

JAKUB KISIEL, ADAM KISIEL\*

OPRÓŻNIANIE DWÓCH SZEREGOWO POŁĄCZONYCH  
KOMÓR ZBIORNIKA RETENCYJNEGO CIECZYEMPTYING OF TWO CONNECTED IN SERIES  
CHAMBERS OF A LIQUID CONTAINER

## Streszczenie

W niniejszym artykule przedstawiono problematykę związaną z grawitacyjnym opróżnianiem dwukomorowego zbiornika, którego komory połączone są szeregowo pod względem hydraulicznym. Przedstawiono dwa sposoby matematycznego opisu procesu jednoczesnego grawitacyjnego opróżniania obu jego komór. Rozwiązanie numeryczne równań różniczkowych jest tu rozwiązaniem podstawowym, weryfikującym wyniki uzyskane na podstawie uproszczonej metody obliczeń, jaka zaprezentowana została w niniejszym artykule.

*Słowa kluczowe: zbiorniki kanalizacyjne, procesy opróżniania komór zbiorników*

## Abstract

The article is showing issues associated with gravitational emptying the bicameral container of which chambers are connected in series under the plumbing account. In the solution two ways of the mathematical description of the process of simultaneous gravitational emptying were presented both of his chambers. Numerical solving the mathematical description of this process in the form of differential equations is a basic answer verifying results achieved on the basis of the simplified method of calculations which was presented in the present article here.

*Keywords: storage tanks, processes of emptying chambers of the container*

\* Dr inż. Jakub Kisiel, prof. dr hab. inż. Adam Kisiel, Instytut Inżynierii Środowiska, Wydział Inżynierii i Ochrony Środowiska, Politechnika Częstochowska.

## 1. Wstęp

W innowacyjnych rozwiązaniach kanalizacyjnych zbiorników retencyjnych proces ich grawitacyjnego opróżniania najczęściej związany jest z problematyką nieustalonego wypływu z dwóch szeregowo połączonych komór zbiornika. Odnosi się to nie tylko do dwukomorowych rozwiązań zbiorników o grawitacyjnym działaniu, jak np. zbiorniki typu Contrack czy Licet, ale także do zbiorników trzykomorowych o działaniu grawitacyjno-podciśnieniowym, w których grawitacyjny proces opróżniania komór retencyjnej i przepływowej następuje zawsze po opróżnieniu komory podciśnieniowej. Do takich rozwiązań zaliczyć należy zbiorniki typu: Mirus, Conses oraz Parkus.

Szeregowe połączenie komór oraz problematyka ich opróżniania może również dotyczyć zbiorników magazynujących np. płynne paliwa.

## 2. Hydrauliczne podstawy opisu procesu opróżniania z cieczy dwóch komór zbiornika

O równoległym lub szeregowym układzie hydraulicznym dwóch komór (względnie większej liczbie komór) zbiornika decydować będzie sposób ich połączenia, który powoduje, że:

- opróżnianie komór zbiornika w układzie szeregowym wymusza przepływ strumienia z komory poprzedniej przez komorę następną w kierunku odpływu,
- strumienie z opróżnianych komór zbiornika w układzie równoległym łączą się w węźle, z którego odprowadzany jest zsumowany odpływ.

W szeregowo połączonych dwóch komorach zbiornika przepływ tranzytowy  $Q_{1i}$  z komory poprzedniej (1) do komory następczej (0), która w tym wypadku jest również komorą wylotową, wynosi

$$Q_{1i} = \mu_1 f_1 \sqrt{2g(y-x)} \quad (1)$$

gdzie  $\mu_1$  to współczynnik wydatku wyznaczony z równania Bernoullego; np. przy połączeniu króćcem rurowym obu komór zbiornika jest on równy współczynnikowi prędkości  $\varphi_1$  (wówczas współczynnik kontrakcji  $\varepsilon = 1$ ), którego wartość wyznaczana jest z zależności

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{1}{1 + \sum \zeta_1}}$$

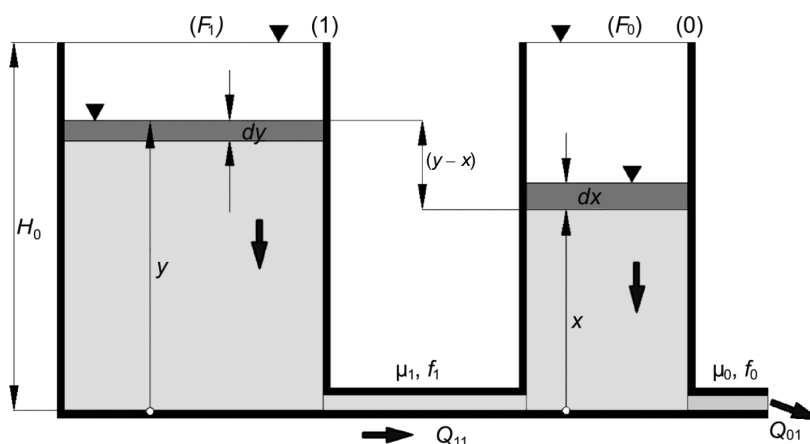
w której:

- $\sum \zeta_1$  – suma wartości wszystkich współczynników strat lokalnych i na długości przewodu (króćca) łączącego komory zbiornika,
- $f_1$  – pole powierzchni przekroju porzecznego przewodu (króćca) łączącego komory zbiornika.

Odpływ z wylotowej komory (0) zbiornika  $Q_{0i}$  w przyjętym schemacie obliczeniowym jest wypływem swobodnym w atmosferę i wynosi

$$Q_{0i} = \mu_0 f_0 \sqrt{2gx} \quad (2)$$

gdzie  $\mu_0, f_0$  to, odpowiednio: współczynnik wydatku i powierzchnia przekroju przewodu (otworu) wylotowego.



Rys. 1. Schemat obliczeniowy opróżniania dwóch szeregowo połączonych komór zbiornika  
Fig. 1. Computational outline of emptying two chambers in series connected of the container

Odptyw  $Q_{0i}$  jest sumą odptywów z obu komór zbiornika, co można zapisać w następujący sposób

$$Q_{0i} dt = - (F_1 dy + F_0 dx) \quad (3)$$

gdzie:

$F_1$  – pole powierzchni poziomego przekroju prostopadłościowej komory (1),  
 $F_0$  – pole powierzchni poziomego przekroju prostopadłościowej komory (0).

Ponieważ

$$Q_{1i} dt = -F_1 dy \quad (4)$$

to równanie ma postać

$$(Q_{0i} - Q_{1i}) dt = -F_0 dx \quad (5)$$

Jeżeli przyjmiemy następujące oznaczenia:

$Q_{Zi} = -F_0 \frac{dx}{dt}$  – jako odptyw opróżniający komorę wylotową (0) w chwili  $dt$ ,

$Q_{1i} = -F_1 \frac{dy}{dt}$  – jako przepływ z komory (1) do komory wylotowej (0) w chwili  $dt$ ,

to równanie (3) wyrazi bilans przepływów

$$Q_{0i} = Q_{Zi} + Q_{1i} \quad (6)$$

W praktyce najczęściej opróżniany jest zbiornik przy obu komorach całkowicie wypełnionych do tego samego poziomu zwierciadeł cieczy. Opróżnianie komór takiego zbiornika charakteryzować będą dwa etapy:

- w **pierwszym etapie** następować będzie szybkie obniżanie się zwierciadła cieczy w komorze wylotowej (0), zaś powolne w komorze poprzedniej (1). W etapie tym różnica poziomów zwierciadeł cieczy w obu komorach jest wielkością rosnącą od zera do określonej maksymalnej wartości  $\Delta H_{0p}$ ,
- w **etapie drugim** obniżanie się zwierciadeł cieczy w komorach charakteryzuje się tym, że różnica ich położeń jest wielkością malejącą, począwszy od  $\Delta H_{0p}$  do zera. W dowolnej chwili różnica poziomów zwierciadeł cieczy w zbiornikach jest pochodną oporów ruchu, jakie towarzyszą przepływowi tranzytowemu  $Q_{li}$

$$y - x = \frac{Q_{li}^2}{2g \mu_1^2 f_1^2} \quad (7)$$

z czego wynika, że

$$dy = dx + \frac{Q_{li}}{g \mu_1^2 f_1^2} dQ_{li} \quad (8)$$

Na podstawie powyższych sformułowań dotyczących obu etapów opróżniania komór zbiornika stwierdza się, że:

- w etapie pierwszym różnica zwierciadeł cieczy w obu komorach jest funkcją rosnącą w czasie

$$\frac{d(y-x)}{dt} > 0 \quad (9)$$

- w etapie drugim natomiast jest funkcją malejącą

$$\frac{d(y-x)}{dt} < 0 \quad (10)$$

- w chwili zmiany etapów opróżniania komór zbiornika różnica poziomów zwierciadeł cieczy osiąga maksimum, czego konsekwencją jest

$$\frac{d(y-x)}{dt} = 0 \quad (11)$$

Wynika z tego, że w czasie  $t = t_1$ , w którym następuje zmiana przyrostu funkcji opisującej różnicę zwierciadeł cieczy w obu komorach, wartości  $dx = dy$  są równe, w konsekwencji czego równanie (3) można teraz zapisać następująco

$$-(F_0 + F_1) dx = Q_{0i} dt \quad (12)$$

Ponieważ

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{Q_{0i}}{F_0 + F_1} \quad \text{oraz} \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{Q_{li}}{F_1} \quad (13)$$

to można przedstawić następujący związek

$$Q_{li} = \frac{F_1}{F_0 + F_1} Q_{0i} \quad (14)$$

lub inaczej

$$\mu_1 f_1 \sqrt{2g(y-x)} = \frac{F_1}{F_1 + F_0} \mu_0 f_0 \sqrt{2gx} \quad (15)$$

a także

$$\frac{y-x}{x} = \left[ \frac{F_1}{F_1 + F_0} \frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} \right]^2 = \text{const} \quad (16)$$

czyli

$$y = \left[ \left( \frac{F_1}{F_1 + F_2} \frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} \right)^2 + 1 \right] x = ax \quad (17)$$

dla

$$a = \left( \frac{F_1}{F_1 + F_2} \frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} \right)^2 + 1$$

oraz związek

$$dy = \left[ \left( \frac{F_1}{F_1 + F_2} \frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} \right)^2 + 1 \right] dx \quad (18)$$

### 3. Matematyczny model opróżniania dwóch komór zbiornika

#### 3.1. Obliczenie położenia zwierciadeł cieczy w obu komorach zbiornika po upływie pierwszego kroku czasowego równego $\Delta t$

Podstawowe równanie różnicowe bilansu objętości w opróżnianych komorach (1) i (0) przy wypływie ( $Q_{01}$ ) cieczy ze zbiornika w czasie  $\Delta t$  ma następującą postać

$$Q_{01} \Delta t = \mu_0 f_0 \sqrt{2gH_0} \Delta t = |-F_0 \Delta x_1 - F_1 \Delta y_1| \quad (19)$$

Przepływ tranzytowy  $Q_{11}$  w czasie  $\Delta t$  obniży zwierciadło cieczy w komorze (1) o wartość  $\Delta y_1$

$$Q_{11} \Delta t = |-F_1 \Delta y_1| \quad (20)$$

Przy rozważaniu superpozycji tego procesu (rys. 2) w czasie  $\Delta t$  wypływ cieczy ze zbiornika ( $Q_{01}$ ) przy wstrzymanym tranzytowym dopływie ( $Q_{11}$ ) z komory (1) do komory (0) spowoduje obniżenie zwierciadła cieczy w komorze (0) o wartość  $\Delta x_{01}$ , które wyniesie

$$Q_{01} \Delta t = \mu_0 f_0 \sqrt{2gH_0} \Delta t = |-F_0 \Delta x_{01}| \quad (19a)$$

Równocześnie przy wstrzymanym w czasie  $\Delta t$  wypływie ( $Q_{01}$ ) ze zbiornika dopływ tranzytowy ( $Q_{11}$ ) spowoduje podwyższenie zwierciadła cieczy w komorze (0) o wartość  $\Delta x_{p1}$ , które wyznaczone zostanie wzorem

$$Q_{11} \Delta t = F_0 \Delta x_{p1} \quad (20a)$$

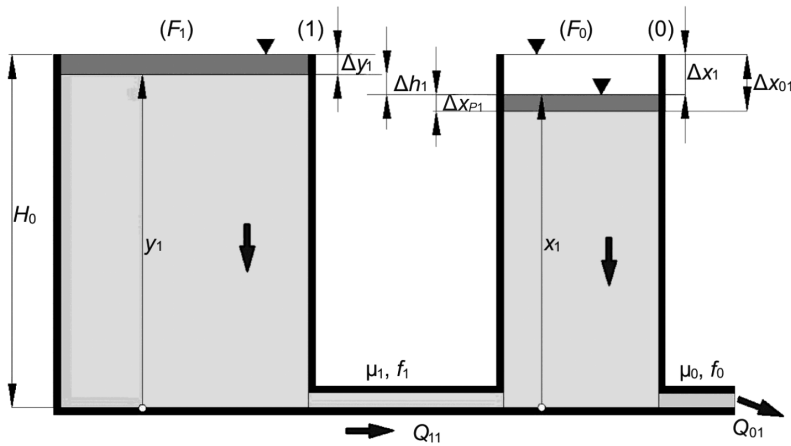
Ponadto występują następujące związki

$$(Q_{01} - Q_{11}) \Delta t = |-F_0 \Delta x_1| \quad (21)$$

oraz związek geometryczny (rys. 2)

$$\Delta x_1 = \Delta x_{01} - \Delta x_{p1} \quad (22)$$

wynikający również z równań (19) i (20) oraz (19a) i (20a).



Rys. 2. Schemat obniżenia się zwierciadeł cieczy w komorach zbiornika w czasie  $\Delta t$   
Fig. 2. Outline of lowering of mirrors of liquid in chambers of the container in the time  $\Delta t$

Uwzględniając, że rozpoczęcie procesu opróżniania komór zbiornika następuje przy ich napełnieniu równym  $H_0$ , możemy zapisać następujące równości

$$Q_{01} \Delta t = \mu_0 f_0 \sqrt{2gH_0} \quad \Delta t = |-\Delta x_{01} F_0| \quad (23)$$

$$Q_{11} \Delta t = \mu_1 f_1 \sqrt{2g\Delta x_1} \quad \Delta t = |-\Delta y_1 F_1| \quad (24)$$

Po uporządkowaniu mamy

$$|\Delta x_1| = \frac{\mu_1 f_1 \sqrt{2g}}{F_0} \left( \frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} \sqrt{H_0} - \sqrt{\Delta x_1} \right) \Delta t \quad (25)$$

a po oznaczeniu

$$A_0 = \frac{F_0}{\mu_1 f_1 \sqrt{2g} \Delta t} \quad \text{i} \quad B_0 = \frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} \quad (26)$$

Rozwiązaniem równania kwadratowego (25) względem  $\Delta x_1$  będzie

$$\Delta x_1 = \left\{ \frac{1}{2A_0} \left[ \sqrt{1 + 4A_0 B_0 \sqrt{H_0}} - 1 \right] \right\}^2 \quad (27)$$

**Pierwszy krok obliczeniowy umożliwi wyznaczenie następujących parametrów:**

– napełnienie komory wylotowej (0) po pierwszym kroku obliczeniowym

$$x_1 = H_0 - \Delta x_1$$

– napełnienie komory poprzedniej (1) po pierwszym kroku obliczeniowym

$$y_1 = H_0 - \Delta y_1$$

dla

$$|\Delta y_1| = \frac{\mu_1 f_1 \sqrt{2g \Delta x_1}}{F_1} \Delta t$$

– różnica poziomów napełnień w komorach zbiornika po pierwszym kroku obliczeniowym

$$\Delta h_1 = y_1 - x_1 = \Delta x_1 - \Delta y_1$$

– odpływ z komory wylotowej (0) zbiornika w czasie pierwszego kroku obliczeniowego

$$Q_{01} = \mu_0 f_0 \sqrt{2g H_0}$$

– przepływ między komorami zbiornika (1) i (0) w czasie pierwszego kroku obliczeniowego

$$Q_{11} = \mu_1 f_1 \sqrt{2g \Delta x_1}$$

### 3.2. Obniżenie zwierciadeł cieczy w komorach zbiornika po kolejnym, drugim kroku czasowym

W czasie kolejnego, drugiego kroku czasowego od  $\Delta t$  do  $2\Delta t$  równania różnicowe bilansu objętości mają następującą postać

$$Q_{02} \Delta t = \mu_0 f_0 \sqrt{2g (H_0 - \Delta x_1)} \Delta t = |-\Delta x_2 F_0 - \Delta y_2 F_1| = |-\Delta x_{02} F_0| \quad (28)$$

$$Q_{12} \Delta t = \mu_1 f_1 \sqrt{2g (\Delta x_1 - \Delta y_1)} \Delta t = |-\Delta y_2 F_1| = |-\Delta x_{p2} F_0| \quad (29)$$

Równania (28) i (29) umożliwiają również wyznaczenie położenia zwierciadeł cieczy w obu komorach zbiornika z wykorzystaniem – jak w pierwszym kroku obliczeniowym – metody superpozycji tego procesu.

Z równań (28) i (29), a także ze schematu obliczeniowego (rys. 3) wynika następująca zależność geometryczna

$$\Delta x_2 = \Delta x_{02} - \Delta x_{p2} \quad (30)$$

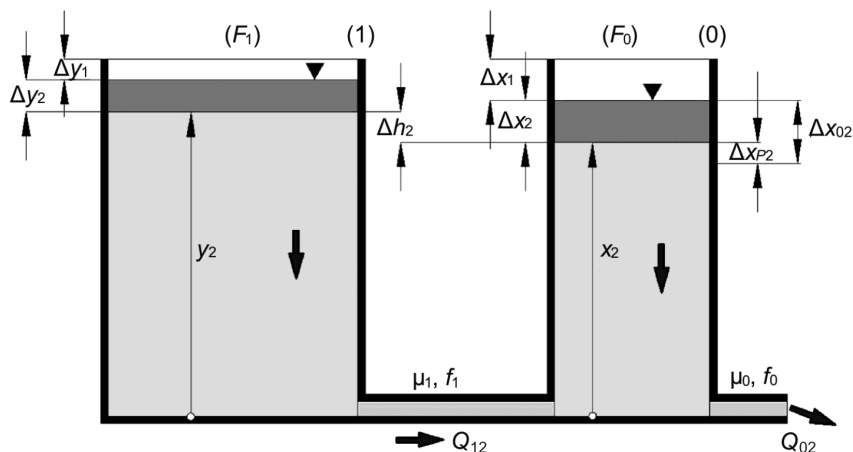
Wyznaczenie wartości

$$|\Delta x_2| = \frac{1}{A_0} \left( B_0 \sqrt{H_0 - \Delta x_1} - \sqrt{\Delta x_1 - \Delta y_1} \right) \quad (31)$$

oraz

$$|\Delta y_2| = \frac{\mu_1 f_1 \sqrt{2g(\Delta x_1 - \Delta y_1)}}{F_1} \Delta t \quad (32)$$

umożliwia obliczenie po upływie drugiego kroku czasowego zmianę parametrów hydrauliczno-geometrycznych zbiornika.



Rys. 3. Schemat obniżenia się zwierciadeł cieczy w komorach zbiornika po upływie czasu  $2\Delta t$   
Fig. 3. Outline of lowering of mirrors of liquid in chambers of the container after the end of time  $2\Delta t$

**Drugi krok obliczeniowy umożliwi zatem wyznaczenie następujących parametrów:**

– napełnienie komory wylotowej (0) po drugim kroku obliczeniowym

$$x_2 = H_0 - \Delta x_1 - \Delta x_2$$

– napełnienie komory poprzedniej (1) po drugim kroku obliczeniowym

$$y_2 = H_0 - \Delta y_1 - \Delta y_2$$

dla

$$|\Delta y_2| = \frac{\mu_1 f_1 \sqrt{2g \Delta h_1}}{F_1} \Delta t = \frac{\mu_1 f_1 \sqrt{2g(y_1 - x_1)}}{F_1} \Delta t$$

– różnica poziomów napełnień w komorach zbiornika po drugim kroku obliczeniowym

$$\Delta h_2 = y_2 - x_2 = (\Delta x_1 + \Delta x_2) - (\Delta y_1 + \Delta y_2)$$

– odpływ z komory wylotowej (0) zbiornika w drugim kroku obliczeniowym

$$Q_{02} = \mu_0 f_0 \sqrt{2g(H_0 - \Delta x_1)}$$



– przepływ między komorami zbiornika (1) i (0) w drugim kroku obliczeniowym

$$Q_{12} = \mu_1 f_1 \sqrt{2g(\Delta x_1 - \Delta y_1)}$$

**W kolejnych krokach obliczeniowych dla  $i = 2, 3, \dots, n$  obniżenia poziomów zwierciadeł cieczy w komorach zbiornika wyznaczone będą wzorami**

$$\Delta x_{i+1} = \frac{1}{A_0} \left( B_0 \sqrt{H_0 - \sum_{i=1}^n \Delta x_i} - \sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta x_i - \sum_{i=1}^n \Delta y_i} \right) \quad (33)$$

$$\Delta y_{i+1} = \frac{\mu_1 f_1 \sqrt{2g(y_i - x_i)}}{F_1} \Delta t \quad (34)$$

**Każdy kolejny krok obliczeniowy umożliwi wyznaczenie następujących parametrów:**

– napełnienie komory wylotowej (0) po  $n$ -tym kroku obliczeniowym

$$x_{n+1} = H_0 - \sum_{i=1}^n \Delta x_i$$

– napełnienie komory poprzedniej (1) po  $n$ -tym kroku obliczeniowym

$$y_{n+1} = H_0 - \sum_{i=1}^n \Delta y_i$$

– różnica poziomów napełnień w komorach zbiornika po  $n$ -tym kroku obliczeniowym

$$\Delta h_n = y_i - x_i = \sum_{i=1}^n \Delta x_i - \sum_{i=1}^n \Delta y_i$$

– odpływ z komory wylotowej (0) zbiornika w  $n$ -tym kroku obliczeniowym

$$Q_{0n} = \mu_0 f_0 \sqrt{2g(H_0 - \Delta x_{n+1})}$$

– przepływ między komorami zbiornika (1) i (0) w  $n$ -tym kroku obliczeniowym

$$Q_{1n} = \mu_1 f_1 \sqrt{2g \Delta h_n}$$

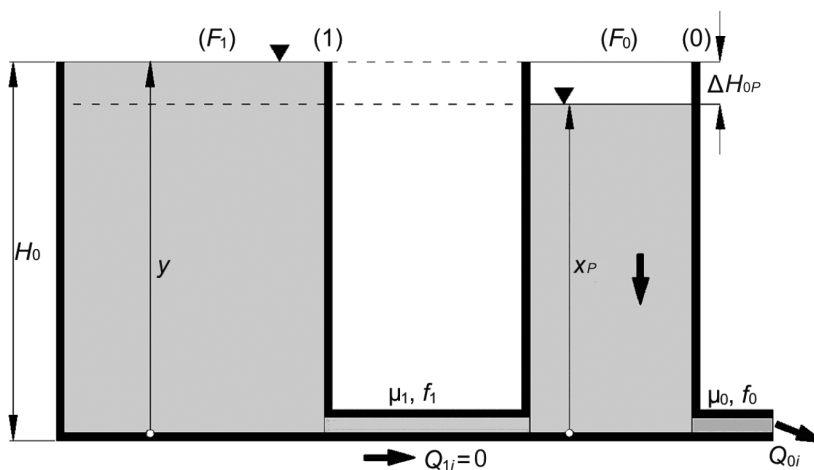
Początkowo obliczenia numeryczne powinny być prowadzone dla bardzo małych kroków czasowych  $\Delta t$  aż do chwili, gdy wartości  $\Delta h_i$  z rosnących zaczną maleć. Zmiana przyrostu różnicy poziomów zwierciadeł cieczy  $\Delta h_0$  w komorach zbiornika z rosnącą na malejącą wyznacza jej wartość maksymalną  $\Delta h(\max) = \Delta h_0$  przy napełnieniu komory (0) wynoszącym  $x = x_0$ . Począwszy od  $x = x_0$ , stosunek napełnień w obu komorach zbiornika

wartością stałą  $\frac{y}{x} = \text{const.}$

#### 4. Uproszczony model matematyczny opróżniania szeregowo połączonych dwóch komór zbiornika

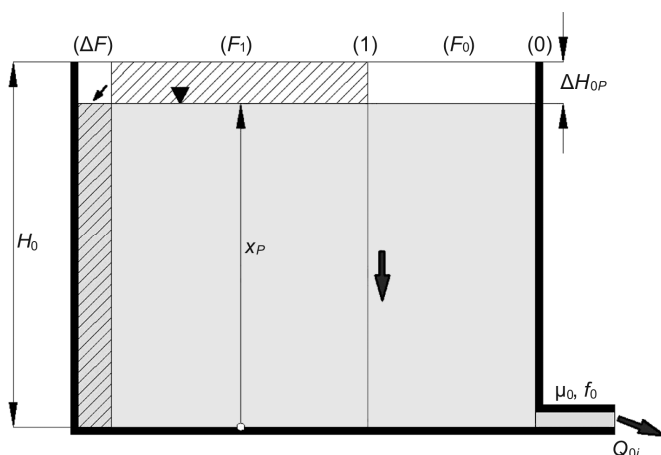
Uproszczony model obliczeniowy do określenia czasu opróżniania szeregowo połączonych dwóch komór zbiornika zakłada dwa etapy tego procesu:

- w **etapie pierwszym** opróżniana jest **tylko komora wylotowa** do określonej wartości różnicy poziomów napełnień w obu komorach  $\Delta H_{0P}$  (rys. 4),
- w **etapie drugim** opróżniania zakłada się **jedną komorę o odpowiednio zwiększonej powierzchni** jej poziomego przekroju  $F_Z = F_1 + F_2 + \Delta F$  (rys. 5) wraz z określonym początkowym poziomem napełnienia tej komory równym  $x_p = H_0 - \Delta H_{0P}$ .



Rys. 4. Pierwszy etap opróżniania dwukomorowego zbiornika według uproszczonego schematu obliczeń

Fig. 4. The first stage of emptying the bicameral container according to the simplified computational scheme



Rys. 5. Drugi etap opróżniania dwukomorowego zbiornika według uproszczonego schematu obliczeń

Fig. 5. Second phase of emptying the bicameral container according to the simplified computational scheme

Wartość  $\Delta H_{0P}$  na podstawie wzoru (17) jest równa

$$\Delta H_{0P} = H_0 - x_P = H_0 \frac{a-1}{a} \quad (35)$$

natomiast głębokość obniżonego napełnienia  $x_P$  w komorze wylotowej (0) zgodnie z wzorem wyniesie

$$x_P = \frac{H_0}{a} \quad (36)$$

gdzie

$$a = \left( \frac{F_1}{F_1 + F_0} \frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} \right)^2 + 1 \quad (37)$$

Czas trwania pierwszego etapu będzie równy

$$t_{1*} = \frac{2F_0}{\mu_0 f_0 \sqrt{2g}} \left( \sqrt{H_0} - \sqrt{x_P} \right) \quad (38)$$

Z przyrównania objętości cieczy zawartej w komorach zbiornika po zakończeniu etapu pierwszego do pojemności zbiornika o zwiększonej powierzchni o wartość  $\Delta F$  i napełnieniu początkowym  $x_P$  otrzymamy

$$(F_1 + F_0 + \Delta F) x_P = F_1 H_0 + F_0 x_P \quad (39)$$

$$F_1 + F_0 + \Delta F = F_1 \frac{H_0}{x_P} + F_0 \quad (40)$$

czyli

$$\Delta F = F_1 (a - 1) \quad (41)$$

Czas opróżniania takiego zbiornika wyniesie

$$Q_{0i} dt = -(\Delta F + F_1 + F_0) dx \quad (42)$$

a po uwzględnieniu wzoru (39) otrzymamy

$$Q_{0i} dt = -[F_1(a-1) + F_1 + F_0] dx \quad (43)$$

czyli

$$Q_{0i} dt = -(F_1 + F_0) \left[ \left( \frac{F_1}{F_1 + F_0} \right)^3 \left( \frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} \right)^2 + 1 \right] dx \quad (45)$$

Czas opróżnienia w drugim etapie obliczony zostanie wzorem

$$t_{2*} = \frac{2(F_1 + F_0)}{\mu_0 f_0 \sqrt{2g}} \left[ 1 + \left( \frac{F_1}{F_1 + F_0} \right)^3 \left( \frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} \right)^2 \right] \sqrt{x_P} \quad (46)$$

Czas ( $t_{2i}$ ) odpowiadający opróżnieniu zastępczej pojedynczej ( $F_1 + F_0 + \Delta F$ ) komory zbiornika z głębokości jej napełnienia  $x_{i+1}$  do głębokości  $x_i$  w etapie drugim wyznaczany jest według formuły

$$t_{2i} = \frac{2(F_1 + F_0)}{\mu_0 f_0 \sqrt{2g}} \left[ 1 + \left( \frac{F_1}{F_1 + F_0} \right)^3 \left( \frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} \right)^2 \right] (\sqrt{x_{i+1}} - \sqrt{x_i}) \quad (47)$$

Należy jednak mieć na uwadze, że wraz ze zmianą napełnienia w komorze wylotowej ( $x = h_0$ ), równą co do wartości napełnieniu w jednokomorowym zbiorniku przyjętym w obliczeniowym schemacie uproszczonym, następuje zmiana napełnienia ( $y = h_d$ ) w komorze poprzedniej (np. retencyjnej zbiornika) zgodnie z uproszczonym schematem obliczeniowym po czasie etapu pierwszego ( $t_1^*$ ), czyli począwszy od  $x_p > \boxed{x_i = h_0} \geq 0$  dla

$$t_1^* < \boxed{t_i} \leq T$$

$$y_i = \frac{x_i}{a}$$

czyli

$$h_d = \frac{h_0}{a} \quad (48)$$

Obliczenia numeryczne umożliwiają wyznaczenie przebiegu zmian napełnień w obu komorach zbiornika w czasie oraz określenie charakterystycznych parametrów tego procesu:

- $t_1$  – czas trwania pierwszego etapu opróżniania komór zbiornika,
- $x_0$  – napełnienie komory wylotowej po zakończeniu pierwszego etapu i odpowiadające mu napełnienie w komorze poprzedniej,
- $t_2$  – czas trwania drugiego etapu opróżniania zbiornika,
- $T$  – całkowity czas opróżnienia obu komór zbiornika ( $T = t_1 + t_2$ ).

Analogiczne wyniki można otrzymać, stosując uproszczony model opróżniania szeregowo połączonych komór zbiorników, przy czym charakterystyczne parametry tego procesu obliczane są w odmienny sposób, mianowicie wzorami:

- $x_p$  – napełnienie komory wylotowej po zakończeniu pierwszego etapu wzorem (36), a odpowiadające mu napełnienie w komorze poprzedniej wzorem (48),
- $t_1^*$  – czas trwania pierwszego etapu opróżniania zbiornika wzorem (38),
- $t_2^*$  – czas trwania drugiego etapu opróżniania zbiornika wzorem (46),
- $T$  – całkowity czas opróżnienia obu komór zbiornika ( $T = t_1^* + t_2^*$ ),
- $T_i$  – wyznaczenie przebiegu zmian napełnień w obu komorach zbiornika ( $x_i, y_i$ ) w czasie ( $t_i = t_1 + t_{2i}$ ) wzorami (47) i (48).

### 5. Weryfikacja uproszczonego modelu na podstawie obliczeń numerycznych

Przeprowadzono obliczenia dla różnych wartości powierzchni przekrojów poziomych komór zbiornika ( $F_0 < F_1$ ), ( $F_0 = F_1$ ), ( $F_0 > F_1$ ) oraz różnych możliwych stosunków

parametrów  $\left(\frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} < 1\right)$ ,  $\left(\frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} = 1\right)$  oraz  $\left(\frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} > 1\right)$ .

Tabela 1

Model matematyczny									
$h_0 = x$ [cm]	300	289	250	200,3	150	100	50	25	0,00
$\Delta H_{0P} = y - x$ [cm]	0,00	6,0	5,3	4,2	3,2	2,1	1,1	0,5	0,00
$h_d = y$ [cm]	300	295	255,3	204,5	153,2	102,1	51,1	25,5	0,00
$t$ [s]	0,00	12	94	212	346	504	710	856	1212
Model uproszczony									
$h_0 = x$ [cm]	300	294	250	200	150	100	50	25	0,00
$\Delta H_{0P} = y - x$ [cm]	0,00	6,0	5,3	4,2	3,2	2,1	1,1	0,5	0,00
$h_d = y$ [cm]	300	300	255,3	204,2	153,2	102,1	51,1	25,5	0,00
$t$ [s]	0,00	1,57	96	215	347	505	712	858	1210

Tabela 2

Dane wejściowe	Metoda numeryczna	Metoda uproszczona
$F_0 = 7,5 \text{ m}^2$ $F_1 = 50,0 \text{ m}^2$ $\mu_0 = 0,75$ $f_0 = 0,05 \text{ m}^2$ $\mu_1 = 0,90$ $f_1 = 0,25 \text{ m}^2$	$a = h_d/h_0 = 1,021$ $\Delta H_{0P} = 0,06 \text{ m}$ $x_P = 2,94 \text{ m}$ $Q_{0i}/Q_{1i} = 1,15$ $T = 1210 \text{ s} \cong 20,2 \text{ min}$	$a_0 = h_d/h_0 = 1,0211$ $\Delta H_0 = 0,06 \text{ m}$ $x_0 = 2,87 \text{ m}$ $Q_{0i}/Q_{1i} = 1,149 \cong 1,15$ $T = 1212 \text{ s} \cong 20,2 \text{ min}$
$F_0 = 25,0 \text{ m}^2$ $F_1 = 50,0 \text{ m}^2$ $\mu_0 = 0,75$ $f_0 = 0,05 \text{ m}^2$ $\mu_1 = 0,90$ $f_1 = 0,25 \text{ m}^2$	$a = h_d/h_0 = 1,0123$ $\Delta H_{0P} = 0,04 \text{ m}$ $x_P = 2,96 \text{ m}$ $Q_{0i}/Q_{1i} = 1,5$ $T = 1570,3 \text{ s} \cong 26,2 \text{ min}$	$a_0 = h_d/h_0 = 1,0125$ $\Delta H_0 = 0,04 \text{ m}$ $x_0 = 2,87 \text{ m}$ $Q_{0i}/Q_{1i} = 1,49$ $T = 1570,4 \text{ s} \cong 26,2 \text{ min}$
$F_0 = 50 \text{ m}^2$ $F_1 = 50,0 \text{ m}^2$ $\mu_0 = 0,75$ $f_0 = 0,05 \text{ m}^2$ $\mu_1 = 0,90$ $f_1 = 0,25 \text{ m}^2$	$a = h_d/h_0 = 1,007$ $\Delta H_{0P} = 0,02 \text{ m}$ $x_P = 2,98 \text{ m}$ $Q_{0i}/Q_{1i} = 2,0$ $T = 2088,8 \text{ s} \cong 34,8 \text{ min}$	$a_0 = h_d/h_0 = 1,007$ $\Delta H_0 = 0,02 \text{ m}$ $x_0 = 2,90 \text{ m}$ $Q_{0i}/Q_{1i} = 1,99 \cong 2,0$ $T = 2090,0 \text{ s} \cong 34,8 \text{ min}$

Obliczenia czasu zmian głębokości napełnień w szeregowo połączonych komorach zbiornika podczas ich opróżniania przeprowadzono metodą przybliżoną oraz numerycznie. Wyniki tych obliczeń przedstawiono w tab. 1.

Obliczenia numeryczne dla przyjętego zestawu danych wykazały, że:  $a = h_d/h_0 = 1,0211$ ,  $\Delta H_0 = 0,06$  m,  $Q_{0i}/Q_{1i} = 1,149 \cong 1,15$ , co jest zgodne z wynikami otrzymanymi z obliczeń metodą uproszczoną.

Zestawienie wybranych wyników obliczeń dla różnych przypadków obliczeniowych szeregowego połączenia dwóch komór zbiornika przedstawiono w tab. 2.

## 6. Uwagi końcowe

Przeprowadzone liczne obliczenia numeryczne dla przykładowych wartości powierzchni  $F_0$ ,  $F_1$  wzajemnej relacji  $F_0 < F_1$ ,  $F_0 = F_1$  oraz  $F_0 > F_1$ , a także dla  $\frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} \leq 1,0$  wykazały, że otrzymane wyniki są niemal identyczne z rezultatami uzyskanymi na podstawie obliczeń z zastosowaniem uproszczonego schematu. Taka zbieżność wyników wymaga jednak spełnienia następującego warunku

$$a = \left( \frac{F_1}{F_0 + F_1} \right)^2 \left( \frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} \right)^2 + 1 \leq 1,2$$

z którego wynikają zależności

$$F_1 \leq 0,8 F_0$$

przy

$$\mu_0 f_0 = \mu_1 f_1$$

oraz

$$\frac{\mu_0 f_0}{\mu_1 f_1} \leq 0,9$$

przy

$$F_1 = F_0$$

Analiza wyników obliczeń dla wszystkich rozważanych przypadków wykazała, że w początkowym etapie nazwanym etapem pierwszym opróżniania z cieczy szeregowo połączonych dwóch komór zbiornika obniżenia głębokości napełnień komór zbiornika w każdym kolejnym kroku czasowym spełniają nierówność  $|\Delta x| > |\Delta y|$ , co oznacza, że szybciej opróżniana jest komora wylotowa (0) niż komora poprzednia (1), a ponadto, że różnica napełnień komór ( $\Delta h = y - x$ ) jest funkcją rosnącą  $\frac{d(y-x)}{dt} > 0$ . W chwili zrównania ich wartości  $|\Delta x| = |\Delta y|$  różnica poziomów zwierciadeł cieczy w obu komorach osiąga wartość maksymalną  $\Delta h(\max) = \Delta h_0$ . Również w każdym wypadku, począwszy

od chwili, gdy  $|\Delta x| = |\Delta y|$ , do końca procesu opróżniania zbiornika, czyli w drugim etapie, obniżenia głębokości napełnień w jego komorach w każdym kroku czasowym spełniają teraz nierówność  $|\Delta x| < |\Delta y|$ . Oznacza to, że różnica napełnień komór ( $\Delta h = y - x$ ) jest funkcją malejącą  $\frac{d(y-x)}{dt} < 0$ . Wartość  $\Delta h_n$  w  $n$ -tym kroku obliczeniowym drugiego

etapu opróżniania szeregowo połączonych dwóch komór zbiornika ustalają opory ruchu występujące przy malejącym przepływie tranzytowym ( $Q_{1n}$ ) z komory poprzedniej (1) do komory wylotowej (0)

$$\Delta h_n = \frac{1}{2g} \left( \frac{Q_{1n}}{\mu_1 f_1} \right)^2$$

Ustalono również, że wyznaczona według uproszczonego schematu wartość  $\Delta H_{0p}$ , a także parametry  $a$  i  $Q_{0i}/Q_{1i}$  są w każdym przypadku równe wartościom obliczonym numerycznie ( $\Delta H_0$ ,  $a_0$ ,  $Q_{0i}/Q_{1i}$ ), jednak z tą różnicą, że występują one w różnym czasie  $t_{1*} < t_1$ . Nie ma to żadnego znaczenia dla uzyskiwanych obliczeń z użyciem schematu uproszczonego, jeżeli spełniony jest warunek  $a \leq 1, 2$ , który w praktyce inżynierskiej jest uzyskiwany prawie zawsze. Dla tych przypadków, gdy  $a > 1, 2$ , odpływ cieczy ze zbiornika najpierw jest nieliniowy i dopiero w dalszej fazie opróżniania, przekraczając znacznie czas ( $t_1$ ), uzyskuje zależność liniową od chwili, dla której  $a_0 > a$ .

#### Literatura

- [1] Kisiel A., *Hydrauliczna analiza działania grawitacyjno-podciśnieniowych zbiorników kanalizacyjnych*, Monografia 238, Wyd. Politechniki Krakowskiej, Kraków 1998.
- [2] Kisiel A., Kisiel J., *Zbiorniki retencyjne płynnych nieczystości rekomendowane dla stacji zlewnych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej, Inżynieria Środowiska, z. 16/2003, t. II, Białystok 2003.
- [3] Kisiel A., Malmur R., Kisiel J., *Badanie efektywności hydraulicznego działania zbiorników przerzutowych ścieków opadowych oraz podciśnieniowych zbiorników zrzutu ścieków dowożonych do oczyszczalni*, Projekt badawczy KBN nr 7 T09 D 048 21 (2001–2003 r.), Politechnika Częstochowska, Częstochowa, 2003.
- [4] Kisiel J., *Hydrauliczne podstawy współdziałania szeregowo połączonych komór zbiornika*, XIV Konferencja Naukowa nt. „Aktualne problemy gospodarki wodno-ściekowej”, Ustroń 2004.
- [5] Kisiel J., Biń J., *Współdziałanie retencyjnego zbiornika stacji zlewnej z oczyszczalnią ścieków*, materiały konferencyjne nt. „Zintegrowane, Inteligentne Systemy Wykorzystania Energii Odnawialnej”, Podlesie k. Częstochowy 2005.
- [6] Kisiel J., *Hydrauliczna analiza współdziałania stacji zlewnej z oczyszczalnią ścieków*, praca doktorska, Politechnika Częstochowska, Częstochowa 2006.