

JAKUB KISIEL*

OPRÓŻNIANIE JEDNOKOMOROWYCH ZBIORNIKÓW
O KSZTAŁCIE BRYŁ OBROTOWYCHEMPTYING OF MONOCULAR CONTAINERS
OF THE SOLID OF REVOLUTION SHAPE

Streszczenie

W niniejszym artykule przedstawiono rozwiązania równań różniczkowych opisujących procesy opróżniania komór zbiornika o kształtach brył obrotowych. Wybrane zostały tylko takie bryły obrotowe oraz ich ułożenie, które znajdują zastosowanie w praktyce. Wybrano zatem komory o następujących kształtach: walca ułożonego na swej poboczniczy, kuli oraz stożka zwróconego wierzchołkiem ku dołowi. W rozwiązaniach równań różniczkowych opisujących procesy opróżniania tych komór zbiornika dokonano możliwych uogólnień, które zwiększają zakres otrzymanych rozwiązań dla wszystkich przypadków dotyczących określonego kształtu bryły obrotowej.

Słowa kluczowe: ruch nieustalony, opróżnianie komór zbiorników

Abstract

In the present article solving differential equations describing processes of emptying chambers of the container about shapes of solids of revolution was described. Only such solids of revolution and their setting which they are finding were chosen practical implementation. And so a chamber was chosen as the arranged cylinder on one's side surface, about the shape hammered the chamber and chamber in the form of the cone returned with top downwards. In solutions of differential equations describing processes of emptying these chambers of the container they made possible generalizations which are increasing the scope of ultimate solutions for all cases in the given solid of revolution.

Keywords: transient move, emptying of chambers containers

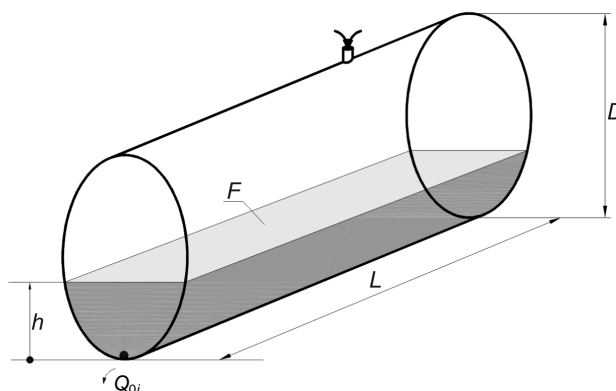
* Dr inż. Jakub Kisiel, Instytut Inżynierii Środowiska, Wydział Inżynierii i Ochrony Środowiska, Politechnika Częstochowska.

1. Wstęp

Problematyka niestabilnego ruchu cieczy przy jej wypływie z opróżnianych komór zbiorników nie znajduje w literaturze fachowej, szczególnie w podręcznikach akademickich, należytego miejsca, aby można było stwierdzić, że jest ona przez autorów książek uznawana za równie istotną, jak inne zagadnienia z hydrodynamiki przepływów. W niektórych podręcznikach można jednak znaleźć opis procesów opróżniania prostopadłościennych komór w wariacie bez dopływu i ze stałym dopływem do tej komory oraz opis procesu wyrównywania poziomów cieczy w dwóch prostopadłościennych komorach zbiornika. Podejmując prace w zakresie niestabilnych procesów opróżniania szeregowo połączonych komór zbiorników [2], dokonano również prezentacji podstawowych rozwiązań z jednokomorowymi zbiornikami, w tym także przypadki brył obrotowych, które zostały opisane w niniejszym artykule. Przedstawione rozwiązania mogą zatem stanowić uzupełnienie podstawowej podręcznikowej wiedzy w tym zakresie, jak również mogą być przydatne w praktyce inżynierskiej.

Komory zbiornika o kształtach brył obrotowych znajdują praktyczne zastosowanie jako retencyjne zbiorniki kanalizacyjne (zbiorniki rurowe), kuliste zbiorniki wodociągowe wieży ciśnienia oraz zbiorniki stożkowe stosowane w oczyszczalni ścieków.

2. Komora zbiornika w kształcie walca poziomo ułożonego na swej pobocznicy



Rys. 1. Cylindryczna komora zbiornika ułożona poziomo na swej pobocznicy
Fig. 1. Cylindrical chamber of the container laid horizontally on its side surface

W literaturze [1] zdefiniowane zostały bezwymiarowe hydrauliczno-geometryczne parametry dotyczące kolektorów o kołowym przekroju poprzecznym. Wybrane z nich dotyczą (rys. 2):

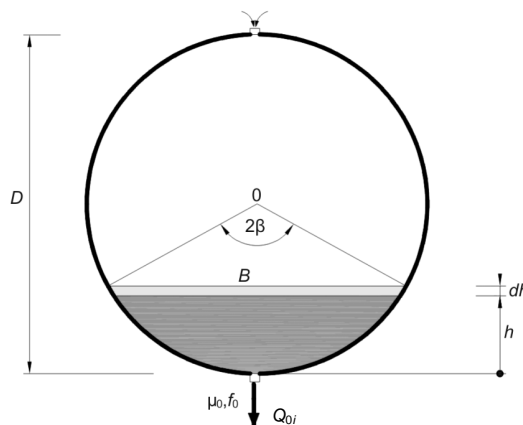
$$K_h = \frac{h}{D} = 0,5(1 - \cos \beta) \text{ – stosunku napełnienia } (h) \text{ kolektora do jego średnicy } (D),$$

$$K_B = \frac{B}{D} = \sin \beta \text{ – stosunku szerokości zwierciadła cieczy } (B) \text{ do średnicy } (D) \text{ kolektora,}$$

$$\cos \beta = 1 - 2 \frac{h}{D}$$

– wartości cosinusa połowy kąta środkowego (β) opartego na cięciwie (B), którą stanowi szerokość zwierciadła cieczy w poprzecznym przekroju kolektora.

Rys. 2. Schemat obliczeniowy opróżniania cylindrycznej komory zbiornika ułożonej poziomo na swej pobocznicy – przekrój poprzeczny komory
Fig. 2. Computational outline of emptying the cylindrical chamber of the container laid horizontally on its side surface – cross section of the chamber



W rozważanym przypadku komorę zbiornika stanowi poziomo ułożony na swej pobocznicy walec, dla którego występują identyczne zależności jak przedstawione wyżej w odniesieniu do kolektora o przekroju kołowym.

Wartość natężenia (Q_{0i}) wypływu cieczy odpowiadająca chwilowemu napełnieniu (h) tak ułożonej komory walcowej wynosi

$$Q_{0i} = \mu_0 f_0 \sqrt{2gh} \quad (1)$$

gdzie:

$\mu_0 f_0$ – odpowiednio współczynnik wydatku i powierzchnia przekroju otworu odpływowego (rys. 2).

Maksymalna wartość natężenia (Q_0) wypływu cieczy z komory występuje również przy największym jej napełnieniu $h = D$ i jest równa

$$Q_0 = \mu_0 f_0 \sqrt{2gD} \quad (2)$$

Związek pomiędzy chwilowym wypływem a jego wartością maksymalną jest następujący

$$Q_{0i} = \mu_0 f_0 \sqrt{2gh} = \mu_0 f_0 \sqrt{2gDh/D} = \mu_0 f_0 \sqrt{2gD} \sqrt{h/D}$$

czyli

$$Q_{0i} = Q_0 \sqrt{h/D} \quad (3)$$

W dowolnej chwili (t) i przy napełnieniu komory (h) w przedziale czasowym dt następuje obniżenie napełnienia o wartość dh . Zatem ubytek objętości ($dV = -F dh$) cieczy w komorze jest równy iloczynowi chwilowego natężenia wypływu (Q_{0i}) cieczy z komory i przedziału czasowego dt

$$Q_{0i} dt = -dV \quad (4)$$

gdzie $dV = LBdh$.

Równanie różniczkowe (4) po przyjęciu, że: $B = D \sin \beta$ przyjmuje następującą postać

$$dt = -\frac{DL}{\mu_0 f_0 \sqrt{2gD}} \frac{\sin \beta}{\sqrt{h/D}} dh \quad (5)$$

Uwzględniając ponadto, że

$$x = h/D, \quad \text{zaś} \quad dh = Ddx$$

oraz, że

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - (1 - 2x)^2} = 2\sqrt{x - x^2}$$

dla

$$\cos \beta = 1 - 2h/D = 1 - 2x \quad \text{przy} \quad 0 \leq \beta \leq \pi$$

równanie (5) po stosownych przekształceniach można przedstawić następująco

$$dt = -\frac{DL}{\mu_0 f_0 \sqrt{2gD}} \frac{\sin \beta}{\sqrt{x}} dh = -\frac{2D^2 L}{\mu_0 f_0 \sqrt{2gD}} \frac{\sqrt{x - x^2}}{\sqrt{x}} dx$$

Ostatecznie równanie różniczkowe (5) uzyskało kolejną postać

$$dt = -\frac{2D^2 L}{\mu_0 f_0 \sqrt{2gD}} \sqrt{1 - x} dx \quad (6)$$

Przyjmując z kolei w równaniu różniczkowym (6) podstawienie: $z = \sqrt{1 - x}$, z którego wynika, że: $x = 1 - z^2$ oraz $dx = -2zdz$, można równanie to przedstawić następująco

$$dt = -\frac{4D^2 L}{\mu_0 f_0 \sqrt{2gD}} z^2 dz \quad (7)$$

Czas (T) całkowitego opróżnienia komory przy jej początkowym napełnieniu $h = D$ wyniesie

$$T = \frac{4D^2 L}{\mu_0 f_0 \sqrt{2gD}} \int_0^1 z^2 dz = \frac{4}{3} \frac{D^2 L}{\mu_0 f_0 \sqrt{2gD}} z^3 \Big|_0^1 \quad (8)$$

i równoważnie

$$T = \frac{4}{3} \frac{D^2 L}{\mu_0 f_0 \sqrt{2gD}} (1 - h/D)^{3/2} \Big|_D^0 \quad (9)$$

czyli

$$T = \frac{4}{3} \frac{D^2 L}{\mu_0 f_0 \sqrt{2gD}} \quad (10)$$

Uwzględniając, że pojemność całkowita (V_w) komory, która odpowiada objętości początkowej przy napełnieniu $h = D$ jest równa

$$V_w = \frac{\pi D^2}{4} L \quad (11)$$

zatem czas (T) całkowitego opróżnienia komory może być również wyrażony następującym równaniem

$$T = \frac{16}{6\pi} \frac{2\pi D^2 L / 4}{\mu_0 f_0 \sqrt{2gD}} = \frac{8}{3\pi} \frac{2V_w}{Q_0} \quad (12)$$

Czas (t) opróżnienia komory zbiornika od $h = D$ do dowolnej wartości $h = h$ wyznaczony zostanie z równania (7)

$$t = \frac{4D^2 L}{\mu_0 f_0 \sqrt{2gD}} \int_0^1 z^2 dz = \frac{4}{3} \frac{D^2 L}{\mu_0 f_0 \sqrt{2gD}} z^3 \Big|_0^z \quad (13)$$

z którego otrzymujemy

$$t = \frac{4}{3} \frac{D^2 L}{\mu_0 f_0 \sqrt{2gD}} (1 - h/D)^{3/2} \Big|_D^h \quad (14)$$

Ostatecznie uzyskujemy następujący wzór

$$t = \frac{4}{3} \frac{D^2 L}{\mu_0 f_0 \sqrt{2gD}} (1 - h/D)^{3/2} = T (1 - h/D)^{3/2} \quad (15)$$

Funkcję zmiany napełnienia (h) komory w czasie (t) w postaci bezwymiarowej na podstawie wzoru (12) można zapisać następująco

$$t/T = (1 - h/D)^{3/2}$$

czyli:

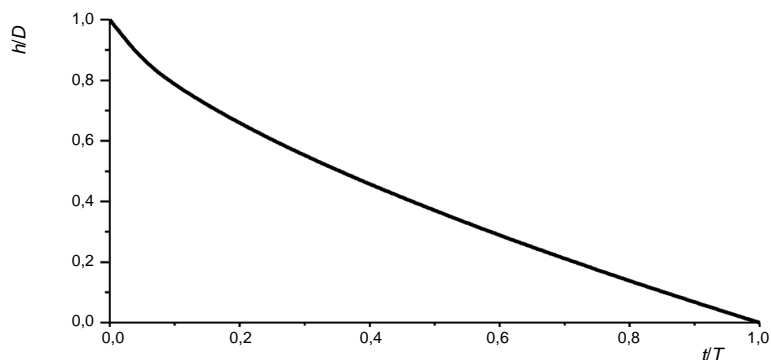
$$h/D = 1 - (t/T)^{2/3} \quad (16)$$

Z kolei bezwymiarową funkcję zmiany natężenia wypływu (Q_{0i}) w czasie (t) opróżniania komory na podstawie wzoru (16), po uwzględnieniu, że: $h/D = (Q_{0i}/Q_0)^2$, można wyrazić następująco

$$(Q_{0i}/Q_0)^2 = 1 - (t/T)^{2/3}$$

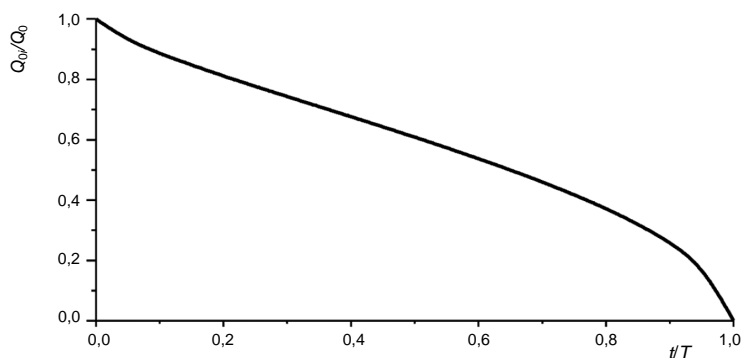
a ostatecznie

$$Q_{0i}/Q_0 = \sqrt{1 - (t/T)^{2/3}} \quad (17)$$



Rys. 3. Wykres bezwymiarowej zmiany napełnienia (h/D) w zbiorniku o kształcie walca leżącego na swej pobocznicy w zależności od bezwymiarowej wartości czasu (t/T) w procesie jego opróżniania

Fig. 3. Diagram of non-dimensional change of filling (h/D) in a cylinder-shaped reservoir lying on its back side in relation to non-dimensional time (t/T) during its emptying



Rys. 4. Wykres bezwymiarowej funkcji zmiany natężenia wypływu (Q_{0i}/Q_0) z komory zbiornika o kształcie walca leżącego na swej pobocznicy w zależności od bezwymiarowego czasu (t/T) w procesie jego opróżniania

Fig. 4. Diagram of non-dimensional change of discharge from a chamber (Q_{0i}/Q_0) in a cylinder-shaped reservoir lying on its back side in relation to non-dimensional time (t/T) during its emptying

3. Kulista komora zbiornika

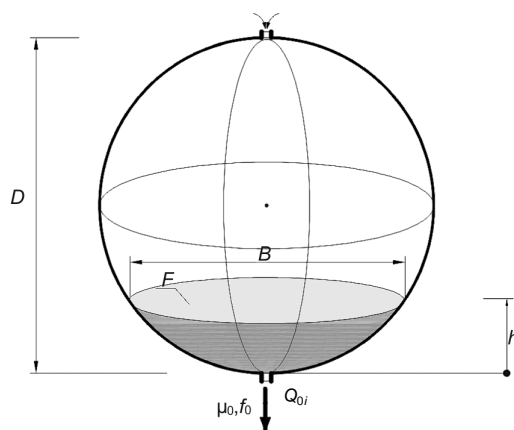
W przekroju pionowym kuli przechodzącym przez jej środek związek między głębokością (h) jej napełnienia, średnicą (D) oraz kątem środkowym opartym ramionami na cięciwie (B), którą stanowi swobodne zwierciadło cieczy (rys. 5), są identyczne z zależnościami, jakie zostały opisane dla kolektora o przekroju kołowym [1].

Należą do nich (rys. 6):

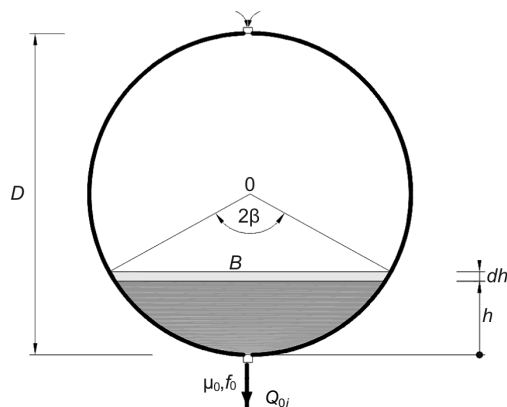
$$K_h = \frac{h}{D} = 0,5(1 - \cos \beta) - \text{stosunek napełnienia } (h) \text{ kuli do jej średnicy } (D),$$

$K_B = \frac{B}{D} = \sin \beta$ – stosunek szerokości zwierciadła cieczy (B) do średnicy kuli (D),

$\cos \beta = 1 - 2 \frac{h}{D}$ – wartość cosinusa połowy kąta środkowego opartego na cięciwie (B), którą stanowi szerokość zwierciadła cieczy występująca w przekroju pionowym kuli przechodzącym przez jej środek.



Rys. 5. Komora zbiornika w kształcie kuli w trakcie procesu jej opróżniania
Fig. 5. The chamber of the container in the shape is hunching in the process of the process for her of emptying



Rys. 6. Schemat obliczeniowy opróżniania kulistej komory zbiornika – przekrój pionowy przez środek kuli
Fig. 6. Computational outline of emptying the spherical chamber of the container – a vertical section through agent is hunching

Natężenie wypływu cieczy (Q_{0i}) z komory o kształcie kuli w dowolnym czasie (t), któremu odpowiada chwilowy stan napełnienia (h), jest opisany wzorem

$$Q_{0i} = \mu_0 f_0 \sqrt{2gh} \quad (18)$$

gdzie:

$\mu_0 f_0$ – jak poprzednio dla walca leżącego na swej poboczniczy.

Maksymalna wartość natężenia wypływu cieczy (Q_0) z komory zbiornika występuje w początkowej chwili procesu jej opróżniania, gdy napełnienie komory jest największe ($h = D$) i wynosi

$$Q_0 = \mu_0 f_0 \sqrt{2gD} \quad (19)$$

W dowolnej chwili (t) i przy napełnieniu komory (h) w przedziale czasowym dt następuje obniżenie napełnienia o wartość dh . Zatem ubytek objętości ($dV = -F dh$) cieczy w komorze jest równy iloczynowi chwilowego natężenia wypływu (Q_{0i}) cieczy z komory i przedziału czasowego dt

$$Q_{0i} dt = -dV \quad (20)$$

gdzie:

$$dV = \frac{\pi B^2}{4} dh = \frac{\pi D^2}{4} \sin^2 \beta dh.$$

Przyjmując, że $x = h/D$ to $dh = D dx$, natomiast $\cos \beta = 1 - 2h/D = 1 - 2x$ i wówczas $\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - (1 - 2x)^2 = 4(x - x^2)$ dla $0 \leq \beta \leq \pi$.

Ubytek objętości cieczy (dV) w komorze zbiornika w czasie (dt) można teraz przedstawić wzorem

$$dV = \frac{\pi D^2}{4} \sin^2 \beta dh = \pi D^3 (x - x^2) dx$$

natomiast chwilowe natężenie wypływu z komory zbiornika można wyrazić następującą zależnością

$$Q_{0i} = Q_0 \sqrt{h/D} = Q_0 \sqrt{x}$$

Równanie różniczkowe (20) po uwzględnieniu powyższych zależności przyjmie postać

$$dt = - \frac{\pi D^3}{\mu_0 f_0 \sqrt{2gD}} (x^{1/2} - x^{3/2}) dx \quad (21)$$

Czas (T) opróżnienia całkowicie napełnionej kulistej komory zbiornika od głębokości $h = D$ do $h = 0$ wyznaczony zostanie z równania (21)

$$T = - \frac{\pi D^3}{\mu_0 f_0 \sqrt{2gD}} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{2}{5} x^{5/2} \right) \Big|_1^0 = \frac{\pi D^3}{\mu_0 f_0 \sqrt{2gD}} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{2}{5} x^{5/2} \right) \Big|_0^1$$

Po uwzględnieniu granic całkowania czas (T) wynosi

$$T = \frac{\pi D^3}{\mu_0 f_0 \sqrt{2gD}} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right) = \frac{4}{15} \frac{\pi D^3}{\mu_0 f_0 \sqrt{2gD}} \quad (22)$$

lub inaczej

$$T = \frac{8}{5} \frac{\pi D^3 / 6}{\mu_0 f_0 \sqrt{2gD}} \quad (23)$$

Ponieważ początkowe napełnienie kulistej komory zbiornika wynosi

$$V_K = \frac{\pi D^3}{6} \quad (24)$$

a początkowe (maksymalne) natężenie wypływu

$$Q_0 = \mu_0 f_0 \sqrt{2gD} \quad (\text{wzór (19)})$$

to czas (T) może być obliczany od objętości kulistej komory zbiornika (V_K) oraz maksymalnej wartości natężenia wypływu cieczy (Q_0)

$$T = \frac{8}{5} \frac{V_K}{Q_0} = \frac{4}{5} \frac{2V_K}{Q_0} \quad (25)$$

Czas (t) częściowego opróżnienia kulistej komory zbiornika od napełnienia początkowego $h = D$ do dowolnego napełnienia $0 < h < D$ wyznaczony zostanie także z równania (21)

$$t = - \frac{\pi D^3}{\mu_0 f_0 \sqrt{2gD}} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{2}{5} x^{5/2} \right) \Big|_1^{h/D} = \frac{\pi D^3}{\mu_0 f_0 \sqrt{2gD}} \left(\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{2}{5} x^{5/2} \right) \Big|_{h/D}^1$$

Po uwzględnieniu granic całkowania otrzymano

$$\begin{aligned} t &= \frac{\pi D^3}{\mu_0 f_0 \sqrt{2gD}} \left\{ \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right) - \left[\frac{2}{3} (h/D)^{3/2} - \frac{2}{5} (h/D)^{5/2} \right] \right\} = \\ &= \frac{4}{15} \frac{\pi D^3}{\mu_0 f_0 \sqrt{2gD}} \left[1 + \frac{3}{2} (h/D)^{5/2} - \frac{5}{2} (h/D)^{3/2} \right] \end{aligned}$$

lub też równoważnie

$$t = \frac{8}{5} \frac{\pi D^3 / 6}{\mu_0 f_0 \sqrt{2gD}} \left[1 + \frac{3}{2} (h/D)^{5/2} - \frac{5}{2} (h/D)^{3/2} \right] \quad (26)$$

Po uwzględnieniu we wzorze (26) formuł na objętość kulistej komory zbiornika (V_K) oraz maksymalną wartość natężenia wypływu cieczy (Q_0) z tej komory, otrzymujemy

$$t = \frac{8}{5} \frac{V_K}{Q_0} \left[1 + \frac{3}{2} (h/D)^{5/2} - \frac{5}{2} (h/D)^{3/2} \right] \quad (27)$$

lub równoważnie

$$t = T \left[1 + \frac{3}{2} (h/D)^{5/2} - \frac{5}{2} (h/D)^{3/2} \right] \quad (28)$$

Funkcję zmiany napełnienia (h) komory w czasie (t) w postaci bezwymiarowej na podstawie wzoru (28) można zapisać następująco

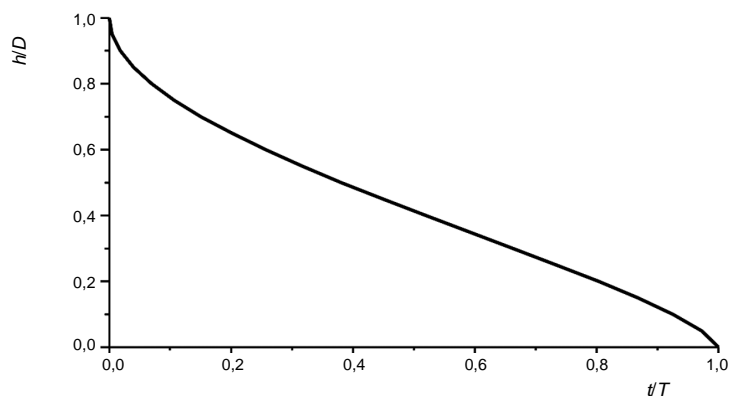
$$t/T = 1 + \frac{3}{2} (h/D)^{5/2} - \frac{5}{2} (h/D)^{3/2} \quad (29)$$

Z kolei bezwymiarową funkcję zmiany natężenia wypływu (Q_{0i}/Q_0) w czasie (t/T) opróżniania komory na podstawie wzoru (25) oraz po uwzględnieniu, że

$$h/D = (Q_{0i}/Q_0)^2$$

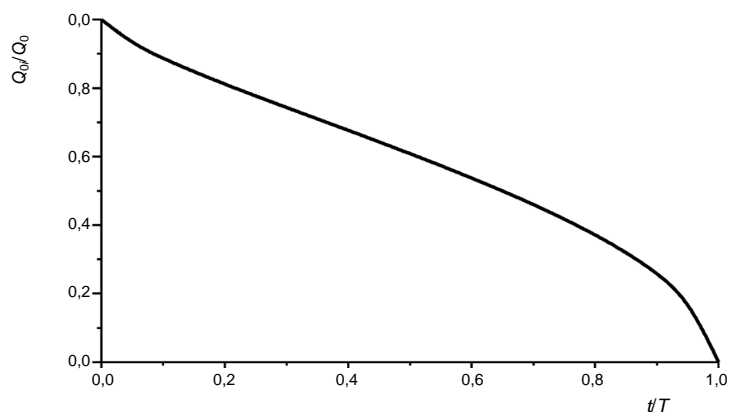
można wyrazić następująco

$$t/T = 1 + 3/2(Q_{0i}/Q_0)^5 - 5/2(Q_{0i}/Q_0)^3 \quad (30)$$



Rys. 7. Wykres bezwymiarowej funkcji zmiany napelnienia (h/D) w kulistej komorze w zależności od wartości bezwymiarowego czasu (t/T) w procesie jej opróżniania

Fig. 7. Diagram of non-dimensional change of filling (h/D) in a sphere-shaped reservoir in relation to non-dimensional time (t/T) during its emptying



Rys. 8. Wykres bezwymiarowej funkcji zmiany natężenia wypływu z kulistej komory (Q_{0i}/Q_0) zbiornika w zależności od bezwymiarowego czasu (t/T) w procesie jej opróżniania

Fig. 8. Diagram of non-dimensional change of discharge from a chamber (Q_{0i}/Q_0) in a sphere-shaped reservoir in relation to non-dimensional time (t/T) during its emptying

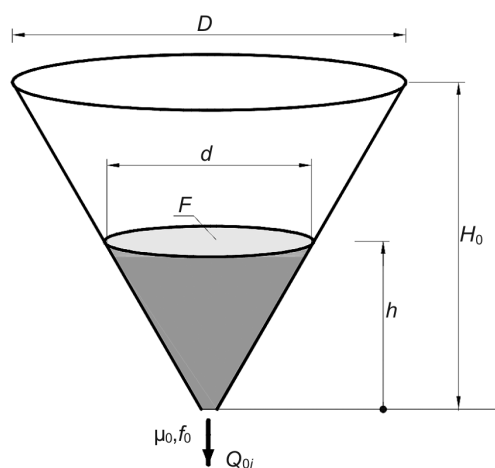
4. Komora zbiornika w kształcie stożka zwróconego wierzchołkiem w dół

Natężenie wypływu cieczy (Q_{0i}) z komory o kształcie stożka zwróconego wierzchołkiem w dół w dowolnym czasie (t), której odpowiada chwilowy stan jej napełnienia (h) jest opisany wzorem

$$Q_{0i} = \mu_0 f_0 \sqrt{2gh} \quad (31)$$

gdzie:

$\mu_0 f_0$ – odpowiednio współczynnik wydatku i powierzchnia przekroju otworu odpływowego.



Rys. 9. Komora zbiornika w kształcie stożka zwróconego wierzchołkiem w dół w trakcie procesu jej opróżniania

Fig. 9. The chamber of the container as the returned cone with top into the hole in the route of the process for her of emptying

Maksymalna wartość natężenia wypływu cieczy (Q_0) z komory zbiornika występuje w początkowej chwili procesu jej opróżniania, gdy napełnienie komory jest największe ($h = H_0$) i wynosi

$$Q_0 = \mu_0 f_0 \sqrt{2gH_0} \quad (32)$$

Można i dla komory stożkowej podać związek, który występuje pomiędzy wypływem chwilowym a początkowym (maksymalnym)

$$Q_{0i} = Q_0 \sqrt{h/H_0} \quad (33)$$

z którego z kolei wynika następująca zależność

$$h/H_0 = (Q_{0i}/Q_0)^2 \quad (33a)$$

Całkowita objętość komory stożkowej wynosi

$$V_S = \frac{1}{3} \frac{\pi D^2}{4} H_0 \quad (34)$$

natomiast średnica koła (d) stanowiącego powierzchnię swobodnego zwierciadła cieczy w komorze stożkowej przy jej napełnieniu równym (h) jest równa

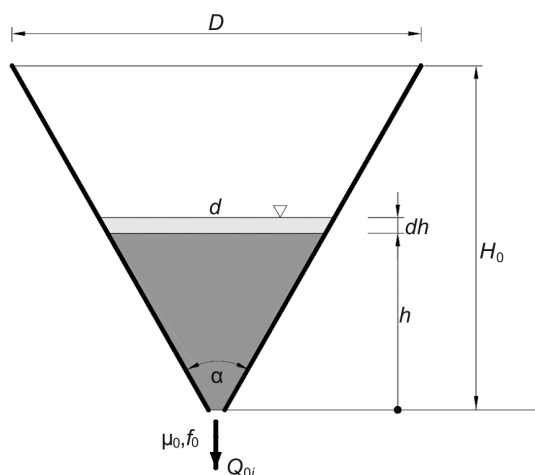
$$d = \frac{D}{H_0} h \quad (35)$$

Równanie różniczkowe opisujące proces opróżniania komory ma postać

$$Q dt = -dV \quad (36)$$

której ubytek objętości (dV) cieczy w komorze w chwili (dt) wyrażony jest wzorem

$$dV = \frac{\pi d^2}{4} dh = \frac{\pi D^2}{4H_0^2} h^2 dh$$



Rys. 10. Schemat obliczeniowy opróżniania komory zbiornika w kształcie stożka zwróconego wierzchołkiem w dół – przekrój pionowy przez oś bryły

Fig. 10. Computational outline of emptying the chamber of the container about the shape of the cone returned with top into the bottom – vertical section through the axis of the lump

Zatem

$$\mu_0 f_0 \sqrt{2gh} dt = -\frac{\pi D^2}{4H_0^2} h^2 dh \quad (37)$$

lub równoważnie po przekształceniu

$$dt = -\frac{\pi D^2}{4H_0^2 \mu_0 f_0 \sqrt{2g}} \frac{h^2}{\sqrt{h}} dh = -\frac{\pi D^2}{4H_0^2 \mu_0 f_0 \sqrt{2g}} h^{3/2} dh \quad (38)$$

Czas (T) opróżnienia całkowicie napełnionej stożkowej komory zbiornika od głębokości $h = H_0$ do $h = 0$ wyznaczony zostanie z równania (38):

$$T = -\frac{\pi D^2}{4H_0^2 \mu_0 f_0 \sqrt{2g}} \frac{2}{5} h^{5/2} \Big|_H^0 = \frac{\pi D^2}{4H_0^2 \mu_0 f_0 \sqrt{2g}} \frac{2}{5} h^{5/2} \Big|_0^H$$

Po uwzględnieniu granic całkowania otrzymano wzór

$$T = \frac{\pi D^2}{4H_0^2 \mu_0 f_0 \sqrt{2g}} \frac{2}{5} H_0^{5/2} = \frac{1}{3} \frac{\pi D^2}{4} \frac{H_0^{1/2}}{\mu_0 f_0 \sqrt{2g}} \frac{2}{5} \quad (39)$$

a po odpowiednich przekształceniach

$$T = \frac{1}{3} \frac{\pi D^2}{4} \frac{H_0^{1/2}}{\mu_0 f_0 \sqrt{2g}} \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \left(\frac{1}{3} \frac{\pi D^2}{4} H_0 \right) \left(\frac{1}{\mu_0 f_0 \sqrt{2g H_0}} \right) \quad (40)$$

Po uwzględnieniu (33) i (34) we wzorze (40) otrzymano kolejną jego postać

$$T = \frac{1}{5} \frac{2V_S}{Q_0} \quad (41)$$

Czas (t) częściowego opróżnienia kulistej komory zbiornika od napełnienia początkowego $h = H_0$ do dowolnego napełnienia $0 < h < H_0$ wyznaczony zostanie także z równania (38)

$$t = - \frac{\pi D^2}{4H_0^2 \mu_0 f_0 \sqrt{2g}} \frac{2}{5} h^{5/2} \Big|_H^h = \frac{\pi D^2}{4H_0^2 \mu_0 f_0 \sqrt{2g}} \frac{2}{5} h^{5/2} \Big|_h^H$$

Po uwzględnieniu granic całkowania otrzymano

$$t = \frac{\pi D^2}{4H_0^2 \mu_0 f_0 \sqrt{2g}} \frac{2}{5} (H_0^{5/2} - h^{5/2}) = \frac{\pi D^2}{4H_0^2 \mu_0 f_0 \sqrt{2g}} \frac{2}{5} H_0^{5/2} \left[1 - (h/H_0)^{5/2} \right]$$

i dalej po przekształceniach

$$t = \frac{2}{5} \left(\frac{\pi D^2}{4} H_0 \right) \left(\frac{1}{\mu_0 f_0 \sqrt{2g H_0}} \right) \left[1 - (h/H_0)^{5/2} \right] \quad (42)$$

czyli

$$\boxed{t = T \left[1 - (h/H_0)^{5/2} \right]} \quad (43)$$

Bezwymiarową funkcję zmiany napełnienia (h) komory w czasie (t) na podstawie wzoru (43) można przedstawić następująco

$$\boxed{h/H_0 = (1 - t/T)^{2/5}} \quad (44)$$

Z kolei bezwymiarową funkcję zmiany natężenia wypływu (Q_{0i}/Q_0) z komory w zależności od czasu jej opróżniania (t/T) na podstawie wzoru (44) oraz po uwzględnieniu, że

$$h/H_0 = (Q_{0i}/Q_0)^2 \quad (\text{wzór (33a)})$$

można wyrazić następująco

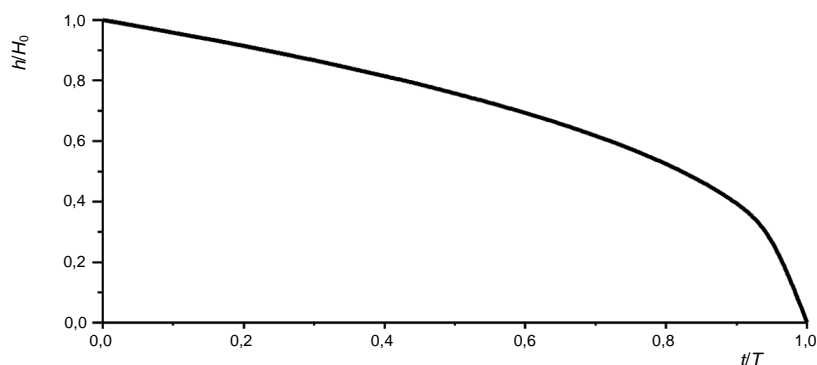
$$\boxed{Q_{0i}/Q_0 = (1 - t/T)^{1/5}} \quad (45)$$

Natomiast bezwymiarową funkcję zmiany objętości napełnienia komory (V_i/V_S) od czasu trwania (t/T) procesu jej opróżniania, na podstawie wzorów (34), (35), (33a) oraz (44), można zapisać następująco

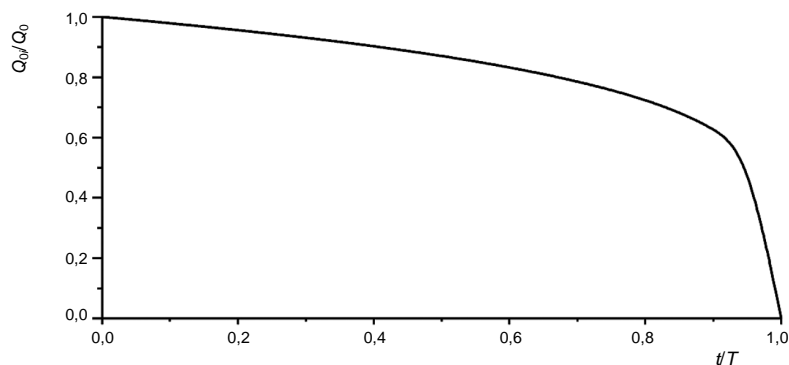
$$V_i / V_S = (h / H_0)^3 = (Q_{0i} / Q_0)^6$$

co oznacza, że

$$V_i / V_S = \left[(1 - t / T)^{2/5} \right]^3 = (1 - t / T)^{6/5} \quad (46)$$



Rys. 11. Wykres bezwymiarowej funkcji zmiany napętnienia (h/D) w zbiorniku w kształcie stożka zwróconego wierzchołkiem w dół w zależności od wartości bezwymiarowego czasu (t/T) w procesie jego opróżniania
 Fig. 11. Diagram of non-dimensional change of filling (h/D) in a reservoir shaped as an upturned cone in relation to non-dimensional time (t/T) during its emptying



Rys. 12. Wykres bezwymiarowej zmiany natężenia wypływu (Q_{0i}/Q_0) z komory w kształcie stożka zwróconego wierzchołkiem w dół w zależności od wartości bezwymiarowego czasu (t/T) w procesie jego opróżniania
 Fig. 12. Diagram of non-dimensional change of discharge from a chamber (Q_{0i}/Q_0) in a reservoir shaped as an upturned cone in relation to non-dimensional time (t/T) during its emptying

5. Uwagi i wnioski końcowe

Przedstawione matematyczne opisy przebiegu procesów opróżniania jednokomorowych zbiorników o kształtach brył obrotowych są uzupełnieniem wiedzy z zakresu problematyki nieustalonych przepływów opisywanych w literaturze fachowej. Możliwe było w dokonanych rozwiązaniach równań różniczkowych przedstawienie wyników uogólnionych w postaci bezwymiarowych parametrów. W materiałach literaturowych [2] analogicznymi uogólnieniami objęte zostały również procesy opróżniania jednokomorowych prostopadłościennych zbiorników oraz procesy wyrównywania poziomów cieczy w dwóch prostopadłościennych komorach zbiornika. Równania różniczkowe opisujące opróżnianie, względnie napełnianie komór zbiornika o kształcie bryły obrotowej z równocześnie występującym do nich dopływem cieczy (również stałym), mogą być rozwiązane na drodze obliczeń numerycznych. Dla jednokomorowych zbiorników o kształtach wybranych tu brył obrotowych praktyczny przypadek z równoczesnym dopływem cieczy do zbiornika, wyłączając rozwiązania kanalizacyjnych zbiorników rurowych, jest mało prawdopodobny.

Literatura

- [1] Kisiel A., *Wymiarowanie konstrukcji prostokątnych i trapezowych wypadów budowli wodnych oraz obliczanie parametrów odskoku hydraulicznego w kolektorach kołowych*, cz. VI, *Kolektory o przekroju kołowym*, Wyd. Politechniki Krakowskiej, Kraków 1995.
- [2] Kisiel J., *Wybrane zagadnienia nieustalonego wypływu cieczy z szeregowo połączonych komór zbiornika*, Monografia przygotowana do druku.