{x}))$,

gdzie funkcja $g_w(\mathbf{x})$ jest jedną z czterech wcześniej wspomnianych operacji morfologicznych [17], tj. albo

$$\text{operacji erozji: } \varepsilon_w(\mathbf{x}) = \wedge_{i=1}^n (x_i + w_i); \quad (11)$$

$$\text{albo operacji dylacji: } \delta_w(\mathbf{x}) = \vee_{i=1}^n (x_i + w_i); \quad (12)$$

$$\text{albo antyerozji: } \bar{\varepsilon}_w(\mathbf{x}) = \vee_{i=1}^n (-x_i + w_i); \quad (13)$$

albo operacji **antydylacji** z jednej kraty zupełnej do drugiej kraty zupełnej

$$\bar{\delta}_w(\mathbf{x}) = \wedge_{i=1}^n (-x_i + w_i). \quad (14)$$

Poprzez obliczanie maksimum (lub minimum) sum (lub iloczynów) zamiast sumy iloczynów podstawowa operacja morfologicznej sieci neuronowej stała się nieliniowa już przed zastosowaniem każdej dodatkowej nieliniowej funkcji aktywacji.

Ogólnie, w morfologii matematycznej, dla $m \times p$ wymiarowej macierzy \mathbf{A} oraz $p \times n$ wymiarowej macierzy \mathbf{B} o elementach należących do $\mathbf{R}_{\pm\infty}$, wynikowa macierz \mathbf{C} , będąca **max** iloczynem macierzy \mathbf{A} i \mathbf{B} (tj. $\mathbf{A} \boxtimes \mathbf{B}$) oraz wynikowa macierz \mathbf{D} , będąca **min** iloczynem macierzy \mathbf{A} i \mathbf{B} (tj. $\mathbf{A} \boxdot \mathbf{B}$), zdefiniowane są następująco [16, 17]

$$c_{ij} = \vee_{k=1}^p (a_{ik} + b_{kj}) \quad \text{oraz} \quad d_{ij} = \wedge_{k=1}^p (a_{ik} + b_{kj}) \quad (15)$$

5. Rozmyta morfologia matematyczna FMM

5.1. Ważniejsze operacje logiki rozmytej

Niech $F(U) = [0,1]^U$ oznacza klasę zbiorów rozmytych w U . W szczególności, jeżeli $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ jest zbiorem skończonym, wtedy $\mathbf{x} \in F(U) = [0,1]^U$ będzie reprezentowany przez wektor kolumnowy $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in [0,1]^n$, gdzie $x_j = \mathbf{x}(u_j)$ jest stopniem przynależności u_j w \mathbf{x} : $\forall j = 1, \dots, n$.

Niech $\mathbf{x} \in [0,1]^n$ oraz $\mathbf{y} \in [0,1]^m$.

Operacje logiczne z logiki nierozmytej, tj. operacje: koniunkcji, alternatywy, implikacji oraz negacji – zostały w logice rozmytej rozszerzone do operacji: koniunkcji rozmytej, alternatywy rozmytej, implikacji rozmytej oraz negacji rozmytej.

Odwzorowanie $C: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ jest **koniunkcją rozmytą** (*fuzzy conjunction*) (będącą rozszerzeniem koniunkcji nierozmytej¹), jeżeli jest odwzorowaniem rosnącym dla obu swych argumentów, spełniającym warunki [19]: $C(0,0) = C(0,1) = C(1,0) = 0$ i $C(1,1) = 1$.

¹ Koniunkcja nierozmyta dwóch predykatów p i q jest zdefiniowana na dwuwartościowych zbiorach boolowskich: $\{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$.

Przykładami bardziej popularnych definicji koniunkcji rozmytych są np.

$$C_{\text{Min}}(x, y) = x \wedge y \text{ (minimum),}$$

$$C_{\text{Product}}(x, y) = xy \text{ (iloczyn)}$$

oraz $C_{\text{Lukasiewicz}}(x, y) = 0 \vee (x + y - 1)$ (rozmyta koniunkcja Łukasiewicza).

Wszystkie te trzy przykłady reprezentują ciągłe t -normy [25].

Dodatkowo, operatory $C_{\text{Min}}(x, y)$, $C_{\text{Product}}(x, y)$ oraz $C_{\text{Lukasiewicz}}(x, y)$ **koniunkcji rozmytych** na przedziale $[0, 1]$ **reprezentują dla obu swych argumentów operację dylacji** [25].

Odzworowanie $D: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ jest **alternatywą rozmytą** (*fuzzy disjunction*) (będącą rozszerzeniem alternatywy nierozmytej), jeżeli jest odzworowaniem rosnącym dla obu swych argumentów, spełniającym warunki [19]: $D(0,0) = 0$ i $D(0,1) = D(1,0) = D(1,1) = 1$.

Przykładami bardziej popularnych definicji alternatyw rozmytych są [25]

$$D_{\text{Max}}(x, y) = x \vee y \text{ (maximum),}$$

$$D_{\text{Prob. sum}}(x, y) = x + y - x \cdot y \text{ (suma probabilistyczna)}$$

$$\text{oraz } D_{\text{Lukasiewicz}}(x, y) = 1 \wedge (x + y) \text{ (Łukasiewicza).}$$

Dodatkowo, operatory $D_{\text{Max}}(x, y)$, $D_{\text{Prob. sum}}(x, y)$ oraz $D_{\text{Lukasiewicz}}(x, y)$ **alternatyw rozmytych** na przedziale $[0,1]$ **reprezentują dla obu swych argumentów operację erozji** [25].

Odzworowanie $I: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, które jest malejące w swym pierwszym argumencie oraz rosnące w swym drugim argumencie, nazywa się **implikacją rozmytą** (*fuzzy implication*), jeżeli jest rozszerzeniem implikacji nierozmytej zdefiniowanej na $\{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$, tj. jeżeli spełnia warunki [19]: $I(1,0) = 0$ i $I(0,0) = I(0,1) = I(1,1) = 1$.

Negacja na przedziale $[0,1]$ zwana jest negacją rozmytą [25]. Jej przykładem są następujące operatory unarne [25]

$$N_s(x) = 1 - x;$$

$$N_D(x) = \frac{1-x}{1+px}, \quad p > -1,$$

$$N_R(x) = \sqrt[p]{1-x^p}, \quad p \in (0, \infty).$$

Rozmyta koniunkcja i rozmyta alternatywa mogą być połączone relacją dualności poprzez operację negacji lub sprzężenia (*adjunction*). I tak na przykład pary $(C_{\text{Min}}, D_{\text{Max}})$, $(C_{\text{Product}}, D_{\text{Prob. sum}})$ oraz $(C_{\text{Lukasiewicz}}, D_{\text{Lukasiewicz}})$ – są operatorami dualnymi ze względu na standardową negację rozmytą [25], tj. $N_s(x) = 1 - x$.

Operatory rozmytej implikacji i rozmytej alternatywy są operatorami dualnymi ze względu na operator rozmytej negacji [21, 25]

$$I(x, y) = D(N(x), y). \quad (16)$$

W strukturze kraty zupełnej można wskazać dużo innych ciekawych wzajemnych dualnych i sprzężonych relacji pomiędzy operacjami rozmytej koniunkcji, rozmytej

alternatywy, rozmytej implikacji, odwrotnej rozmytej implikacji oraz rozmytej negacji. Zostały one omówione i udowodnione głównie w najnowszych pracach P. Sussnera [25].

5.2. Operacje w rozmytej morfologii matematycznej

Rozmyta morfologia matematyczna (FMM) jest rozszerzeniem binarnej morfologii matematycznej, bazującym na technikach teorii zbiorów rozmytych [19].

Wielu badaczy próbowało wyznaczyć różne podejścia do zdefiniowania FMM. Wśród nich są De Baets, Sinha i Dougherty, Bloch i Maitre, Deng i Heijmans oraz Maragos. Klasyfikacja tych podejść została opisana w pracy [25]. Podejścia te wyznaczane są przez specyfikę definiowania operacji rozmytej erozji oraz rozmytej dylacji, jako że rozmytą antyerozję i rozmytą antydylację można otrzymać z operacji negacji, rozmytej erozji i rozmytej dylacji [21].

Jedną z najbardziej popularnych definicji rozmytej erozji i rozmytej dylacji jest definicja podana w pracy [24]:

Funkcja $\varepsilon_F : F(U) \rightarrow F(V)$ jest **funkcją rozmytej erozji** wtedy i tylko wtedy, gdy ε_F jest funkcją erozji w zwykłym sensie, określonym równaniem (2), tj. gdy $\varepsilon_F(\wedge Y) = \wedge_{y \in Y} \varepsilon_F(y)$, $\forall Y \subseteq \mathbf{L}$ (tj. ε_F jest przemienne z operacją *infimum*) [25].

Funkcja $\delta_F : F(U) \rightarrow F(V)$ jest **funkcją rozmytej dylacji** wtedy i tylko wtedy, gdy δ_F jest funkcją dylacji w zwykłym sensie, określonym równaniem (3), tj. gdy $\delta_F(\vee Y) = \vee_{y \in Y} \delta_F(y)$, $\forall Y \subseteq \mathbf{L}$ (tj. δ_F jest przemienne z operacją *supremum*) [25].

Funkcje rozmytej erozji i rozmytej dylacji łączą wejściowy zbiór rozmyty $\mathbf{x} \in F(U)$ z rozmytym elementem struktury $\mathbf{w} \in F(U)$ i generują wyjściowy zbiór rozmyty $\mathbf{y} \in F(V)$.

Specyficzne wybory rozmytych erozji mogą być zdefiniowane jako infima rozmytych implikacji lub rozmytych alternatyw [25]. Na przykład jeżeli $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ i jeżeli $C(w, \cdot)$ jest funkcją dylacji dla każdego $w \in [0,1]$, wtedy otrzymamy funkcję rozmytej dylacji *Fuzzy_dilation*(\cdot, \mathbf{w}): $F(U) \rightarrow [0,1]$ poprzez definicję [25]

$$\text{Fuzzy_dilation}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \bigvee_{i=1}^n C(w_i, x_i) = \mathbf{w}^T \circ \mathbf{x}. \quad (17)$$

W powyższym wzorze zamiast C można podstawić dowolny rodzaj rozmytej koniunkcji (np. $C_{\text{Min}}(x, y) = x \wedge y$, $C_{\text{Product}}(x, y) = xy$ lub $C_{\text{Lukasiewicz}}(x, y) = 0 \vee (x + y - 1)$).

Jeżeli $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ i jeżeli operacja rozmytej implikacji $I(w, \cdot)$ jest funkcją erozji dla każdego $w \in [0,1]$, i jeżeli D jest funkcją rozmytej alternatywy, która jest operatorem dualnym do operatora I ze względu na rozmytą negację N , wtedy otrzymamy funkcję rozmytej erozji *Fuzzy_erosion*(\cdot, \mathbf{w}): $F(U) \rightarrow [0,1]$ poprzez definicję [25]

$$\text{Fuzzy_erosion}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \bigwedge_{i=1}^n I(w_i, x_i) = \bigwedge_{i=1}^n D(m_i, x_i) = \mathbf{m}^T \bullet \mathbf{x}, \quad (18)$$

gdzie $\mathbf{m} = N(\mathbf{w})$ (por. (17)) i operacja rozmytej alternatywy jest rozmytą negacją operacji rozmytej implikacji (I). Tak więc funkcja $D(m, \cdot)$ jest funkcją erozji dla każdego $m \in [0,1]$.

W powyższym wzorze zamiast D można podstawić dowolny rodzaj rozmytej alternatywy (np. $D_{\text{Max}}(x, y) = x \vee y$, $D_{\text{Prob. sum}}(x, y) = x + y - x \cdot y$ oraz $D_{\text{Lukasiewicz}}(x, y) = 1 \wedge (x + y)$).

6. Rozmyte morfologiczne pamięci asocjacyjne jako podklasa klasy rozmytych pamięci asocjacyjnych FAM

6.1. Obliczenia dokonywane w rozmytym morfologicznym neuronie

FMM bazuje na obserwacji, że przedział rozmyty $[0,1]$ oraz rozmyta kostka n -wymiarowa $[0,1]^n$ tworzą przykłady krat zupełnych. Dlatego sieć neuronowa, w której każdy neuron dokonuje obliczeń złożonych z elementarnych rozmytych operacji morfologicznych, takich jak **rozmyta erozja**, **rozmyta dylacja**, **rozmyta antyerozja** albo **rozmyta antydylacja**, odwzorowujących rozmytą kostkę n -wymiarową $[0,1]^n$ w rozmyty przedział $[0,1]$ – określana jest jako rozmyta morfologiczna sieć neuronowa (*fuzzy morphological neural network*, FMNN), a jej neurony zwane są rozmytymi neuronami morfologicznymi [25].

Jedną z najbardziej ogólnych klas neuronów rozmytych, wprowadzonych przez W. Pedrycza na początku lat 90. XX w., była klasa **OR-neuron** o postaci [9]

$$y = S \bigvee_{j=1}^n T(w_j, x_j), \quad (19)$$

gdzie:

S – t -conorma,

T – t -norma.

W szczególnym wypadku, kiedy S jest równe operacji maksimum, gdy zastąpimy t -normę bardziej ogólną operacją rozmytej koniunkcji oraz gdy wprowadzimy składnik progu, wtedy otrzymamy neuron nazywany przez wielu badaczy neuronem **max-C** o postaci funkcji rozmytej dylacji (zob. (17)) [16, 21]

$$y = \left[\bigvee_{j=1}^n C(w_j, x_j) \right] \vee \theta = (\mathbf{w}^T \circ \mathbf{x}) \vee \theta, \quad (20)$$

gdzie:

$\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ – rozmyty wektor wejściowy,

$\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_n]^T$ – rozmyty wektor wagowy neuronu **max-C**,

y – sygnał wyjściowy tego neuronu ($y \in [0,1]$).

Podstawiając zamiast C różne (wspomniane wcześniej) rodzaje rozmytych koniunkcji (np. $C_{\text{Min}}(x, y) = x \wedge y$, $C_{\text{Product}}(x, y) = xy$ oraz $C_{\text{Lukasiewicz}}(x, y) = 0 \vee (x + y - 1)$), można otrzymać odpowiednio odmienne rodzaje neuronów **max-C**. Typ zastosowanego rodzaju rozmytej koniunkcji jest zwykle wskazywany przez indeks dolny neuronu **max-C**.

Morfologiczny neuron **max-C** bazujący na rozmytej koniunkcji $C_{\text{Product}}(x, y) = xy$ jest najważniejszym i najczęściej wykorzystywanym rodzajem neuronu rozmytego, występującego w rozmytych morfologicznych sieciach neuronowych. Wart przypomnienia jest fakt, że jeżeli jest to neuron tego typu (tj. **max-C_{Product}**), to spełnia on warunek: $C(x, \cdot)$ jest operacją **rozmytej dylacji** $\forall_{x \in [0,1]}$, tj. $C(\cdot)$ ze względu na drugi argument jest przemienne z operacją *supremum* [24].

W podobny sposób można zaadaptować **AND-neuron** W. Pedrycza z pracy [9], aby otrzymać model neuronu **min-D** o postaci funkcji rozmytej erozji (zob. (18)) [16]

$$y = \left[\bigvee_{j=1}^n D(m_j, x_j) \right] \wedge \theta = (\mathbf{m}^T \bullet \mathbf{x}) \wedge \theta. \quad (21)$$

Podstawiając zamiast **D** różne (wspomniane wcześniej) rodzaje rozmytych alternatyw (np. $D_{\text{Max}}(x, y) = x \vee y$, $D_{\text{Prob. sum}}(x, y) = x + y - x \cdot y$ oraz $D_{\text{Lukasiewicz}}(x, y) = 1 \wedge (x + y)$), można otrzymać odpowiednio odmienne rodzaje neuronów **min-D**.

Wiele istniejących obecnie dobrze znanych modeli rozmytych pamięci asocjacyjnych (FAM) można uznać za przykłady sieci neuronowej jednowarstwowej zbudowanej z rozmytych neuronów morfologicznych **max-C**, w których sygnał wyjściowy obliczany jest następująco [25]

$$\mathbf{y} = \mathcal{W}(\mathbf{x}) = \mathbf{W} \circ \mathbf{x}, \quad (22)$$

gdzie:

- $\mathbf{W} \in [0, 1]^{m \times n}$ – macierz wag synaptycznych,
- $\mathbf{x} \in [0, 1]^n$ – rozmyty wzorzec wejściowy,
- $\mathbf{y} \in [0, 1]^m$ – rozmyty wzorzec wyjściowy.
- \mathcal{W} – operacja dyfuzji z przestrzeni $[0, 1]^n$ w przestrzeń $[0, 1]^m$.

6.2. Rozmyte morfologiczne operacje macierzowe

Bazując na operacji rozmytej koniunkcji i rozmytej alternatywy, można utworzyć dalsze, bardziej skomplikowane operacje, np. operacje macierzowe. Niech macierze **A** oraz **B** będą w postaci: $\mathbf{A} \in [0, 1]^{m \times k}$, $\mathbf{B} \in [0, 1]^{k \times n}$. Iloczyn macierzowy **max-C** macierzy **A** i **B** (czyli $\mathbf{G} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B}$) określony jest następująco [21]

$$g_{ij} = \bigvee_{\xi=1}^k C(a_{i\xi}, b_{\xi j}). \quad (23)$$

Dla $C = C_{\text{Min}}(x, y) = x \wedge y$ iloczyn macierzowy **max-C** wynosi [25]

$$g_{ij} = \bigvee_{\xi=1}^k C_{\text{Min}}(a_{i\xi}, b_{\xi j}) = \bigvee_{\xi=1}^k (a_{i\xi} \wedge b_{\xi j}) = \mathbf{A} \circ_{\text{Min}} \mathbf{B}. \quad (24)$$

Iloczyn macierzowy **min-D** macierzy **A** i **B** (czyli $\mathbf{H} = \mathbf{A} \bullet \mathbf{B}$) określony jest w analogiczny sposób [25]

$$h_{ij} = \bigwedge_{\xi=1}^k C(a_{i\xi}, b_{\xi j}) \quad (25)$$

Dla $D = D_{\text{Max}}(x, y) = x \vee y$ iloczyn macierzowy **min-D** wynosi

$$h_{ij} = \bigwedge_{\xi=1}^k D_{\text{Max}}(a_{i\xi}, b_{\xi j}) = \bigwedge_{\xi=1}^k (a_{i\xi} \vee b_{\xi j}) = \mathbf{A} \bullet_{\text{Max}} \mathbf{B}. \quad (26)$$

Wielu badaczy sądzi, że najważniejsze typy neuronów rozmytych, które występują w nowych rozmytych morfologicznych modelach pamięci asocjacyjnych, mogą być sformułowane z użyciem pojęć iloczynów macierzowych **max-C** oraz **min-D**.

6.3. Morfologiczne pamięci asocjacyjne

Niech $\mathbf{X} = [\mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^k]$ oznacza macierz $n \times k$ -wymiarową, której kolumnami są wzorce wejściowe $\mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^k$. Podobnie, niech $\mathbf{Y} = [\mathbf{Y}^1, \dots, \mathbf{Y}^k]$ oznacza macierz $m \times k$ -wymiarową, której kolumnami są wzorce wyjściowe $\mathbf{Y}^1, \dots, \mathbf{Y}^k$. W morfologicznych heteroasocjacyjnych pamięciach asocjacyjnych dla każdej pary wzorców wzajemnie skojarzonych $(\mathbf{X}^\xi, \mathbf{Y}^\xi)$, $\xi = 1, \dots, k$ tworzone są dwie pamięci morfologiczne $m \times n$ -wymiarowe $\mathbf{W}_{\mathbf{XY}}$ oraz $\mathbf{M}_{\mathbf{XY}}$, zdefiniowane następująco [17]²

$$\mathbf{W}_{\mathbf{XY}} = \mathbf{Y} \boxtimes (-\mathbf{X})^T = \bigwedge_{\xi=1}^k (\mathbf{y}^\xi \boxtimes (-\mathbf{x}^\xi)^T) \quad (27)$$

oraz

$$\mathbf{M}_{\mathbf{XY}} = \mathbf{Y} \boxtimes (-\mathbf{X})^T = \bigvee_{\xi=1}^k (\mathbf{y}^\xi \boxtimes (-\mathbf{x}^\xi)^T) \quad (28)$$

Macierz $\mathbf{W}_{\mathbf{XY}}$ została utworzona, aby umożliwić odtwarzanie wzorców, które są erozyjną wersją wzorców uczących (wersje te często można dostrzec po ich zmniejszonych kształtach, co dla czarno-białych obrazów oznacza mniejszą ilość czarnych pikseli naokoło prawie wszystkich dotychczasowych szczegółów obrazu, a nawet zanik niektórych szczegółów).

Macierz $\mathbf{M}_{\mathbf{XY}}$ została utworzona, aby umożliwić odtwarzanie wzorców, które są dylacyjną wersją wzorców uczących (wersje te często można dostrzec po ich zwiększonych kształtach, co dla czarno-białych obrazów oznacza większą ilość czarnych pikseli naokoło prawie wszystkich dotychczasowych szczegółów obrazu).

Jeżeli macierz $\mathbf{W}_{\mathbf{XY}}$ otrzymuje jako input wektor \mathbf{X}^ξ , to utworzony zostanie następujący **max** iloczyn [17]: $\mathbf{W}_{\mathbf{XY}} \boxtimes (-\mathbf{X})$. Dualnie, jeżeli macierz otrzymuje jako input wektor \mathbf{X}^ξ , to analogicznie utworzony zostanie **min** iloczyn [17]: $\mathbf{M}_{\mathbf{XY}} \boxtimes (-\mathbf{X})$.

Konsekwencją równań (27) i (28) jest następująca nierówność [17]

$$\mathbf{W}_{\mathbf{XY}} \boxtimes \mathbf{X} \leq \mathbf{Y} \leq \mathbf{M}_{\mathbf{XY}} \quad (29)$$

Jeżeli $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ (tj. gdy $\forall \xi : \mathbf{x}^\xi = \mathbf{y}^\xi$), wtedy otrzymujemy macierze $\mathbf{W}_{\mathbf{XX}}$ i $\mathbf{M}_{\mathbf{XX}}$ połączeń wagowych autoasocjacyjnej pamięci morfologicznej, gwarantujące jednokrokową zbieżność. Ritter i inni udowodnili, że morfologiczne pamięci autoasocjacyjne bezbłędnie odtwarzają wszystkie uprzednio zapamiętane w tych pamięciach wzorce [16, 17] oraz że

$$\mathbf{W}_{\mathbf{XX}} \boxtimes \mathbf{X} = \mathbf{X} = \mathbf{M}_{\mathbf{XX}} \boxtimes \mathbf{X} \quad (30)$$

Jednak nawet z utworzonymi macierzami połączeń wagowych $\mathbf{W}_{\mathbf{XY}}$ oraz $\mathbf{M}_{\mathbf{XY}}$ dotychczasowe modele morfologicznych pamięci asocjacyjnych mają dość dużo słabych punktów. Dzieje się tak, ponieważ zaszumione wzorce z reguły zawierają zniekształcenia

² W powyższych wzorach niektórzy autorzy stosują symbolikę łatwo dostępną do uzyskania w popularnych edytorach tekstu, np. symbolikę tę ma Microsoft Equation wykorzystywany w programie

Microsoft Word: $\mathbf{W}_{\mathbf{XY}} = \bigwedge_{\xi=1}^k (\mathbf{y}^\xi \otimes (-\mathbf{x}^\xi)^T)$ oraz $\mathbf{M}_{\mathbf{XY}} = \bigvee_{\xi=1}^k (\mathbf{y}^\xi \otimes (-\mathbf{x}^\xi)^T)$.

zarówno dylacyjne³, jak i erozyjne, których ani macierz \mathbf{W}_{XY} , ani macierz \mathbf{M}_{XY} nie są w stanie wydajnie kontrolować. Jednym z możliwych rozwiązań tego problemu jest zbudowanie macierzy jądra, która w połączeniu z macierzami \mathbf{M}_{XY} oraz \mathbf{W}_{XY} pozwalałaby pamięciom asocjacyjnym odtworzyć dowolnie zaszumiony i zniekształcony wzorzec. Macierz jądra \mathbf{Z} jest zdefiniowana jako macierz spełniająca następujące warunki

$$\mathbf{M}_{ZZ} \boxtimes \mathbf{X} = \mathbf{Z}$$

$$\mathbf{W}_{ZY} \boxtimes \mathbf{Z} = \mathbf{Y}$$

Ritter i inni [16] scharakteryzowali macierz jądra dla binarnej pamięci asocjacyjnej w następującym twierdzeniu:

Niech X , Y , oraz Z będą binarnymi wzorcami, takimi że: $Z \leq X$. Istnieje indeks i , taki że: $z_i^\alpha \wedge z_i^\beta = 0$ oraz $z_i^\beta \geq x_i^\alpha \quad \forall \alpha, \beta$, gdzie $\alpha \neq \beta$, z_i^k oznacza i -ty bit k -tego wzorca, a macierz \mathbf{Z} jest macierzą jądra dla macierzy wzorców wejściowych \mathbf{X} oraz macierzy wzorców wyjściowych \mathbf{Y} . Te trzy macierze (\mathbf{M}_{ZZ} , \mathbf{W}_{ZY} oraz \mathbf{Z}) asocjacyjnej pamięci morfologicznej są w stanie odtworzyć dowolnie zniekształcone wzorce wtedy, gdy spełniony jest wzór

$$\mathbf{W}_{ZY} \boxtimes (\mathbf{M}_{ZZ} \boxtimes \mathbf{X}') = \mathbf{Y}'.$$

6.4. Wyniki badań procesu odtwarzania w wybranych modelach rozmytych morfologicznych pamięci autoasocjacyjnych

W badaniach wykorzystano pięć wzorców (rys. 1) wybranych z ogólnodostępnej bazy danych twarzy (AT&T Cambridge, UK [24]). Baza ta ma 40 katalogów z wzorcami w odcieniach szarości. W każdym katalogu znajduje się 10 wzorców frontu twarzy tej samej osoby, wyrażającej jednak różne emocje. Każdy z wzorców ma wymiar 112 wierszy na 92 kolumny (a każdy piksel ma 256 poziomów szarości).



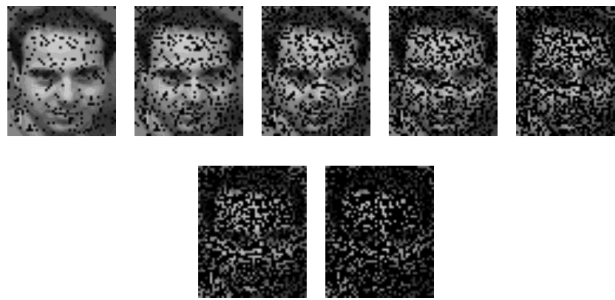
Rys. 1. Zbiór pięciu wzorców $\{\mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^5\}$ zapamiętanych w wielu modelach rozmytej morfologicznej pamięci autoasocjacyjnej

Fig. 1. A set of five face images $\{\mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^5\}$ memorized in many fuzzy morphological auto-associative memory models

³ Mówimy, że zaszumiona wersja $\tilde{\mathbf{x}}^i$ uprzednio zapamiętanego wzorca \mathbf{x}^i przeszła przez zmianę erozyjną, jeżeli $\tilde{\mathbf{x}}^i \leq \mathbf{x}^i$, i odwrotnie, że przeszła przez zmianę dylacyjną, jeżeli $\tilde{\mathbf{x}}^i \geq \mathbf{x}^i$. Zmiana wartości piksela z wartości $p(i, j) = 1$ na $p(i, j) = 0$ reprezentuje zmianę erozyjną wzorca, podczas gdy zmiana z wartości $p(i, j) = 0$ na $p(i, j) = 1$ reprezentuje zmianę dylacyjną wzorca [17]. Ritter i inni wykazali w [16], że macierz połączeń wagowych \mathbf{M}_{XY} w morfologicznych dwukierunkowych pamięciach asocjacyjnych jest wyjątkowo odporna na zniekształcenia wzorców wywołane przez zmiany dylacyjne, ale macierz ta nie umie sobie poradzić ze zmianami erozyjnymi. Z kolei macierz \mathbf{W}_{XY} jest bardzo odporna na zniekształcenia śladów pamięciowych wywołane przez zmiany erozyjne, ale nie umie kontrolować zmian dylacyjnych.

Rozmiar wszystkich pięciu wzorców został zmniejszony tak, aby miały one wymiar 56×46 oraz wszystkie macierze wzorców zostały przekonwertowane do postaci wektorów kolumnowych o 2576 składowych. Wartości składowych pięciu wektorów zostały następnie rozmyte, tak aby każda z nich należała do przedziału $[0,1]$.

Wspomnianych pięć wektorów zostało zapamiętanych w wielu znanych modelach rozmytej morfologicznej pamięci autoasocjacyjnej FAM (tj. w modelach o rozmytych neuronach: max-min FAM, max-iloczyn FAM, w uogólnionym modelu GFAM Łukasiewicza oraz w max-min modelu FAM ze składnikiem progu i in.) [25]. Po sprawdzeniu, że wszystkie modele rozmytej morfologicznej pamięci autoasocjacyjnej zapamiętały i umiały odtworzyć bezbłędnie wszystkich pięć wzorców, modele te zostały sprawdzone ze względu na umiejętność odtworzenia wzorców zaszumionych. Zaszumienie wzorców polegało na zastosowaniu zaszumienia typu „pieprz” z siedmioma stopniami gęstości zaszumienia: od 0,1 do 0,7. I tak na przykład stopień gęstości zaszumienia równy 0,1 oznacza, że 10% losowo wybranych pikseli zostało zaczernionych. Jeden z wzorców z zastosowanymi do niego siedmioma stopniami gęstości zaszumienia pokazano na rys. 2.



Rys. 2. Jeden z wzorców z zastosowanymi siedzioma stopniami gęstości zaszumienia typu „pieprz”

Fig. 2. The first face image corrupted with the “pepper” noise, with its density ranging from 10% to 70%

Rezultaty procesu odtwarzania w wielu wspomnianych modelach były skrajnie odmienne. Z rozważanych modeli kilka z nich zadziwiająco wspaniale odtworzyło wszystkich 7 rodzajów zaszumienia zapamiętanego wcześniej wzorca. Na rysunkach 3–9 przedstawiono rezultaty procesu odtwarzania zaszumionego wzorca \mathbf{X}^1 (w kolejności wg rosnącego stopnia zaszumienia od 0,1 do 0,7) w sześciu najlepiej jakościowo odtwarzających modelach.

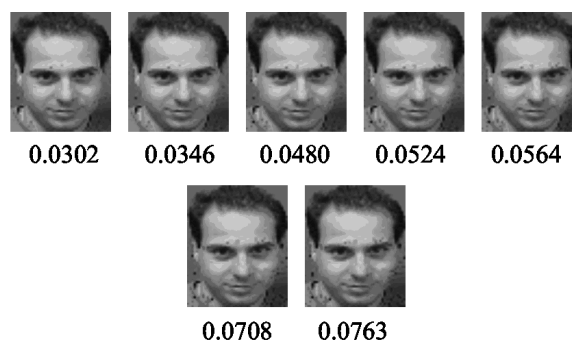
Następnie obliczono znormalizowane wartości błędów generowane przez wspomniane modele rozmyte FAM, po wprowadzeniu na ich wejścia siedmiu rodzajów zaszumienia każdego z pięciu uprzednio zapamiętanych w tych modelach wzorców. Przy obliczaniu znormalizowanych wartości błędów $E(\mathbf{o}^i)$ dla $i = 1, \dots, 7$ (siedmiu rodzajów zaszumienia) zastosowany został następujący wzór [25]

$$E(\mathbf{o}^{i,j}) = \frac{\|\mathbf{x}^i - [W \circ_T \mathbf{o}^{i,j}] \vee \mathbf{0}\|}{\|\mathbf{x}^i\|} \quad (31)$$

gdzie:

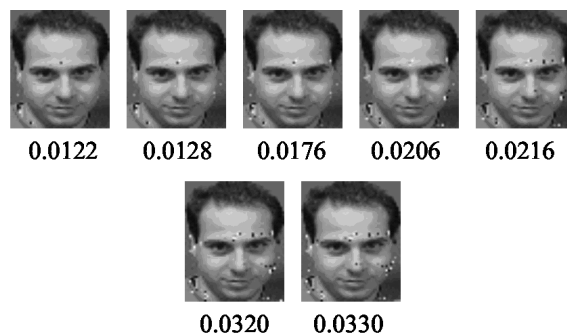
- $\mathbf{o}^{i,j}$ – odtworzony wzorec, gdy na wejście modelu podany został j -ty rodzaj zaszumienia i -tego wzorca,
- \mathbf{x}^i – i -ty zapamiętany w tym modelu wzorec,
- \circ_T – \max_C iloczyn, gdzie C jest t -normą.

Na rysunkach 3–9 pod każdym obrazem podano znormalizowaną wartość błędu obliczoną wg wzoru (31).



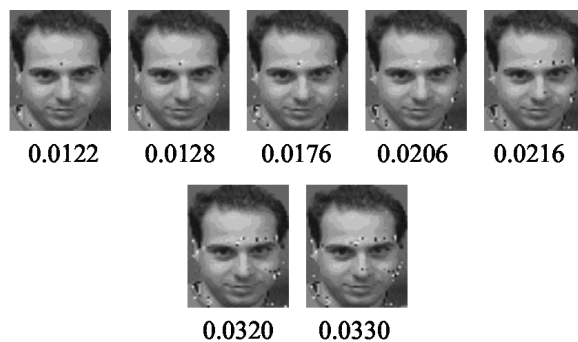
Rys. 3. Zaszumione wzorce z rys. 2 odtworzone w rozmytym morfologicznym modelu pamięci autoasocjacyjnej F. Junbo et al. [5, 25] oraz znormalizowane wartości błędów obliczone wg wzoru (31)

Fig. 3. Noisy images from Fig. 2 recalled in the fuzzy morphological auto-associative memory model of F. Junbo et al. [5, 25] with values of their corresponding normalized errors calculated according to formula (31)



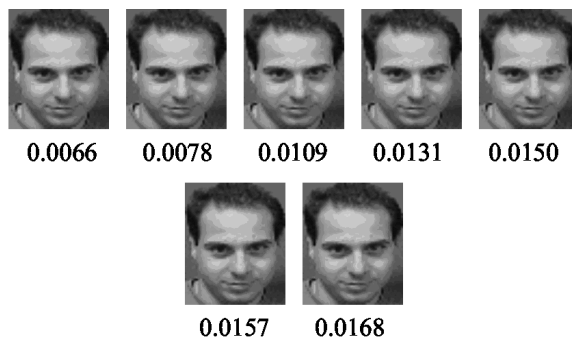
Rys. 4. Zaszumione wzorce z rys. 2 odtworzone w rozmytym morfologicznym modelu pamięci autoasocjacyjnej typu addytywnego [6, 25] i znormalizowane wartości błędów obliczone wg wzoru (31)

Fig. 4. Noisy images from Fig. 2 recalled in an additive fuzzy morphological auto-associative memory model [6, 25] with values of their corresponding normalized errors calculated according to formula (31)



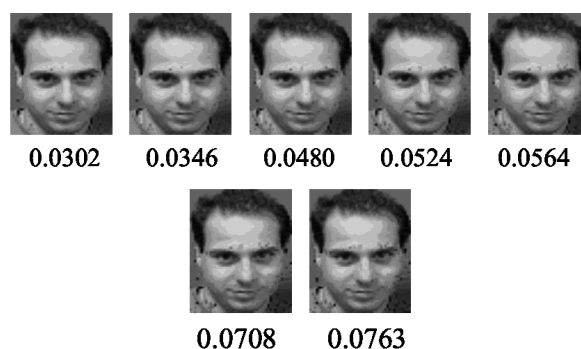
Rys. 5. Zaszumione wzorce z rys. 2 odtworzone w rozmytym morfologicznym modelu pamięci autoasocjacyjnej typu multiplikatywnego [6, 25] oraz znormalizowane wartości błędów obliczone wg wzoru (31)

Fig. 5. Noisy images from Fig. 2 recalled in a multiplicative fuzzy morphological auto-associative memory model [6, 25] with values of their corresponding normalized errors calculated according to formula (31)



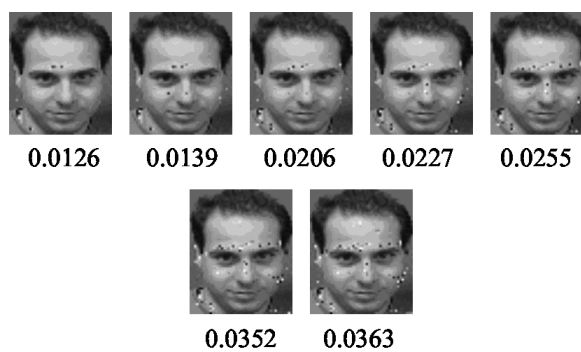
Rys. 6. Zaszumione wzorce z rys. 2 odtworzone w implikatywnej rozmytej morfologicznej pamięci asocjacyjnej typu Łukasiewicza (typ Łukasiewicza modelu IFAM autorstwa M.E. Valle i P. Sussnera) [20, 25] oraz znormalizowane wartości błędów obliczone wg wzoru (31)

Fig. 6. Noisy images from Fig. 2 recalled in the Lukasiewicz type of the implicative fuzzy associative morphological memory (Lukasiewicz type of IFAM of M.E. Valle and P. Sussner) [20, 25] with values of their corresponding normalized errors calculated according to formula (31)



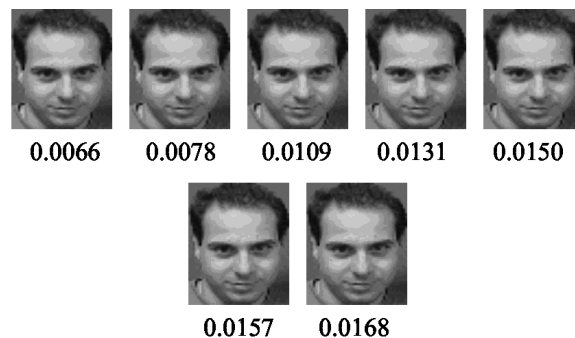
Rys. 7. Zaszumione wzorce z rys. 2 odtworzone w implikatywnej rozmytej morfologicznej pamięci asocjacyjnej typu multiplikatywnego (typ multiplikatywny modelu IFAM autorstwa M.E. Valle i P. Sussnera) [20, 25] oraz znormalizowane wartości błędów obliczone wg wzoru (31)

Fig. 7. Noisy images from Fig. 2 recalled in the multiplicative type of the implicative fuzzy associative morphological memory (multiplicative IFAM of M.E. Valle and P. Sussner) [20, 25] with values of their corresponding normalized errors calculated according to formula (31)



Rys. 8. Zaszumione wzorce z rys. 2 odtworzone w implikatywnej rozmytej morfologicznej pamięci autoasocjacyjnej typu Goguena (typ Goguena modelu IFAM autorstwa M.E. Valle i P. Sussnera) [20, 25] oraz znormalizowane wartości błędów obliczone wg wzoru (31)

Fig. 8. Noisy images from Fig. 2 recalled in the Gougen type of the implicative fuzzy associative morphological memory (Gougen IFAM of M.E. Valle and P. Sussner) [20, 25] with values of their corresponding normalized errors calculated according to formula (31)



Rys. 9. Zaszumione wzorce z rys. 2 odtworzone w implikatywnej rozmytej morfologicznej pamięci asocjacyjnej typu wspomagającego typ Łukasiewicza (model „Łukasiewicz adjunctive IFAM” autorstwa M.E. Valle i P. Sussnera) [20, 25] oraz znormalizowane wartości błędów obliczone wg wzoru (31)

Fig. 9. Noisy images from Fig. 2 recalled in the Lukasiewicz adjunctive type of the implicative fuzzy associative morphological memory (Lukasiewicz adjunctive IFAM of M.E.Valle and P. Sussner) [20, 25] with values of their corresponding normalized errors calculated according to formula (31)

Proces odtwarzania w pamięciach autoasocjacyjnych niemorfologicznych wymaga często kilkuset lub kilku tysięcy iteracji, zaś proces odtwarzania w modelach FMAM jest procesem 1-krokovym. Drugą zaletą jest to, że modele te już nie mają restrykcji do wzorców binarnych czy bipolarnych, ale akceptują obrazy w odcieniach szarości oraz obrazy kolorowe.

Dziedzina rozmytych morfologicznych sieci neuronowych jest bardzo młoda, ma dużo otwartych, niezbadanych jeszcze obszarów. Jednak w związku z tym, że szczególną wagę przywiązuje się obecnie do badań analizujących możliwości rozpoznawania, porównywania czy przekształceń obrazów (i już nie czarno-białych), dziedzina rozmytych morfologicznych sieci neuronowych okazuje się wyjątkowo ważna jako dysponująca nieodkrytym jeszcze w pełni potencjałem, który może natchnąć wielu badaczy do dalszych nowych spostrzeżeń, zwłaszcza na polu doskonalszego odtwarzania i filtracji obrazów zaszumionych i uszkodzonych oraz budowania wydajniejszych systemów bazujących na regułach rozmytych.

6.5. Modele rozmyte jako szczególny przypadek modeli granulowanych

Obliczenia granularne to ogólna teoria obliczeń mająca na celu wydajne stosowanie tzw. ziaren, takich jak klasy, klastry, podzbiory, grupy i przedziały (interwały), aby konstruować bardziej wydajne modele obliczeniowe do złożonych zastosowań z olbrzymią ilością danych, informacji i wiedzy [7]. Modelując układ rzeczywisty, najczęściej posługujemy się wyidealizowanym, abstrakcyjnym modelem matematycznym. Zastosowane przez nas metody, programy i urządzenia powodują pojawienie się m.in. błędów aproksymacji, zaokrąglenia, błędów pomiarowych, dlatego układy rzeczywiste często z powodzeniem udaje się modelować, stosując modele granularne [7].

Zbiory rozmyte reprezentują szczególny przypadek informacji ziarnistej (*information granule*) [7, 15]. Paradygmat obliczeń granularnych zawiera w sobie inne, bardzo przyszło-

ściowe i ważne w modelowaniu i obliczeniach pojęcia, takie jak np. zbiory przybliżone (*rough sets*), liczby interwałowe (*interval numbers*), rozmyte oraz losowe liczby interwałowe [7, 11–15].

W przeciwieństwie do tradycyjnych obliczeń numerycznych, zorientowanych na dane, obliczenia granularne są nakierowane na wiedzę [7]. Oznacza to, że algorytmy wyszukiwania danych mogą być bardziej efektywne poprzez poddanie wiedzy wejściowej procesowi granulacji. Obliczenia granularne często bazują na zbiorach przybliżonych, zbiorach rozmytych i topologii, i wtedy teoria obliczeń granularnych stosowana jest w aplikacjach związanych z odkrywaniem wiedzy i eksploracją danych (*Knowledge Discovery* i *Data Mining*) [7]. Inni naukowcy (jak np. W. Pedrycz) stosują do obliczeń granularnych matematykę interwałową (analizę rozmytych i losowych przedziałów), zbiory rozmyte, przybliżone, zacienione (*fuzzy, rough and shadowed sets*) oraz probabilistykę, a przez to z obliczeniami granularnymi związane są m.in. aplikacje mające na celu rozpoznawanie wzorców [7, 11–15]. Obliczenia granularne mają obecnie coraz więcej zastosowań [7]. Równie szybko zwiększa się liczba zastosowań rozmytych morfologicznych pamięci asocjacyjnych, zwłaszcza w rozpoznawaniu obrazów [21, 25]. Można oczekiwać, że w niedalekiej przyszłości zwiększy się także liczba zastosowań granularnych morfologicznych pamięci asocjacyjnych.

7. Konkluzje

Rozmyta morfologiczna pamięć asocjacyjna, czyli rozmyta morfologiczna sieć neuronowa spełniająca rolę pamięci asocjacyjnej, należy do klasy rozmytych pamięci asocjacyjnych (FAM) wprowadzonych przez B. Kosko [6], a potem intensywnie badanych przez innych [2–5, 8–10, 16–21, 23, 25]. Zarówno B. Kosko, jak i wielu innych badaczy modeli FAM regularnie wykorzystywało w tego typu modelach operacje maksimum i minimum, występujące w strukturach algebraicznych krat. Jednak dopiero stosunkowo niedawno badacze, np. P. Sussner, G.X. Ritter, M.E. Dally oraz w mniejszym stopniu F. Junbo i in., P. Liu oraz R. Belohlávek, wskazali na podobieństwa wzorów występujące w modelach sieci FAMs i w MM. P. Sussner i inni przeanalizowali dużą podklasę sieci FMAM, której neurony obliczają dylację w formie **max-C**, tj. korzystając z operacji maksimum rozmytych koniunkcji [16, 21, 25]. Dodatkowo, przy wyborze operacji **max-C** w sieciach FMAMs rozwinęli oni ogólną strategię uczenia, bazującą na pojęciu sprzężenia, które oprócz negacji reprezentuje główne pojęcie dualności w MM. Analiza operacji morfologicznych w kontekście sieci FAM pozwala na głębszą i doskonalszą eksplorację tych sieci w świetle ich nowych, nieuświadamianych dotąd własności i możliwości. Dlatego też teoria i zastosowania morfologicznych sieci neuronowych, zwłaszcza morfologicznych asocjacyjnych sieci neuronowych, są nieustannie rozwijane w ciągu ostatnich kilku lat.

Literatura

- [1] Banon G.J.F., Barrera J., *Decompositions of mappings between complete lattices by mathematical morphology*, Signal Processing, Vol. 30, No. 3, 1993, 229-327.
- [2] Belohlávek R., *Fuzzy logical bidirectional associative memory*, Information Sciences 128, 2000, 91-103.
- [3] Chung F., Lee T., *On fuzzy associative memory with multiple-rule storage capacity*, IEEE Trans. Fuzzy Systems 4 (3), 1996, 375-384.
- [4] Deng T.Q., Heijmans H.J.A.M., *Grey-scale morphology based on fuzzy logic*, Journal of Mathematical Imaging and Vision 16, 2002, 155-171.
- [5] Junbo F., Fan J., Yan S., *A learning rule for fuzzy associative memories*, Proc. IEEE Int. Joint Conf. on Neural Networks, Vol. 7, 1994, 4273-4277.
- [6] Kosko B., *Neural networks and fuzzy systems: A dynamical systems approach to machine intelligence*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New York 1992.
- [7] Lin T.Y., Yao Y., Zadeh L.A. (Eds.), *Data Mining, Rough Sets and Granular Computing*, Physica-Verlag GmbH, Heidelberg, Germany 2002.
- [8] Liu P., *The fuzzy associative memory of max-min fuzzy neural networks with threshold*, Fuzzy Sets and Systems 107, 1999, 147-157.
- [9] Nieniewski M., *Morfologia matematyczna w przetwarzaniu obrazów*, Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa 1998.
- [10] Pedrycz W., *Fuzzy neural networks and neurocomputations*, Fuzzy Sets and Systems 56, 1993, 1-28.
- [11] Pedrycz W., Gacek A., *Temporal granulation and its application to signal analysis*, Information Sciences 143, 2002, 47-71.
- [12] Pedrycz W., *Granular Computing and Pattern Recognition, Chapter 12* [in:] *Soft computing approach to pattern recognition and image processing*, A. Ghosh, S.K. Pal (Eds.), World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., London 2003, 235-250.
- [13] Pedrycz W., *Interpretation of clusters in the framework of shadowed sets*, Pattern recognition letters, Vol. 26, Issue 15, 2005, 2439-2449.
- [14] Pedrycz W., Vukovich G., *Granular Computing in Pattern Recognition*, [in:] H. Bunke, A. Kandel (Eds.), *Neuro-Fuzzy Pattern Recognition*, World Scientific Publ., Vol. 41, 2002.
- [15] Pedrycz W., Vukovich G., *Granular neural networks*, Neurocomputing, Vol. 36, 2001, 205-224.
- [16] Ritter G.X., Sussner P., Diaz-de-Leon J.L., *Morphological associative memories*, IEEE Trans. Neural Networks, Vol. 9, March 1998, 281-293.
- [17] Ritter G.X., Urcid G., Iancu L., *Reconstruction of Patterns from Noisy Inputs Using Morphological Associative Memories*, Journal of Mathematical Imaging and Vision 19, 2003, 95-111.
- [18] Serra J., *Image Analysis and Mathematical Morphology*, Vol. 2: *Theoretical Advances*, Academic Press, New York 1988.
- [19] Sternberg S., *Gray-scale morphology*, Computer Vision Graphics Image Process. 35, 1986, 333-355.
- [20] Sussner P., Valle M.E., *Implicative Fuzzy Associative Memories*, IEEE Transaction on Fuzzy Systems, Vol. 14, No. 6, December 2006, 793-807.

- [21] Sussner P., Valle M.E., *Recall of patterns using morphological and certain fuzzy morphological associative memories*, In Proceedings of the IEEE World Conference on Computational Intelligence, 2006.
- [22] Tadeusiewicz R., Flasiński M., *Rozpoznawanie obrazów*, PWN, Warszawa 1991.
- [23] Tadeusiewicz R., Korohoda P., *Komputerowa analiza i przetwarzanie obrazów*, Wyd. Fundacji Postępu Telekomunikacji, Kraków 1997.
- [24] The database of Faces (formerly 'The ORL Database of Faces'), dostępna pod adresem: http://www.cl.cam.ac.uk/Research/DTG/attarchive:pub/data/att_faces.zip.
- [25] Valle M.E., Sussner P., *A general framework for fuzzy morphological associative memories*, Fuzzy Sets and Systems 159, 2008, 747-768.