ŚRODOWISKO
CZASOPISMO TECHNICZNE
TECHNICAL TRANSACTIONS
ENVIRONMENTAL ENGINEERING
WYDAWNICTWO
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ
3-Ś/2009
ZESZYT 11
ROK 106
ISSUE 11
YEAR 106

RYSZARDA IWANEJKO*

ANALIZA BŁĘDÓW METOD WYZNACZANIA MIAR NIEZAWODNOŚCI OBIEKTÓW KOMUNALNYCH NA PRZYKŁADZIE SYSTEMU ZAOPATRZENIA W WODĘ

ANALYSIS OF ERRORS FROM RELIABILITY MEASURES ESTIMATION METHODS FOR MUNICIPAL SYSTEMS ON EXAMPLE OF WATER SUPPLY

S t r e s z c z e n i e

Podstawą podejmowania wielu decyzji jest znajomość miar niezawodności różnych obiektów technicznych. Miary te szacuje się, bazując na danych eksploatacyjnych. Większość metod szacowania miar niezawodności wprowadza do wyniku dodatkowy błąd, niezwiązany z niedokładnością i niepewnością danych, nazywany błędem metody. Są to więc metody przybliżone. W artykule przeanalizowano pod tym kątem najczęściej stosowane metody wyznaczania miar niezawodności obiektów technicznych. Błędy metod wynikają z pomijania w obliczeniach mało prawdopodobnych stanów systemu, stosowania uproszczonych wzorów czy prowadzenia obliczeń na tzw. wielkościach nieskończenie małych. Przedstawione w artykule zależności umożliwiają określenie błędów analizowanych metod. Zależności mogą być stosowane dla różnych ważnych obiektów technicznych, niezależnie od tego, czy dla obiektu można skonstruować schemat niezawodnościowy, czy nie. Umiejętność oceny błędów metod, wraz z umiejętnością oceny błędów związanych z danymi wyjściowymi, pozwoli uzyskać wynik z zadowalającą dla inżynierskich zastosowań dokładnością.

Słowa kluczowe: *niezawodność*, *miary niezawodności*, *błąd metody*

A b s t r a c t

Understanding of reliability measures for different technical facilities plays an important role in a decision making process. The measures are estimated based on the operational data. Most methods used for estimation of reliability measures impose an additional error on the final result. The error, called the method’s error, is not related to data accuracy and reliability. The paper analyses the most popular methods used for determination of reliability measures for technical facilities, from that perspective. Methods’ errors result from ignoring in calculations less probable conditions of a system, using simplified formulas, or making calculations for infinitesimal values. The relationships presented in the paper help to determine the errors of the presented methods. The relationships may be used for different major technical facilities. Ability to evaluate the methods’ errors, together with knowledge about possible errors within the output data set, helps to achieve a satisfactory accuracy of the final output, at least for the engineering applications.

Keywords: reliability, *reliability measures*, *method’s error*

* Dr Ryszarda Iwanejko, Instytut Zaopatrzenia w Wodę i Ochrony Środowiska, Wydział Inżynierii Środowiska, Politechnika Krakowska.

1. Wstęp

Systemy wodociągowe i kanalizacyjne tworzą strategiczną infrastrukturę miejską, dlatego niezmiernie ważna jest umiejętność wyznaczania ich podstawowych parametrów niezawodności (równoważnie miar lub wskaźników niezawodności). Istotna jest też umiejętność dokonania oceny dokładności tych parametrów. W pracach [6, 7] przedstawiono sposoby oceny dokładności miar niezawodności za pomocą dwóch grup metod: metod klasycznego rachunku błędów oraz metod statystycznych. Umożliwiają one ocenę wpływu błędów, niedokładności lub niepełności eksploatacyjnych danych wyjściowych na błąd wyniku. W tym artykule zostaną przedstawione sposoby oceny tzw. błędów metod. Błąd metody nie jest związany z danymi wyjściowymi, lecz wynika ze stosowania praktycznych metod teorii niezawodności, z ich uproszczeń, z pomijania członów o małych wartościach. Używane dalej sformułowanie, że dana metoda jest dokładna, oznacza, że nie obciąża wyniku obliczeń dodatkowym błędem niezwiązanym z błędami danych. Metoda, która nie jest dokładna, daje wyniki przybliżone.

W dalszej części zakłada się, że systemy (S) są złożone z elementów odnawialnych dwustanowych, które uszkadzają się niezależnie, a czasy ich sprawności i niesprawności można opisać rozkładem wykładniczym. Ponadto zakłada się, że cały system jest dwustanowy, przy czym stan sprawności i niesprawności określa się względem zadanego kryterium. Zakłada się również, że praca systemu jest analizowana w tzw. okresie normalnym, w którym uszkodzenia są losowe, a czasy sprawności i niesprawności systemu można opisać rozkładem wykładniczym. Analizę tych założeń przeprowadzono w pracy [4].

W praktyce do wyznaczania miar niezawodności obiektów stosuje się metody jedno- lub dwuparametryczne.

2. Błędy metod jednoparametrycznych

Metody jednoparametryczne [9, 10] pozwalają na wyznaczenie jednej, kompleksowej miary niezawodności systemu.

Najczęściej stosowaną miarą jest tzw. stacjonarny wskaźnik gotowości K_S, potocznie nazywany niezawodnością i wyrażony wzorem

$$K_S = \frac{Tp_S}{Tp_S + Tn_S} \tag{1}$$

gdzie Tp_S, Tn_S – odpowiednio średni czas sprawności i średni czas niesprawności systemu. Wartość K_S interpretuje się jako prawdopodobieństwo, że w dowolnej chwili, dostatecznie odległej od włączenia systemu do eksploatacji, system będzie sprawny. Taka miara nie charakteryzuje niezawodności systemu w sposób jednoznaczny, gdyż dla wartości Tp_S' i Tn_S' proporcjonalnych do Tp_S i Tn_S uzyskuje się tę samą wartość K_S.

Drugą miarą kompleksową jest tzw. uogólniony wskaźnik niezawodności K_{uS} wyrażony wzorem

$$K_{uS} = 1 - \frac{EN}{Q_w} \tag{2}$$

gdzie EN – dla obiektów wodociągowych to średni niedobór wydajności (brak wody) określany względem wymaganej wydajności systemu Q_w, a dla obiektów usuwania ścieków – średnia ilość nieodprowadzonych ścieków. Wartość K_{uS} jest interpretowana jako stopień spełniania przez system postawionych mu wymagań.

Pomimo że te dwie miary (K_S, K_{uS}) charakteryzują niezawodność systemu z różnych punktów widzenia, co wynika z różnych definicji (wzorów) i interpretacji, to z matematycznych przekształceń wynika nierówność: $K_S \le K_{uS}$.

Dla systemów o niezawodnościowej strukturze mieszanej do wyznaczenia K_S stosuje się wzory analityczne połączone z ewentualnym blokowaniem elementów. Jest to metoda prosta i szybka. Jedynym wymogiem stosowania wzorów analitycznych jest możliwość skonstruowania schematu niezawodnościowego systemu lub możliwość dokonania tzw. dekompozycji systemu złożonego. Dekompozycja może być przeprowadzona względem jednego lub kilku elementów. W pierwszym przypadku (tzw. dekompozycja prosta) polega na wyborze takiego elementu, dla którego analiza zajścia stanu sprawności i niesprawności pozwoli wyeliminować ten element i przekształcić system złożony na dwa różne systemy o strukturze mieszanej. Dla tych dwóch struktur stosuje się wzory analityczne, a końcowy wynik uzyskuje się po zastosowaniu wzoru na prawdopodobieństwo zupełne. Drugi przypadek polega na kilkukrotnym stosowaniu dekompozycji prostej, biorąc pod uwagę kilka elementów. Wzory analityczne są dokładne, dlatego nie będą omawiane w dalszej części.

Do wyznaczenia K_S oraz K_{uS} powszechnie stosuje się tzw. metody przeglądu (MP). Polegają one na sporządzeniu tabeli stanów elementarnych systemu. Tabela ta zawiera różne kombinacje stanów sprawności elementów tworzących dany system. Dla nich określa się stan sprawności systemu. Wartość stacjonarnego wskaźnika gotowości wyznacza się ze wzoru

$$K_S = \sum_{i \in E1} P_i \tag{3}$$

gdzie:

i – numer stanu elementarnego systemu,
P_i – prawdopodobieństwo zajścia tego stanu,
$E1$ – zbiór stanów sprawności systemu.

Wartość uogólnionego wskaźnika niezawodności wyznacza się ze wzoru (2), przy czym średni niedobór jest równy

$$EN = \frac{\sum_{i=1}^{I(MP)} P_i \cdot N_i}{\sum_{i=1}^{I(MP)} P_i} = \frac{\sum_{i \in E0} P_i \cdot N_i}{\sum_{i=1}^{I(MP)} P_i} \tag{4}$$

gdzie:

N_i – niedobór występujący w i-tym stanie elementarnym systemu,
$E0$ – zbiór stanów niesprawności systemu,
$I(MP)$ – liczba stanów systemu uwzględnianych w metodzie przeglądu.

W zależności od liczby uwzględnianych stanów wyróżnia się metodę przeglądu zupełnego (MPZ) oraz metodę przeglądu częściowego (MPCz) [9, 10].

Metoda przeglądu zupełnego uwzględnia wszystkie możliwe stany elementarne systemu, jest więc metodą dokładną. Ponieważ liczba wszystkich stanów równa $I(\text{MPZ}) = 2^n$ wzrasta wykładniczo, czyli bardzo szybko, wraz ze wzrostem n-liczby elementów systemu, to ze względu na dużą pracochłonność metodę stosuje się zazwyczaj dla $n \le 4$. Dla $n > 4$ w praktyce stosuje się metodę przeglądu częściowego.

Metoda przeglądu częściowego uwzględnia jedynie najbardziej prawdopodobne stany elementarne systemu. Analizy i obliczenia ogranicza się do stanów, w których uszkodzonych jest nie więcej niż $k_{\max}$ elementów. W praktyce przyjmuje się zazwyczaj $k_{\max} = 2.$ Wówczas należy uwzględnić

$$I(\text{MPCz}) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{k_{\max}} \tag{5}$$

stanów elementarnych systemu. Wyniki uzyskane za pomocą (3) oraz (4) z zastosowaniem MPCz są przybliżone. W dalszej części K_S oraz K_{uS} oznaczają wartości odpowiednich miar niezawodności nieobarczone błędem metody. Natomiast wyniki przybliżone uzyskane za pomocą MPCz będą oznaczane przez K_S(MPCz) oraz K_{uS}(MPCz). Nieznane wyniki dokładne można oszacować za pomocą nierówności

$$K_S(\text{MPCz}) \le K_S < K_S(\text{MPCz}) + \varepsilon \qquad \text{oraz} \qquad K_{uS}(\text{MPCz}) - \varepsilon < K_{u\,S} \le K_{uS}(\text{MPCz}) \tag{6}$$

gdzie błąd oszacowania

$$\varepsilon = P\left(k > k_{\max}\right) = 1 - P\left(k \le k_{\max}\right) = 1 - \sum_{i=1}^{I(\text{MPCz})} P_i \tag{7}$$

określa prawdopodobieństwo zajścia stanów pomijanych w MPCz. Jeśli przeprowadzający obliczenia uzna, że popełniany maksymalny błąd ε jest zbyt duży, to powinien uwzględnić stany z większą liczbą równoczesnych uszkodzeń $k_{\max}$. Powyższe oszacowania (6) są pesymistyczne, wynikają bowiem z przyjęcia, że wszystkie pomijane stany są odpowiednio stanami sprawności przy szacowaniu K_S lub stanami niesprawności z maksymalnym niedoborem równym Q_w przy wyznaczaniu K_{uS}. W rzeczywistości większość pomijanych stanów to stany niesprawności.

Przykład 1. Pewna jednostka osadnicza jest zaopatrywana w wodę przez n = 5 niezależnych układów zasilania w wodę, tworzących razem podsystem dostawy wody (PsDoW). Ponieważ analizę ogranicza się jedynie do tego podsystemu, w dalszej części jest on traktowany jak system. Możliwe wydajności tych układów wynoszą odpowiednio: q_1 = 38% Qn, q_2 = 32% Qn, q_3 = 28% Qn, q_4 = 15% Qn oraz q_5 = 17% Qn. Łączne możliwości produkcyjne wynoszą więc $Qp = \sum q_i$ = 130% Qn. Ten PsDoW uznaje się za wystarczająco sprawny, gdy w dowolnej chwili możliwa jest produkcja i dostarczenie do sieci dystrybucji co najmniej Q_w = 70% Qn. Dane są wartości stacjonarnych wskaźników gotowości układów zasilania w wodę. Oszacowano je z dokładnością do czterech miejsc, oznaczonych odpowiednio jako K_1 = 0,9196; K_2 = 0,9312; K_3 = 0,9734; K_4 = 0,9581 oraz K_5 = 0,9786. Należy oszacować wartości: stacjonarnego wskaźnika gotowości K_S oraz uogólnionego wskaźnika niezawodności K_{uS}. Obliczenia prowadzi się za pomocą metody przeglądu. Ze względu na znaczną liczbę wszystkich możliwych stanów elementarnych $I\left(\text{MPZ}\right) = 2^5 = 32$ oraz niepewność co do dokładności miar K dla poszczególnych układów, zastosowano MPCz dla $k_{\max}$ = 2. Wówczas, zgodnie z (5), należy uwzględnić $I\left(\mathrm{MPCz}\right)=\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}=16$ stanów elementarnych PsDoW (tab. 1). Łączne prawdopodobieństwo zajścia stanów uwzględnianych w analizie wynosi $P(\mathrm{MPCz}, k \le 2) = \, = \sum_{i=1}^{16} P_i = 0{,}999149$. Pomija się stany z liczbą równoczesnych uszkodzeń $k > 2$ o łącznym prawdopodobieństwie zajścia ε = 1 – P(MPCz, $k \le 2$) = 0,000851. Jest to równocześnie maksymalny błąd możliwy do popełnienia przy wyznaczaniu miar K(MPcz) oraz K_u(MPCz).

Tabela 1

Tabela metody przeglądu częściowego dla $k \le 2$

k	i	Elementy					P_i	Q_{Si} [% Qn]	N_i [% Qn]	Stan systemu
		1	2	3	4	5				
0	1	1	1	1	1	1	0,781587	130	0	$E1$
1	2	1	1	1	1	0	0,017084	113	0	$E1$
	3	1	1	1	0	1	0,034168	115	0	$E1$
	4	1	1	0	1	1	0,021355	102	0	$E1$
	5	1	0	1	1	1	0,057716	98	0	$E1$
	6	0	1	1	1	1	0,068335	92	0	$E1$
2	7	0	0	1	1	1	0,005046	60	10	$E0$
	8	0	1	0	1	1	0,001867	64	6	$E0$
	9	0	1	1	0	1	0,002987	77	0	$E1$
	10	0	1	1	1	0	0,001494	75	0	$E1$
	11	1	0	0	1	1	0,001577	70	0	$E1$
	12	1	0	1	0	1	0,002523	83	0	$E0$
	13	1	0	1	1	0	0,001262	81	0	$E1$
	14	1	1	0	0	1	0,000934	87	0	$E1$
	15	1	1	0	1	0	0,000467	85	0	$E1$
	16	1	1	1	0	0	0,000747	98	0	$E1$

Oprócz prawdopodobieństw P_i dla każdego i-tego stanu wyznaczono dodatkowo wielkości: Q_{Si} – czyli maksymalną możliwą wydajność PsDoW, N_i – czyli niedobór wody w i-tym stanie. Maksymalną możliwą wydajność PsDoW w i-tym stanie określono jako $Q_{si} = \sum_{\mathrm{UZW}j\ spr} q_j$. Niedobór wody w i-tym stanie wyznaczono jako $Ni = \max\left\{Q_{Si} - Q_w; 0\right\}$. Ponieważ jako kryterium sprawności przyjęto Q_w = 70% Qn, więc stany, dla których N_i = 0 zakwalifikowano do zbioru $E1$. Stąd na podstawie (2), (3) i (4) otrzymano K_S(MPCz) = 0,992239, EN = 0,283292 [% Qn] oraz K_{uS}(MPCz) = 0,999119. Opierając się na (6), mamy oszacowanie

$$0{,}992239 \le K_S < 0{,}993091 \qquad \text{oraz} \qquad 0{,}998267 < K_{u\,S} \le 0{,}999119$$

Jak zaznaczono wyżej, te dwie miary mają różne interpretacje praktyczne. Jeśli dalsze analizy wymagają większej dokładności szacunku ε, to należy uwzględnić stany z większą liczbą równoczesnych uszkodzeń (k = 3).

3. Błędy metod dwuparametrycznych

Metody dwuparametryczne umożliwiają wyznaczenie dwóch niezależnych miar niezawodności systemu – średniego czasu sprawności Tp_S oraz średniego czasu niesprawności Tn_S. Stąd na podstawie (1) można określić też wartość stacjonarnego wskaźnika gotowości systemu K_S. Zamiast Tp_S można wyznaczać tzw. intensywność uszkodzeń systemu równą $\lambda_S = \frac{1}{Tp_S}$. Znajomość tych miar pozwala na jednoznaczną ocenę niezawodności systemu. W praktyce do szacowania niezawodności obiektów wodociągowych i kanalizacyjnych najczęściej stosuje się metody: częstości uszkodzeń (klasyczną [9, 10] albo uogólnioną [4]) lub minimalnych przekrojów niesprawności [9, 10]. Stosowanie tych metod wymaga znajomości dwóch niezależnych parametrów: średniego czasu sprawności Tp_i oraz średniego czasu niesprawności Tn_i dla każdego z elementów systemu (i = 1, ..., n). W podanych poniżej wzorach zamiast Tp_i wykorzystuje się tzw. intensywność uszkodzeń elementów równą $\lambda_i = \frac{1}{Tp_i}$.

3.1. Klasyczna metoda częstości uszkodzeń

Częstość uszkodzeń systemu określa się jako [9, 10]

$$f_S = \frac{1}{Tp_S + Tn_S} \tag{8}$$

gdzie:

Tp_S, Tn_S – odpowiednio średnie czasy sprawności i niesprawności systemu.

Wielkość f_S określa średnią liczbę uszkodzeń systemu przypadającą na jednostkę czasu. Słuszne są wzory

$$Tp_S = \frac{K_S}{f_s} \qquad \text{oraz} \qquad Tn_S = \frac{1 - K_s}{f_S} \tag{9}$$

Jeśli więc znane są wartości stacjonarnego wskaźnika gotowości systemu K_S oraz częstości uszkodzeń f_S, to z zależności (9) można wyznaczyć poszukiwane miary Tp_S oraz Tn_S. Dla struktur podstawowych (szeregowej, równoległej, progowej) wartość K_S można wyznaczyć dokładnie za pomocą wzorów analitycznych. Wartość f_S wyznacza się natomiast stosunkowo prosto z funkcji matematycznie opisującej przypadki utraty sprawności systemu, czyli przypadki przejścia systemu ze zbioru stanów $E1$ do zbioru $E0$. Rozpatruje się jedynie tzw. stany graniczne, dla których zajście jednego uszkodzenia powoduje utratę sprawności systemu. Klasyczną metodę częstości uszkodzeń można stosować dla systemów o niezawodnościowej strukturze podstawowej oraz mieszanej. W ostatnim przypadku należy najpierw zblokować elementy tworzące struktury podstawowe, a następnie etapami wynikającymi z blokowania stosować metodę dla bloków elementów. Poniżej przedstawiono wzory do wyznaczania Tp_S oraz Tn_S dla struktur podstawowych [9, 10].

Dla *n*-elementowej struktury szeregowej zachodzi

$$K_s = \prod_{i=1}^{n} K_i \qquad \text{oraz} \qquad f_S = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot \prod_{j \neq i} K_j \tag{10}$$

Po dokonaniu niezbędnych przekształceń uzyskuje się

$$\lambda_S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \text{oraz} \qquad Tn_S \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot Tn_i}{\lambda_S} \tag{11}$$

gdzie:

λ_S, λ_i – intensywności uszkodzeń systemu i elementów.

Znak przybliżenia dla Tn_S wynika z uproszczenia wzoru i pominięcia iloczynów kombinacji kilku członów postaci $\lambda_i \cdot Tn_i$. Przybliżoną wartość średniego czasu niesprawności systemu oznaczono przez $Tn_S(f_S)$, a wartość dokładną przez Tn_S. Popełniany przy tym błąd pominięcia jest równy

$$\Delta(Tn) = Tn_S - Tn_S(f_S) = \\ = \frac{\sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j Tn_i Tn_j + \sum_{i<j<k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k Tn_i Tn_j Tn_k + \ldots + \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n Tn_1 Tn_2 \ldots Tn_n}{\lambda_S} \tag{12}$$

Dla rzeczywistych obiektów inżynierskich zachodzi $Tp_i >> Tn_i$, co teoretycznie oznacza, że pomijane wielkości są małe.

Dla *n*-elementowej struktury równoległej zachodzi

$$K_s = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - K_i) \qquad \text{oraz} \qquad f_S = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot \prod_{j \neq i} (1 - K_j) \tag{13}$$

Po dokonaniu niezbędnych przekształceń uzyskuje się

$$\lambda_S \approx \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} Tn_j \right) \qquad \text{oraz} \qquad Tn_S = \frac{\prod_{i=1}^{n} Tn_i}{\sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} Tn_j} \tag{14}$$

gdzie:

λ_S, λ_i – intensywności uszkodzeń systemu i elementów.

Podobnie jak poprzednio, znak przybliżenia dla λ_S wynika z uproszczenia wzoru i pominięcia członów o małej wartości. Przybliżoną wartość intensywności uszkodzeń, uzyskaną za pomocą klasycznej metody częstości uszkodzeń, oznaczono tutaj przez $\lambda_S(f_S)$, natomiast wartość dokładną przez λ_S. Zachodzi między nimi związek

$$\frac{\lambda_S}{\lambda_S(f_S)} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Tn_i + \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j Tn_i Tn_j + \sum_{i<j<k} \lambda_i \lambda_j \lambda_k Tn_i Tn_j Tn_k + \ldots + \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} \lambda_j Tn_j \quad (15)$$

który pozwala na względną ocenę popełnianego błędu jako

$$\delta = \left(\frac{\lambda_S - \lambda_S(f_S)}{\lambda_S} \right) \cdot 100\% = \left(1 - \frac{\lambda_S(f_S)}{\lambda_S} \right) \cdot 100\% \quad (16)$$

Dla jednorodnych struktur progowych typu „n z M” wartość stacjonarnego wskaźnika gotowości wyznacza się jako

$$K_S = \sum_{k=0}^{M-n} \binom{M}{k} K_e^{M-k} \left(1 - K_e\right)^k \quad (17)$$

gdzie:

k – liczba równocześnie uszkodzonych elementów,

K_e – wartość stacjonarnego wskaźnika gotowości dowolnego elementu e.

Wartość funkcji częstości uszkodzeń jest równa

$$f_S = M f_e \binom{M-1}{M-n} K_e^{n-1} \left(1 - K_e\right)^{M-n} \quad (18)$$

Dla struktur niejednorodnych ogólne wzory na K_S oraz f_S są bardzo złożone, dlatego lepiej jest wyznaczać ich wartości na podstawie tabeli metody przeglądu. Następnie na podstawie wzorów (9) wyznacza się wartości parametrów Tp_S oraz Tn_S. W tym przypadku nie pomija się żadnych członów, więc uzyskane wyniki Tp_S i Tn_S powinny być dokładne. Jednak w pewnych sytuacjach, tj. wówczas gdy cały system jest wysoce niezawodny (wysoce niezawodne elementy lub duża rezerwa elementów), uzyskuje się wyniki obarczone tzw. błędami numerycznymi, wynikającymi z przeprowadzania obliczeń na tzw. wielkościach nieskończenie małych. Takimi nieskończenie małymi wielkościami w pewnych wyjątkowych przypadkach są f_S oraz występująca w (9) zawodność systemu równa $U_S = 1 - K_S$. Aby zabezpieczyć się przed takimi przypadkami, proponuje się stosowanie dla struktur progowych jednorodnych zamiast (9) odpowiednio przekształconych wzorów

$$Tp_S = \frac{Tp_e}{n\binom{M}{n}} \sum_{k=0}^{M-n} \binom{M}{k} \left(\lambda_e \cdot Tn_e\right)^{k-M+n} = \frac{1}{n\binom{M}{n}} \sum_{k=0}^{M-n} \binom{M}{k} Tp_e^{M-n-k+1} \cdot Tn_e^{k-M+n} \quad (19)$$

oraz

$$Tn_S = \frac{Tp_e}{n\binom{M}{n}} \sum_{k=M-n+1}^{M} \binom{M}{k} \left(\lambda_e \cdot Tn_e\right)^{k-M+n} = \frac{Tp_e}{n\binom{M}{n}} \sum_{k=M-n+1}^{M} \binom{M}{k} Tp_e^{M-k-n+1} \cdot Tn_e^{k-M+n} \quad (20)$$

gdzie:

λ_e – intensywność uszkodzeń elementów jednorodnych równa $\lambda_e = 1/Tp_e$.

Przykład 2. Pompownia wody uzdatnionej w Tarnowie ma jednorodną strukturę progową „4 z 6” [2]. Elementami e struktury są agregaty pompowe zblokowane z zainstalowanymi obok zaworami zwrotnymi Na podstawie danych z eksploatacji parametry niezawodnościowe tych elementów przyjęto jako: Tp_e = 85 700 h oraz Tn_e = 25 h. Stąd ich stacjonarny wskaźnik gotowości wynosi K_e = 0,999708369 [5]. Dalej prowadzono obliczenia za pomocą klasycznej metody uszkodzeń z różną dokładnością. Z inżynierskiego punktu widzenia wartości K_S, różniące się na miejscach szóstym i dalszych, są praktycznie nierozróżnialne. Wartości uzyskane podczas obliczeń zamieszczono w tabeli 2. Zastosowany zapis $0{,}9^{(x)}$ oznacza, że po przecinku dziesiętnym znajduje się x cyfr „9”.

Tabela 2

Zestawienie wyników obliczeń Tp_S i Tn_S za pomocą wzorów (9) w zależności od dokładności prowadzenia obliczeń

K_S	Tp_S [h]	Tn_S [h]
$0{,}9^{(7)}$	1,6814E + 10	1681,40
$0{,}9^{(8)}$	1,6814E + 10	168,14
$0{,}9^{(9)}$	1,6814E + 10	16,81
$0{,}9^{(10)}$	1,6814E + 10	1,68

W zależności od liczby uwzględnianych cyfr znaczących K_S uzyskuje się różne rzędy wyników Tn_S. Natomiast zastosowanie wzorów (19) i (20) pozwala uzyskać wiarygodne wartości Tp_S = 1,6814E + 10 [h] oraz Tn_S = 8,34 [h]. Poprawność tych wyników zweryfikowano m.in. za pomocą metody minimalnych przekrojów niesprawności i symulacyjnej metody Monte Carlo.

3.2. Uogólniona metoda częstości uszkodzeń

Dla systemów złożonych, dla których istnieją różne rodzaje rezerw lub elementy są niejednorodne, wyznaczenie matematycznej postaci funkcji częstości uszkodzeń może być trudne lub wręcz niemożliwe. W takich sytuacjach można stosować uogólnioną metodę częstości uszkodzeń [4, 1].

Intensywność strumienia uszkodzeń dowolnego systemu jest równa [8]

$$\Phi_S = \sum_{z \in E0} \sum_{i \in E1} P_i \lambda_{iz} \tag{21}$$

gdzie:

- i, z – numery stanów elementarnych systemu,
- $E1$, $E0$ – odpowiednio zbiór stanów sprawności i niesprawności systemu,
- P_i – prawdopodobieństwo zajścia i-tego stanu systemu,
- λ_{iz} – intensywność przejścia systemu ze stanu i-tego do stanu z-tego.

Jak wynika ze wzoru do wyznaczenia Φ_S należy uwzględnić jedynie graniczne stany systemu. Spełniona jest analogiczna do (8) zależność [8]

$$\Phi_S = \frac{1}{Tp_S + Tn_S} \tag{22}$$

Wykazano, że średnie czasy sprawności i niesprawności systemu można wyznaczać jako [8]

$$Tp_S = \frac{1}{\Phi_S} \sum_{i \in E1} P_i \qquad \text{oraz} \qquad Tn_S = \frac{1}{\Phi_S} \sum_{i \in E0} P_i \tag{23}$$

W dalszej części przyjęto oznaczenia: $K_S(\mathrm{MP}) = \sum_{i \in E1} P_i$ oraz $U_S(\mathrm{MP}) = \sum_{i \in E0} P_i$. Wielkości K_S(MP) oraz U_S(MP) są odpowiednio niezawodnością i zawodnością systemu, wyznaczonymi za pomocą MP, przy czym dla MPZ zachodzi $K_S(\mathrm{MPZ}) + U_S(\mathrm{MPZ}) = 1$. Zdefiniowana powyżej intensywność uszkodzeń jest odpowiednikiem klasycznej częstości uszkodzeń. Wykazano, że dla struktur podstawowych wzory na f_S oraz Φ_S po dokonaniu odpowiednich przekształceń są zgodne [4]. Wyznaczanie parametrów Tp_S i Tn_S na podstawie MPZ nie wprowadza błędów wynikających z pomijania mało prawdopodobnych stanów elementarnych systemu. Jednak przy stosowaniu MPCz należy dokonać oceny dokładności wyników.

Wykorzystanie MPCz oznacza prowadzenie obliczeń nie na dokładnych wielkościach K_S, U_S oraz Φ_S, lecz na wielkościach przybliżonych, oznaczonych tutaj odpowiednio przez K_S(MPCz), U_S(MPCz) i Φ_S(MPCz). Zbyt duże przybliżenia tych wielkości mogą znacząco wpłynąć na dokładność wyników końcowych Tp_S i Tn_S. Nieobarczone błędem MPCz wartości K_S, U_S oraz Φ_S można oszacować za pomocą następujących nierówności

$$K_S(\mathrm{MPCz}) \le K_S < K_S(\mathrm{MPCz}) + \varepsilon \qquad U_S(\mathrm{MPCz}) < U_S \le U_S(\mathrm{MPCz}) + \varepsilon \tag{24}$$

$$\text{oraz} \qquad \Phi_S(\mathrm{MPCz}) \le \Phi_S < \Phi_S(\mathrm{MPCz}) + \Delta(\Phi_S) \tag{25}$$

gdzie błędy oszacowań są odpowiednio równe: ε (wzór (7)) oraz

$$\Delta(\Phi_S) = \frac{\varepsilon \cdot \sum_{k > k_{\max}} (n-k)}{\min\limits_{i=1,\ldots n} Tp_i} \tag{26}$$

Powyższy wzór (26) jest prosty. Możliwe jest stosowanie innego, bardziej złożonego wzoru na błąd $\Delta\Phi_S$

$$\Delta(\Phi_S) = \frac{n}{\min\limits_{i=1,\ldots n} Tp_i} \sum_{k > k_{\max}} (n-k) \binom{n}{k} \left(\max_{i=1,\ldots n} \{K_i\} \right)^{n-k} \cdot \left(1 - \min_{i=1,\ldots n} \{K_i\} \right)^{k} \tag{27}$$

Oszacowania (26) i (27), podobnie jak (6), są pesymistyczne, gdyż przyjmuje się, że wszystkie pomijane w MPCz stany (tj. dla $k > k_{\max}$) są stanami granicznymi, dla których uszkodzenie każdego z ($n - k$) sprawnych elementów spowoduje utratę sprawności systemu, a równocześnie intensywność λ_{iz} jest maksymalna. Wzór złożony (27) lepiej sprawdza się w sytuacjach, gdy wartości K_i są mało zróżnicowane, natomiast wzór prosty (26) w sytuacjach, gdy wartości K_i są bardziej zróżnicowane. Jednak, niezależnie od przypadku, różnice oszacowań błędów $\Delta\Phi_S$ za ich pomocą wynoszą kilka procent. Na podstawie tych oszacowań oraz wzorów (23) można, stosując zasady analizy przedziałowej [6], podać następujące oszacowania dla średniego czasu sprawności i średniego czasu niesprawności systemu

$$\frac{K_S(\text{MPCz})}{\Phi_S(\text{MPCz})+\Delta\left(\Phi_S\right)} \le Tp_S \le \frac{K_S(\text{MPCz})+\varepsilon}{\Phi_S(\text{MPCz})} \tag{28}$$

$$\frac{U_S(\text{MPCz})}{\Phi_S(\text{MPCz})+\Delta\left(\Phi_S\right)} \le Tn_S \le \frac{U_S(\text{MPCz})+\varepsilon}{\Phi_S(\text{MPCz})} \tag{29}$$

Do obliczeń praktycznych, jako przybliżone wyniki średniego czasu pracy i średniego czasu niesprawności, proponuje się przyjmować wartości średnie z dolnego i górnego oszacowania równe odpowiednio

$$Tp_S = \left(\frac{K_S(\text{MPCz})}{\Phi_S(\text{MPCz})+\Delta\left(\Phi_S\right)} + \frac{K_S(\text{MPCz})+\varepsilon}{\Phi_S(\text{MPCz})}\right)/\,2 \tag{30}$$

$$Tn_S = \left(\frac{U_S(\text{MPCz})}{\Phi_S(\text{MPCz})+\Delta\left(\Phi_S\right)} + \frac{U_S(\text{MPCz})+\varepsilon}{\Phi_S(\text{MPCz})}\right)/\,2 \tag{31}$$

Wówczas maksymalne możliwe do popełnienia błędy bezwzględne oszacowań są równe

$$\Delta\left(Tp_S\right) = \left(\frac{K_S(\text{MPCz})+\varepsilon}{\Phi_S(\text{MPCz})} - \frac{K_S(\text{MPCz})}{\Phi_S(\text{MPCz})+\Delta\left(\Phi_S\right)}\right)/\,2 \tag{32}$$

$$\Delta\left(Tn_S\right) = \left(\frac{U_S(\text{MPCz})+\varepsilon}{\Phi_S(\text{MPCz})} - \frac{U_S(\text{MPCz})}{\Phi_S(\text{MPCz})+\Delta\left(\Phi_S\right)}\right)/\,2 \tag{33}$$

Jeśli błędy $\Delta\left(Tp_S\right)$ i $\Delta\left(Tn_S\right)$ są z inżynierskiego punktu widzenia na tyle małe, że ich niedokładności nie spowodują niejednoznaczności procesów decyzyjnych, to obliczenia można zakończyć. W przeciwnym wypadku należy zwiększyć zakres MPCz (tj. zwiększyć liczbę uwzględnianych stanów elementarnych). W praktyce, dla przypadków, gdy system musi spełniać wysokie wymagania (lub równoważnie ostre kryteria przynależności do zbioru E1 np. Q_w = 90% Qn), liczba stanów elementarnych, które należy uwzględnić, może być ograniczona przez $k_{\max} = 2$ lub $k_{\max} = 3$, gdyż stany systemu dla większej liczby równoczesnych uszkodzeń będą na ogół stanami niesprawności. Natomiast dla przypadków, gdy wymagania wobec systemu mogą zostać złagodzone (np. dla stanu uciążliwego funkcjonowania systemu Q_w = 30% Qn), należy zazwyczaj uwzględnić większą liczbę stanów. Jeśli nawet dla $k_{\max} = 2$ wielkość ε jest mała (np. rzędu 10^{-6}), może się zdarzyć, że żaden z uwzględnianych w MPCz stanów elementarnych nie jest stanem granicznym i wówczas w MPCz należy uwzględnić stany z większą liczbą równoczesnych uszkodzeń, dla których będzie $\Phi_S \neq 0$, a błędy oszacowań $\Delta\left(Tp_S\right)$ i $\Delta\left(Tn_S\right)$ będą dopuszczalne.

Przykład 3. Dla n = 5 układów zasilania w wodę o możliwościach produkcyjnych jak w przykładzie 1 wykorzystano informacje na temat średnich czasów pracy i niesprawności. Zostały one oszacowane odpowiednio przez: Tp_1 = 183 h, Tp_2 = 244 h, Tp_3 = 732 h,

Tp_4 = 649 h, Tp_5 = 366 h oraz Tn_1 = 16 h, Tn_2 = 18 h, Tn_3 = 20 h, Tn_4 = 24 h, Tn_5 = 8 h. Kryterium sprawności, podobnie jak w przykładzie 1, przyjęto jako Q_w = 70% Qn. Należy oszacować średni czas pracy i średni czas niesprawności całego PsDoW. Jako bazowa zostanie zastosowana MPCz. Wartość $k_{\max}$ zostanie określona na podstawie wielkości popełnianych błędów oceny ΔTp_S oraz ΔTn_S. Kolejno, w zależności od potrzeb, mogą być analizowane przypadki: $k_{\max}$ = 1, $k_{\max}$ = 2, $k_{\max}$ = 3 itd. Na początek dla przypadku $k_{\max}$ = 1 należy uwzględnić $I(\mathrm{MPCz}) = \binom{5}{0} + \binom{5}{1} = 1 + 5 = 6$ stanów elementarnych PsDoW. Potrzebne do dalszych obliczeń wartości zawarto w tab. 3. Pierwsze kolumny są takie jak w klasycznej tabeli MPCz (por. tab. 1).

Tabela 3

Tabela MPCz dla $k_{\max}$ = 1 dostosowana do wyznaczenia Tp_S i Tn_S

k	i	Elementy					Pi	Q_{Si} [% Qn]	Stan PsDoW	Q_{Si} [% Qn] po uszkodzeniu elementu					Stan PsDoW po uszkodzeniu elementu				
		1	2	3	4	5				1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1	1	0,781587	130	$E1$	92	98	102	115	113	$E1$	$E1$	$E1$	$E1$	$E1$
1	2	1	1	1	1	0	0,017084	113	$E1$	75	81	85	98	–	$E1$	$E1$	$E1$	$E1$	
	3	1	1	1	0	1	0,034168	115	$E1$	77	83	87	–	98	$E1$	$E1$	$E1$		$E1$
	4	1	1	0	1	1	0,021355	102	$E1$	64	70	–	87	85	$\boldsymbol{E0}$	$E1$		$E1$	$E1$
	5	1	0	1	1	1	0,057716	98	$E1$	60	–	70	83	81	$\boldsymbol{E0}$		$E1$	$E1$	$E1$
	6	0	1	1	1	1	0,068335	92	$E1$	–	60	64	77	75		$\boldsymbol{E0}$	$\boldsymbol{E0}$	$E1$	$E1$

Na podstawie tabeli 3 oraz wzorów (3) i (7) wyznaczono kolejno wartości: $K_S(\mathrm{MPCz}) = \sum_{i \in E1} Pi = 0,980254$, $\varepsilon = 1 - \sum_{i \le 6} Pi = 0,019746$, i na podstawie (6) oszacowania: $0,980254 \le K_S < 1$, $0 \le U_S < 0,019746$. Jak widać, w tabeli zidentyfikowano cztery przypadki utraty sprawności po zajściu dodatkowego uszkodzenia. Stąd $\Phi_S(\mathrm{MPCz}) = P4 \cdot \lambda_1 + P5 \cdot \lambda_1 + P6 \cdot (\lambda_2 + \lambda_3) = 0,000805237$ 1/h. Na podstawie prostego wzoru (26) określono $\Delta\Phi_S = 0,0006477$ [1/h]. Już na tym etapie można spodziewać się dużych wartości ΔTp_S i ΔTn_S, gdyż jak widać błąd $\Delta\Phi_S$ jest duży ($\Delta\Phi_S : \Phi_S \cong 0,8$). Dalej na podstawie (28) i (29) określono możliwe zakresy wyrażonych w godzinach wartości średnich czasów pracy i niesprawności w postaci nierówności: $678,80 \le Tp_S \le 1241,87$ oraz $0 \le Tn_S \le 24,52$. Zgodnie z (30) i (31) jako szacunkowe wartości można by przyjąć Tp_S ≈ 958,34 h oraz Tn_S ≈ 12,26 h, jednak błędy szacunku są zbyt duże. Są one równe $\Delta Tp_S = 283,53$ h oraz $\Delta Tn_S = 12,26$ h, czyli odpowiednio 29,6% oraz 100% (w stosunku do proponowanych szacunków). Dlatego konieczne jest poszerzenie zakresu MPCz i uwzględnienie dodatkowych stanów dla k = 2. Potrzebne do dalszych obliczeń wartości zawiera tabela 4.

Na podstawie tabeli 4 wyznaczono mniejszy błąd $\varepsilon = 1 - \sum_{i \le 16} Pi = 0,0008522$ i dokładniejsze wartości: $K_S(\mathrm{MPCz}) = \sum_{i \in E1} Pi = 0,992239$, a następnie oszacowania:

$0,992239 \le K_S < 0,993091$, $0,0069087 \le U_S < 0,007761$. W tabeli zidentyfikowano ponadto 21 przypadków utraty sprawności po zajściu dodatkowego uszkodzenia. Stąd $\Phi_S(\text{MPCz}) = 0,000911937$ 1/h. Na podstawie prostego wzoru (26) określono $\Delta\Phi_S = 1,4E-5$ 1/h. W tym przypadku $\Delta\Phi_S : \Phi_S \cong 0,015$, można więc przypuszczać, że błędy ΔTp_S i ΔTn_S będą niewielkie. Na podstawie (28) określono możliwe zakresy wyrażonych w godzinach wartości średnich czasów pracy i niesprawności w postaci nierówności: $1071,64 \le Tp_S \le 1088,99$ oraz $7,46 \le Tn_S \le 8,51$. Zgodnie z (30) i (31) jako szacunkowe wartości można by przyjąć $Tp_S \approx 1080{,}32$ h oraz $Tn_S \approx 7{,}99$ h. Wówczas błędy szacunku wynoszą odpowiednio $\Delta Tp_S = 8,68$ h oraz $\Delta Tn_S = 0,52$ h, czyli 0,8% oraz 6,6% (w stosunku do proponowanych szacunków). Ponieważ błędy szacunków są niewielkie, można więc zakończyć obliczenia na tym etapie. Dodatkowo wyznaczono pozostałe stany elementarne systemu (dla k = 4,5) i obliczono wartości dokładne (oparte na MPZ), uzyskując Tp_S = 1087,85 h, Tn_S = 8,49 h oraz K_S = 0,992260. Należy zaznaczyć, że ten etap w praktyce jest zbędny (do podjęcia decyzji wystarczą szacunkowe wartości parametrów niezawodności wraz z ich błędami), a tu posłużył jedynie do potwierdzenia słuszności oszacowań.

Tabela 4

Tabela MPCz zawierająca dodatkowe stany dla k = 2

k	i	Elementy					P_i	Q_{Si} [% Qn]	Stan PsDoW	Q_{Si} [% Qn] po uszkodzeniu elementu					Stan PsDoW po uszkodzeniu elementu				
		1	2	3	4	5				1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
2	7	0	0	1	1	1	0,005046	60	$E0$										
	8	0	1	0	1	1	0,001867	64	$E0$										
	9	0	1	1	0	1	0,002987	77	$E0$	–	45	49	–	60		**E0**	**E0**		**E0**
	10	0	1	1	1	0	0,001494	75	$E1$	-	43	47	60	–		**E0**	**E0**	**E0**	
	11	1	0	0	1	1	0,001577	70	$E1$	32	–	–	55	53	**E0**			**E0**	**E0**
	12	1	0	1	0	1	0,002523	83	$E1$	45	–	55	–	66	**E0**		**E0**		**E0**
	13	1	0	1	1	0	0,001262	81	$E1$	43	–	53	66	–	**E0**		**E0**	**E0**	
	14	1	1	0	0	1	0,000934	87	$E1$	49	55	–	–	70	**E0**	**E0**			$E1$
	15	1	1	0	1	0	0,000467	85	$E1$	47	53	–	70	–	**E0**	**E0**		$E1$	
	16	1	1	1	0	0	0,000747	98	$E1$	60	66	70	–	–	**E0**	**E0**	$E1$		

3.3. Metoda minimalnych przekrojów niesprawności

Parametry niezawodnościowe systemu Tp_S i Tn_S oblicza się po wyznaczeniu minimalnych przekrojów niesprawności. Przekrój niesprawności systemu to taki zbiór jego elementów, że jeśli wszystkie są niesprawne, to system też jest niesprawny. Minimalny przekrój niesprawności nie zawiera w sobie żadnego innego przekroju. Ponieważ prawdopodobieństwo równoczesnego uszkodzenia więcej niż trzech elementów jest małe, w praktyce wyznacza się więc zazwyczaj przekroje jedno-, dwu- oraz trójelementowe [9, 10]. Wszystkie przekroje niesprawności, z niezawodnościowego punktu widzenia, są połączone szeregowo, bo niesprawność przynajmniej jednego przekroju powoduje niesprawność systemu. Natomiast w jednym przekroju elementy są połączone równolegle, co wynika z określenia przekroju niesprawności. Powyższe spostrzeżenia upoważniają do stosowania wzorów klasycznej metody częstości uszkodzeń. W praktyce stosuje się najczęściej wzory uproszczone [9, 10]:

– dla struktury równoległej w celu wyznaczenia intensywności uszkodzeń oraz średnich czasów niesprawności minimalnych przekrojów niesprawności:

– jednoelementowych

$$\lambda_{[i]} = \lambda_i, \quad Tn_{[i]} = Tn_i \tag{34}$$

– dwuelementowych

$$\lambda_{[i,j]} \approx \lambda_i \lambda_j \left(Tn_i + Tn_j \right), \quad Tn_{[i,j]} = \frac{Tn_i Tn_j}{Tn_i + Tn_j} \tag{35}$$

– trójelementowych

$$\lambda_{[i,j,k]} \approx \lambda_i \lambda_j \lambda_k \left(Tn_i Tn_j + Tn_i Tn_k + Tn_j Tn_k \right) \tag{36}$$

$$Tn_{[i,j,k]} = \frac{Tn_i Tn_j Tn_k}{Tn_i Tn_j + Tn_i Tn_k + Tn_j Tn_k} \tag{37}$$

– dla struktury szeregowej w celu wyznaczenia intensywności uszkodzeń oraz średniego czasu niesprawności całego systemu

$$\lambda_S = \sum_{[i]} \lambda_{[i]} + \sum_{[i,j]} \lambda_{[i,j]} + \sum_{[i,j,k]} \lambda_{[i,j,k]} \tag{38}$$

$$Tn_S \approx \frac{\sum_{[i]} \lambda_{[i]} Tn_{[i]} + \sum_{[i,j]} \lambda_{[i,j]} Tn_{[i,j]} + \sum_{[i,j,k]} \lambda_{[i,j,k]} Tn_{[i,j,k]}}{\lambda_S} \tag{39}$$

Znaki przybliżeń we wzorach na intensywność uszkodzeń minimalnych przekrojów niesprawności (35), (36) oraz we wzorze na średni czas niesprawności systemu (39) wynikają, jak wspomniano w punkcie 3.1, z pomijania iloczynów $\lambda_i Tn_i$, które najczęściej są członami o małej wartości. Analityczne oszacowanie końcowych błędów Tp_S i Tn_S dla ogólnego przypadku jest trudne. Dlatego, aby uzyskać dokładny wynik, w miejsce wzorów uproszczonych można stosować wzory dokładne:

– dla struktury równoległej w celu wyznaczenia intensywności uszkodzeń minimalnych przekrojów niesprawności:

– dwuelementowych

$$\lambda_{[i,j]} = \frac{\lambda_i \lambda_j \left(Tn_i + Tn_j \right)}{1 + \lambda_i Tn_i + \lambda_j Tn_j} \tag{40}$$

– trójelementowych

$$\lambda_{[i,j,k]} = \frac{\lambda_i \lambda_j \lambda_k \left(Tn_i Tn_j + Tn_i Tn_k + Tn_j Tn_k \right)}{1 + \lambda_i Tn_i + \lambda_j Tn_j + \lambda_k Tn_k + \lambda_i Tn_i \lambda_j Tn_j + \lambda_i Tn_i \lambda_k Tn_k + \lambda_i Tn_i \lambda_k Tn_k} \tag{41}$$

– dla struktury szeregowej w celu wyznaczenia intensywności uszkodzeń oraz średniego czasu niesprawności struktury

$$Tn_S \approx \left(\sum_{[i]} \lambda_{[i]} Tn_{[i]} + \sum_{[i,j]} \lambda_{[i,j]} Tn_{[i,j]} + \sum_{[i,j,k]} \lambda_{[i,j,k]} Tn_{[i,j,k]} + \sum_{[i,j],[l,k]} \lambda_{[i,j]} Tn_{[i,j]} \lambda_{[l,k]} Tn_{[l,k]} + \right. \\ \left. + \sum_{[i,j],[l,k],[m,n]} \lambda_{[i,j]} Tn_{[i,j]} \lambda_{[l,k]} Tn_{[l,k]} \lambda_{[m,n]} Tn_{[m,n]} + \ldots \prod_{[i,j]} \lambda_{[i,j]} Tn_{[i,j]} \right) / \lambda_S \tag{42}$$

Metoda minimalnych przekrojów niesprawności jest metodą przybliżoną, gdyż opiera się na przybliżonej klasycznej metodzie częstości uszkodzeń. Z analizy wyników przeprowadzonych dla wielu przykładów obliczeniowych wynika, że wyznaczone za pomocą tej metody parametry Tp_S i Tn_S mogą być obarczone błędami, jeśli:

– elementy systemu charakteryzują się niską niezawodnością,
– system jest złożony; wówczas niektóre elementy mogą występować w wielu minimalnych przekrojach niesprawności,
– w przypadku małej liczby lub braku przekroi jedno-, dwu- lub trójelementowych pomija się przekroje wieloelementowe (gdy jest ich dużo),
– powyższe przyczyny występują równocześnie.

Pierwsza przyczyna jest stosunkowo łatwa do sprawdzenia, wynika bowiem z faktu, że różnica rzędów średnich czasów pracy między uszkodzeniami i średnich czasów niesprawności elementów jest zbyt mała. Jednak w konkretnym przypadku trudno przewidzieć, jaki będzie błąd wyniku. Wpływ trzeciej przyczyny można zweryfikować przez przeprowadzenie obliczeń z uwzględnieniem przekrojów wieloelementowych i porównanie wyników. Zawsze jednak w wątpliwych przypadkach oraz gdy uzyskane wartości Tp_S i Tn_S są bliskie wartościom uznanym przez decydentów za graniczne lub krytyczne dla prawidłowego i bezpiecznego działania obiektów wodociągowych i kanalizacyjnych, zaleca się przeprowadzenie obliczeń z wykorzystaniem wzorów dokładnych lub za pomocą innej metody.

Przykład 4. Z określenia struktury progowej wynika, że struktura „n z M” posiada tylko $\binom{M}{n-1}$ minimalnych przekrojów ($M - n + 1$)-elementowych. Dla jednorodnych struktur progowych S typu „n z 5” (dla n = 5, 4, 3) wyznaczono Tp_S i Tn_S. Zastosowano metody:

a) klasyczną częstości uszkodzeń (f_S),
b) uogólnioną częstości uszkodzeń (Φ_S),
c) minimalnych przekrojów niesprawności z wykorzystaniem wzorów uproszczonych (MPN-U),
d) minimalnych przekrojów niesprawności z wykorzystaniem wzorów dokładnych (MPN-D).

Obliczenia przeprowadzono dla dwóch zestawów danych, tj. gdy elementy charakteryzowała niezawodność:

I) niska: Tp_e = 126 h, Tn_e = 24 h, K_e = 0,84,
II) wyższa: Tp_e = 500 h, Tn_e = 24 h, K_e = 0,954198.

We wszystkich przypadkach dla metod (f_S) i (Φ_S) uzyskano zgodność wyników Tp_S, Tn_S i K_S. Ponadto K_S było zgodne z wynikiem uzyskanym za pomocą wzorów analitycznych (wartość dokładna). Dlatego w dalszej części wyniki uzyskane z metod częstości uszkodzeń uważa się za dokładne i przyjmuje za podstawę do porównań. Metody MPN-U i MPN-D dały wyniki Tp_S i Tn_S zaniżone w stosunku do wyników uzyskanych za pomocą metod częstości uszkodzeń. Dla zestawu II (elementy bardziej niezawodne) uzyskano dokładniejsze wartości niż dla zestawu I (elementy bardziej zawodne). Częściowe wyniki obliczeń, tj. średnie czasy Tp_S i Tn_S wraz z błędami procentowymi δ wyznaczonymi w stosunku do wyników uzyskanych za pomocą metod częstości uszkodzeń, zestawiono w tab. 5. Błędy procentowe wyznaczono jako

$$\delta = \frac{(WD - WP)}{WD} \cdot 100\% \tag{43}$$

gdzie:

WD – wartość dokładna,
WP – wartość przybliżona.

T a b e l a 5

Zestawienie wyników obliczeń za pomocą metod dwuparametrycznych dla przykładu 4

Struktura	Metoda	Zestaw I				Zestaw II			
		Tp_S [h];	δ [%]	Tn_S [h];	δ [%]	Tp_S [h];	δ [%]	Tn_S [h];	δ [%]
„5 z 5”	f_S; Φ_S	25,2;	0%	35,06;	0%	100;	0%	26,42;	0%
	MPN-U	25,2;	0%	24;	–31,5%	100;	0%	24;	–9,15%
	MPN-D								
„4 z 5”	f_S; Φ_S	64,58;	0%	14,51;	0%	645,83;	0%	12,59;	0%
	MPN-U	33,08;	**–48,8%**	12;	**–17,3%**	520,83;	**–19,4%**	12;	–4,7%
	MPN-D	45,68;	**–50%**			570,83;	**–11,6%**		
„3 z 5”	f_S; Φ_S	268,01;	0%	8,79;	0%	9136,57;	0%	8,2;	0%
	MPN-U	115,76;	**–56,8%**	8;	–9%	7233,8;	**–20,8%**	8;	–2,3%
	MPN-D	194,51;	**–27,4%**			8325,5;	**–8,9%**		

Wpływ niezawodności elementów składowych struktury jest znaczny. Ponadto przy większej liczbie elementów rezerwowych uzyskuje się w stosunku do metod częstości uszkodzeń różnice większe dla Tp_S oraz mniejsze dla Tn_S.

Przykład 5. Dla danych z przykładów 1 i 3 na podstawie tabeli metody przeglądu zupełnego wyznaczono minimalne drogi sprawności. Następnie wyznaczono następujące minimalne przekroje niesprawności: [1, 2], [1, 3, 4], [1, 4, 5], [2, 3, 4], [2, 4, 5] oraz wyznaczono miary niezawodności systemu: Tp_S, Tn_S i K_S. Wyniki obliczeń dla przypadków, gdy stosowano wzory uproszczone i dokładne oraz gdy pominięto i gdy uwzględniono przekroje trójelementowe [3], porównano z wynikami obliczeń, uzyskanymi za pomocą uogólnionej metody częstości uszkodzeń opartej na MPZ, i zestawiono w tab. 6. W tabeli podano również błędy procentowe wyznaczone w stosunku do wyników dokładnych, uzyskanych za pomocą uogólnionej metody częstości uszkodzeń opartej na MPZ.

Skutkiem stosowania wzorów uproszczonych może być znaczny błąd Tp_S lub Tn_S. Równocześnie dokładność wyniku zależy od uwzględniania lub nieuwzględniania w obliczeniach przekroi trójelementowych. Jeśli występuje duża liczba przekroi trójelementowych, to dokładniejszy wynik uzyska się po uwzględnieniu tych przekroi. Jeśli natomiast liczba przekroi trójelementowych jest niewielka, to ich uwzględnienie paradoksalnie generuje większy błąd wyniku. Fakt ten można tłumaczyć powtarzalnością elementów w przekrojach. Choć dla zastosowań inżynierskich błąd $\Delta(Tp_S)$ i $\Delta(Tn_S)$ może nie mieć znaczenia (czasem istotny jest tylko rząd wyniku), to nie ma możliwości oszacowania popełnianego błędu.

T a b e l a 6

Zestawienie wyników obliczeń za pomocą metod dwuparametrycznych dla przykładu 5

Miary niezawodności systemu S	Uogólniona metoda częstości uszkodzeń Φ_S(MPZ)	Metoda minimalnych przekrojów niesprawności			
		wzory uproszczone (MPN-U)		wzory dokładne (MPN-D)	
		przekroje 3-elementowe pominięte	przekroje 3-elementowe uwzględnione	przekroje 3-elementowe pominięte	przekroje 3-elementowe uwzględnione
Tp_S [h]	1 087,85	970,70	919,01	1 115,05	1 055,65
		–10,77%	–15,52%	2,50%	–2,96%
Tn_S [h]	8,49	8,58	8,39	8,58	8,39
		1,10%	–1,18%	1,10%	–1,18%
K_s	0,992260	0,991239	0,990958	0,992364	0,992119
		–0,10%	–0,13%	0,01%	–0,01%

4. Podsumowanie

Obiekty wodociągowe i kanalizacyjne są obok obiektów gazowniczych i ciepłowniczych strategicznymi elementami infrastruktury miejskiej. Dlatego oprócz kryteriów technicznych i ekonomicznych formułuje się dla nich kryteria niezawodnościowe. Kryteria te są oparte na ocenie podstawowych miar niezawodności tych obiektów (np. niezawodność nie niższa niż wymagana, intensywność uszkodzeń nie wyższa niż dopuszczalna, czas niesprawności nie dłuższy od granicznego). Równie ważna jest przy tym umiejętność wyznaczania tych miar, jak też umiejętność określenia popełnianego przy tym błędu. Szacowane miary niezawodności są obarczone błędami danych wyjściowych, mogą również być obarczone błędem metody szacowania miar niezawodności. Błędy metod wynikają z pomijania w obliczeniach mało prawdopodobnych stanów systemu, stosowania uproszczonych wzorów lub z prowadzenia obliczeń na tzw. wielkościach nieskończenie małych.

Uzyskane przez autorkę i przedstawione powyżej zależności od wyznaczania błędów analizowanych metod wskazują na ich praktyczną przydatność. Mogą być one stosowane do innych ważnych obiektów technicznych. Uogólniona metoda częstości uszkodzeń sprawdziła się w wielu zadaniach testowych. W przeciwieństwie do metody minimalnych przekrojów niesprawności możliwe jest oszacowanie jej błędu i sterowanie dokładnością obliczeń. Wydaje się, że uogólniona metoda częstości jest niedoceniana, co może wynikać z jej nieznajomości.

Obecnie, w dobie powszechnego wykorzystywania komputerów, zaleca się prowadzić obliczenia z uwzględnieniem większej liczby stanów elementarnych systemu, tak aby błąd metody uczynić dowolnie małym (błędy te można wyznaczyć za pomocą odpowiednich zależności), albo stosować skomplikowane wzory dokładne (wówczas nie ma potrzeby oceny błędu). Inną możliwością jest użycie symulacyjnej metody Monte Carlo, jednak nakład pracy na napisanie dobrego programu symulacyjnego, uwzględniającego specyfikę pracy obiektu, na ogół jest większy niż nakład pracy na programową realizację znanych metod szacowania miar niezawodności.

L i t e r a t u r a

[1] B a j e r J., I w a n e j k o R., K a p c i a J., *Niezawodność systemów wodociągowych i kanalizacyjnych w zadaniach*, Wyd. Politechniki Krakowskiej, Kraków 2007.

[2] D u ż y B., *Ocena niezawodności podsystemu dostawy wody dla miasta Tarnów*, praca dyplomowa na Wydziale Inżynierii Środowiska Politechniki Krakowskiej, Kraków 2002.

[3] I w a n e j k o R., SZPN – Program komputerowy realizujący metodę minimalnych przekrojów niesprawności, Kraków 1997.

[4] I w a n e j k o R., *O praktycznym sposobie dokonania dwuparametrycznej oceny niezawodności systemu za pomocą metody przeglądu*, Czasopismo Techniczne z. 8-Ś/2002, Wyd. Politechniki Krakowskiej, Kraków 2002, 59-70.

[5] I w a n e j k o R., B u d z i ł o B., *Uwagi do dwuparametrycznej metody wyznaczania niezawodności obiektów wodociągowych*, Czasopismo Techniczne z. 7-Ś/2003, Wyd. Politechniki Krakowskiej, Kraków 2003, 145-152.

[6] I w a n e j k o R., *Ocena dokładności parametrów niezawodnościowych systemów wodociągowych i kanalizacyjnych*, Część I, *Oceny wstępne*, Czasopismo Techniczne z. 2-Ś/2009, Wyd. Politechniki Krakowskiej, Kraków 2009, 13-25.

[7] I w a n e j k o R., *Ocena dokładności parametrów niezawodnościowych systemów wodociągowych i kanalizacyjnych*, Część II, *Oceny statystyczne*, Czasopismo Techniczne z. 2-Ś/2009, Wyd. Politechniki Krakowskiej, Kraków 2009, 27-40.

[8] S o ł o w j e w A.D., *Analityczne metody w teorii niezawodności*, WNT, Warszawa 1983.

[9] W i e c z y s t y A., *Niezawodność systemów wodociągowych i kanalizacyjnych*, t. 1, *Teoria niezawodności i jej zastosowania*, Cz. I i II, Skrypt dla studentów wyższych szkół technicznych do przedmiotu „Optymalizacja systemów zaopatrzenia w wodę i usuwania ścieków", Wyd. Politechniki Krakowskiej, Kraków 1990.

[10] W i e c z y s t y A. (red.), *Metody oceny i podnoszenia niezawodności działania komunalnych systemów zaopatrzenia w wodę*, Monografie Komitetu Inżynierii Środowiska Polskiej Akademii Nauk, Vol. 2, Kraków 2001.