

Federica Ottoni\*

Eva Coisson\*, Carlo Blasi\*

## Empiricism reappraisal in ancient buildings structural analysis. The masonry domes, from historical debates to numerical models

### Analiza konstrukcyjna budowli historycznych z perspektywy badań empirycznych. Kopyły murowane, od historycznych dysput do modeli numerycznych

#### 1. Introduction. The “forces-path” intuition

Aim of this paper is to show the potentiality of the empiricism in identifying the real mechanical behavior of ancient monuments, which often, in the “*art of building*” rules and in the old treatises [1], more than in the modern concepts of new building science, can find the fundamental instruments of knowledge [2]. *Proportional theory* and geometrical rules originated from the direct observation of collapses mechanisms occurred to the monuments during the centuries. The comparison between similar mechanisms and pathologies has allowed to trace the field of application of these theories in solving the safety problem and in guaranteeing the equilibrium of masses. Certainly, ancient architects couldn't have a precise idea of the mechanical behavior of masonry, but, for sure, they must have figured out the “forces path” inside their huge structures [3]. The same forces path which new numerical models, despite the great developments of the last decades, are not able to represent with a reliable precision, for the big approximations at the base of “masonry” modeling as a modern material: its homogeneity, isotropy and linear behavior.

Here, an ideal route from empiricism to numerical modeling of masonry domes is presented, through the recall of some historical debates [4]

#### 1. Wstęp. Intuicyjnie wyznaczony rozkład sił

Celem tego referatu jest pokazanie możliwości podejścia empirycznego w ustaleniu rzeczywistej pracy (z punktu widzenia mechaniki) historycznych budowli, które znajduje uzasadnienie częściej w zasadach sztuki budowlanej i starych traktatach [1] niż we współczesnych koncepcjach inżynierii budowlanej [2]. Teoria proporcji i zasady geometrii wywodzą się z bezpośrednich obserwacji mechanizmów zawalania się budowli na przestrzeni wieków. Porównanie podobnych mechanizmów i patologii pozwoliło prześledzić zastosowanie tych teorii do rozwiązywania problemów bezpieczeństwa budowli i zapewnienia równowagi mas. Dawni architekci nie mogli mieć precyzyjnej wiedzy na temat mechanicznego zachowania się konstrukcji murowanych, ale z pewnością orientowali się jak przebiegały siły w ich ogromnych budowlach [3]. Pomimo dużych postępów w ostatnich dziesięcioleciach współczesne modele numeryczne nie potrafią odwzorować wiarygodnie rozkładu sił z powodu bardzo dużych uproszczeń leżących u podstaw modelowania, dotyczących współczesnych materiałów, ich jednorodności, izotropii i liniowego zachowania się.

W referacie przedstawiono drogę od empiryzmu do modelowania numerycznego kopuł murowanych, przywołując historyczne dysputy [4] reprezentują-

which have represented as many fundamental steps in the comprehension of mechanical behavior of some special structures (as domes) and in setting up of consolidating historical solutions. The final aim is to show, by presenting an experimental case of analysis, the validity of the ancient master builders solution to the main problem of the masonry domes: their primeval and ineradicable horizontal thrust on supporting structures.

## 2. Resistance vs stability. The “equilibrium approach”

Ancient treatises and old monuments both reveal the deep knowledge of classical geometry which was the common language, not only formal but even static, of ancient architects.

Galileo [5] first evidenced the “mistakes” in the “proportional method” of calculation, introducing a partial correction to the original Mariotte’s formula for resistance value of a loaded cantilever beam. For the first time, he had fixed a limit to the infinite growing law, which, up to his time, had allowed to apply to a real and massive structure the same proportions tested before in a smaller wooden model. It was the birth of the modern *science of constructions* against the ancient *art of building* but, “Galileo was [partially] wrong” [6]. Actually, the translation of the *stability problem* into an *equilibrium balance*, works, at least until you get close to the characteristic breaking values of the materials, and for the historical buildings – whose constitutive materials work at a stress level much lower than the breaking one – the equilibrium respect is also guarantee of the building stability.

Despite their massive appearance, masonry structures are essentially labile, not isostatic. Still at the beginning of the XXth century, G.B. Milani [7], shows their peculiarity, underlying the difference with the new “elastic systems”: a monolithic structure “*can remain in equilibrium for each value of  $S$  for which the resultant  $R$  is internal to the section*”. What has to be avoided is its overturning, that, regardless of resistance values, inevitably occurs when the resultant falls outside its thickness. Then, the geometrical ratio between thickness of the wall and its height is the fundamental parameter, in order to state the stability condition of the wall itself in front of horizontal forces (as the thrust of a dome).

The “elastic systems” (as modern structures) can have always at least one equilibrium solution and for this reason the question of stability is transferred from equilibrium into a materials resistance problem. This means that, while for the “elastic system” any structural shape is possible, for masonry struc-

ture fundamental etapy w zrozumieniu mechanicznego zachowania się specjalnych konstrukcji (takich jak kopuły) i w doskonaleniu historycznych rozwiązań. Na koniec przedstawiono praktyczny przypadek analizy demonstrujący słuszność rozwiązania podstawowego problemu kopuł murowanych – ich naporu poziomego na konstrukcje wsporcze – przez dawnych budowniczych.

## 2. Nośność a stateczność. Podejście z punktu widzenia równowagi konstrukcji

Historyczne traktaty i stare budowle ujawniają głęboką znajomość klasycznej geometrii dawnych architektów, która stanowiła ich wspólny język (nie tylko formalny, ale także używany w dziedzinie analizy statycznej).

Galileusz [5] pierwszy wykazał nieściśłości proporcjonalnej metody obliczeń, wprowadzając poprawkę do oryginalnego wzoru Mariotta na nośność obciążonej belki wspornikowej. Po raz pierwszy ustalił granicę zasady nieskończonego powiększania, która do tamtego czasu pozwalała nadawać rzeczywistej ogromnej budowli proporcje przetestowane wcześniej na mniejszym modelu drewnianym. Narodziła się wtedy współczesna nauka o konstrukcjach budowlanych, w odróżnieniu do dawnej sztuki budowlanej. Galileusz częściowo się mylił [6]. Przekształcenie problemu stateczności w problem równowagi sprawdza się w praktyce, przynajmniej do momentu, gdy osiągnięte wytrzymałość graniczną materiałów. W przypadku budowli zabytkowych, których materiały składowe pracują pod obciążeniem dużo mniejszym niż obciążenie niszczące, podejście równowagi gwarantuje ich stateczność.

Pomimo ich masywnego wyglądu budowle murowane są w zasadzie labilne, a nie izostatyczne. Jeszcze na początku XX wieku G.B. Milani [7] wskazał na ich szczególną cechę w odróżnieniu od nowych systemów sprężystych: konstrukcja monolityczna „może pozostawać w równowadze dla każdej wartości  $S$ , przy której wypadkowa  $R$  jest wewnętrzna w stosunku do przekroju”. Należy unikać odwrotności, tzn. gdy niezależnie od wartości oporu wypadkowa wychodzi poza grubość przekroju. Wtedy stosunek geometryczny grubości ściany do jej wysokości jest podstawowym parametrem uwzględnianym przy określaniu warunku stateczności ściany w przypadku działania sił poziomych (np. napór kopuły).

Układy sprężyste (takie jak współczesne konstrukcje) zawsze mogą mieć co najmniej jedno rozwiązanie warunków równowagi. W rezultacie problem stateczności redukuje się do problemu wytrzymałości materiałów. Oznacza to, że podczas gdy w przypad-

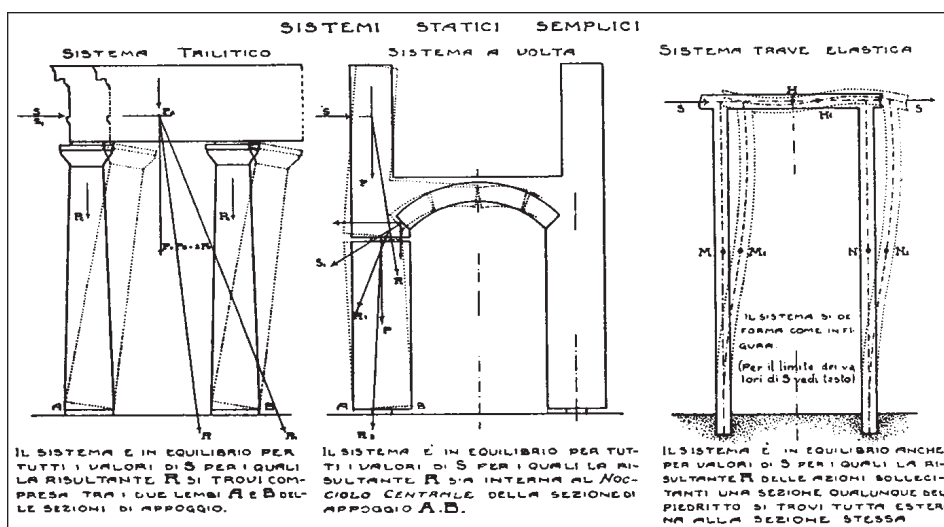


Fig. 1. Difference between monolithic masonry structures and modern elastic systems in Milani's drawing  
 Rys. 1. Różnica między monolitycznymi konstrukcjami murowanymi a współczesnymi układami sprężystymi (rysunki Milaniego)

tures only some particular configurations are available: this fact explains why the shape of ancient structures has remained unchanged for centuries and why ancient builders have been able to experience, for centuries, such similar and well-known collapse mechanisms. Indeed, use of *statics*, alone, has given a good estimation of structural quantities, at least until the XVIIIth century [8] when the introduction of slender, homogeneous structures, with elastic behavior and minimal deformations has necessitated the new science application. At least, giving reason to Galileo.

Masonry is a composite material, constituted by a mix of rigid blocks and mortar joints, and by observing any ancient walls is immediately clear that considering this material as „homogeneous” is a far-fetched concept [9]. Its great resistance to compression and no resistance to traction, get complicate when it's necessary to study its behavior by modern science, based on perfect and well known materials. In keeping with this, the rediscovering of the classical building rules may have a practical and operative value, especially considering that, for historical buildings – subject to several changes, displacements and reconstruction phases during their life – there is an uncertainty in the definition of constraints between the elements, for the presence of voids and bad connections between them. The translation of these events into quantitative parameters is really complex and often unreliable.

Even more difficult results a reliable definition of its mechanical characteristics if we consider that we have to use statistics formulas to estimate them on the base of very limited number of tests which can be carried out on ancient buildings. The more uncertain are the parameters we input at the beginning of this process, the more uncertain would be

ku układów sprężystych możliwy jest dowolny kształt, dla konstrukcji murowanych dostępnych jest tylko kilka określonych konfiguracji. Fakt ten wyjaśnia dlaczego kształt historycznych budowli nie ulegał zmianom przez wieki i dlaczego ulegały one podobnym katastrofom, których mechanizm był dobrze znany. Istotnie, dzięki stosowaniu samej tylko statyki dało się stosunkowo dokładnie oszacować wielkości konstrukcyjne aż do XVIII wieku [8], kiedy to pojawienie się smukłych jednorodnych konstrukcji charakteryzujących się pracą sprężystą i minimalnymi odkształceniami spowodowało konieczność zastosowania nowego podejścia.

Mur jest materiałem złożonym, składającym się sztywnych bloków i spoin. Przyglądając się jakiemuś staremu murowi widzimy wyraźnie, że traktowanie go jako materiał jednorodny to duża przesada [9]. Duża wytrzymałość muru na ściskanie i brak wytrzymałości na rozciąganie sprawiają, że badanie jego zachowania się za pomocą współczesnych metod opracowanych dla doskonałych materiałów o dobrze znanych własnościach sprawia trudności. W związku z tym odkrywanie na nowo klasycznych zasad budowlanych może mieć praktyczną wartość, szczególnie gdy weźmie się pod uwagę fakt, że w przypadku budowli historycznych (które w czasie ich istnienia były wielokrotnie przebudowywane) istnieje niepewność co do więzów między ich elementami z powodu występowania pustek i słabych połączeń. Przełożenie tych czynników na parametry ilościowe jest bardzo skomplikowane i często zawodne.

Jeszcze trudniejsza jest wiarygodna definicja charakterystyk mechanicznych takich konstrukcji, gdy weźmie się pod uwagę fakt, że do oszacowania ich trzeba użyć wzorów statystycznych i danych pochodzących z ograniczonej liczby badań doświadczalnych przeprowadzonych na historycznych bu-

the results, regardless the efficiency of the calculation instrument used. What numerical models are still unable to consider is the capability of the ancient structure to present an even severe damage and to continue to live, by a progressive adaptation to new geometrical shapes, more and more deformed, which soon represent a new equilibrium. This consideration, with the evidence of the ancient monument secular stability, clearly shows that is always necessary a mutual support between numerical methods and empiricism, in order to reduce uncertainties of assessment. Particularly for the primeval structures, as domes [10].

### 3. The domes original “trap”: the historical debates path towards the solution

The observation of domed structures, and most of all, of their crack pattern, must have clarified to the architects since the beginning, that the key of domes mechanical behavior would be the *arch*. Based on the same thrusting principle of the arches which compose them, domes tend to open themselves, by transferring to their bearing structures, not only vertical forces but even horizontal ones. These thrusts generate severe tensional states, which inevitably, during time, determine their lack of stability.

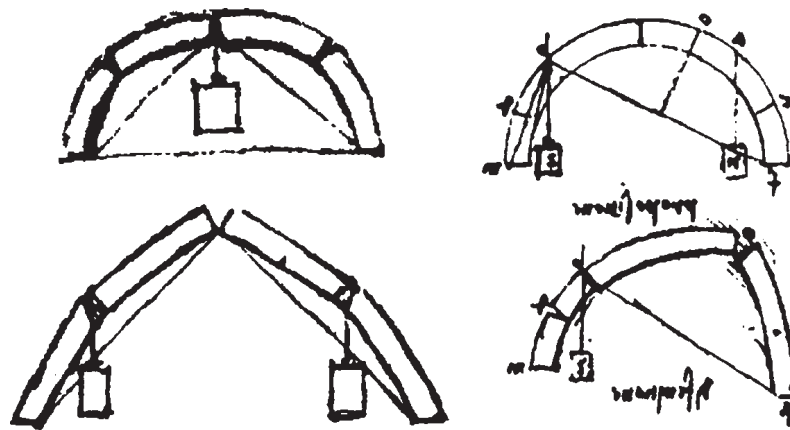


Fig. 2. The arch hinges prefigured by Leonardo's "kinematics" in Madrid Code  
Rys. 2. Przeguby łuku przewidziane przez „kinematykę” Leonardo w Kodeksie Madryckim

“Arch is nothing else than a force caused by two weakness” said Leonardo da Vinci, even before the fundamental Hooke’s theory which related the shapes of an arch to the *catenaria*. The *line of thrust* is the path on which internal forces transport external loads to the support in any structure. When inverted, a hanging string model may represent the line of thrust in compression (Hooke’s intuition, *ut*

dowlach. Im bardziej niepewne są parametry wprowadzone na początku tego procesu, tym bardziej niepewne będą uzyskane wyniki, bez względu na wydajność zastosowanego narzędzia obliczeniowego. Modele numeryczne nadal nie są w stanie uwzględnić zdolności historycznych konstrukcji do przetrwania nawet poważnych uszkodzeń dzięki stopniowej adaptacji do nowych kształtów geometrycznych przez co uzyskiwana jest nowa równowaga. Wynika stąd, że metody numeryczne należy stosować w połączeniu z podejściem empirycznym w celu zmniejszenia niepewności oceny, szczególnie w przypadku takich pradawnych konstrukcji jak kopuły [10].

### 3. Problem kopuły. Przez historyczne dysputy do rozwiązania

Obserwacje konstrukcji kopuł, a szczególnie ich schematu pękania, musiały od samego początku uświadomić architektom, że łuk jest kluczowym elementem do zrozumienia zachowania się kopuł pod względem mechanicznym. Opierając się na tej samej zasadzie naporu co łuki, które je tworzą, kopuły mają tendencję do otwierania się na skutek przekazywania na ich elementy wsporcze nie tylko sił pionowych, ale także poziomych. Napory te generują krytyczne stany rozciągania, które z czasem nieuchronnie prowadzą do utraty stateczności.

“Łuk jest niczym innym jak siłą spowodowaną dwiema słabościami” stwierdził Leonardo da Vinci, jeszcze przed sformułowaniem przez Hooke’a teorii wiążącej kształty łuku z krzywą łańcuchową (*catenaria*). Linia ciśnienia to droga po której siły wewnętrzne przekazują obciążenia zewnętrzne na podpory w dowolnej konstrukcji. Jeżeli zostanie odwrócony, model wiszącej struny może on przed-

*tensio sic vis*). Indeed, the minimum and the maximum values of the thrust locate the position of the cracks and the hinges in which the collapse mechanism begins: for a circular arch, this position is fixed at the top and at 30° above the arch abutment. This theory still holds for the domes [11].

A dome, in fact, can be seen as a series of arches obtainable by slicing the structure along meridian planes: two opposite slices form an arch and they work together by compression, making the most of the masonry mechanical properties. Therefore, it is possible to draw, for the dome, the same line of thrust which was previously identified as the basis of the collapse theory on the arches. In this way, it's easy to identify the specific equilibrium state in compression at which the dome is safe.

This mechanical behavior, still valid as modern “membrane theory”, couldn't be mathematically demonstrated by the ancient architects but we can find its theoretical successive approximations by examining some fundamental historical debates, which have represented as many changes in structural conception of domes, often through the progressive use of mathematics, finally converting the original *art* of building into *science*.

The forces path inside a domed structure must have been clear to the two *mecanicopoioi* called by Giustiniano for the construction of Hagia Sophia, and its perfect geometry and its buttresses system face off three times its inevitable collapse, which finally has occurred for two fundamental obstacles: the byzantine building practice (which foresaw the use of high mortar thickness) and the seismic force [12]. Only a thousand years later, Sinan solved the “mistake” by straightening the pillars at its base and by encircling the dome with huge iron ties. We don't have any evidences of mathematical calculations by Sinan but in Hagia Sophia historical consolidation we can assist to the first overcoming of the ancient geometrical rule by the empiricism. The Ottoman method of consolidation has been used for centuries without

stawiać linię naporu podczas ściskania (intuicja Hooke'a, *ut tensio sic vis*). Rzeczywiście, minimalne i maksymalne wartości naporu determinują umiejscowienie pęknięć i przegubów, przy którym zaczyna działać mechanizm zaważenia się. W przypadku łuku kołowego to miejsce znajduje się u góry i 30° powyżej oparcia łuku. Teoria ta nadal obowiązuje dla kopuł [11].

Kopułę można postrzegać jako szereg łuków uzyskanych przez pocięcie tej konstrukcji wzdłuż płaszczyzn południkowych. Dwa przeciwległe segmenty tworzą łuk i pracują razem poprzez ściskanie, determinując większość mechanicznych własności muru. Dlatego też można dla kopuły wykreślić tą samą linię naporu, która wcześniej stanowiła podstawę teorii zaważenia się łuków. W ten sposób łatwo ustalić konkretny stan równowagi przy ściskaniu, w którym dane kopuła jest bezpieczna.

To zachowanie się kopuły pod względem mechanicznym, nadal obowiązujące jako współczesna teoria membrany, nie mogło być matematycznie udowodnione przez dawnych architektów, ale jego kolejne aproksymacje można prześledzić w fundamentalnych historycznych dysputach, gdzie koncepcje konstrukcyjne kopuł ewoluują dzięki zastosowaniu matematyki, doprowadzając do przemiany pierwotnej sztuki budowlanej w naukę.

Rozkład sił wewnątrz konstrukcji kopułowych musiał być znany dwóm *mecanicopoioi*, którym Giustiniano zlecił budowę Bazyliki Hagia Sophia. Jej doskonała geometria i system przypór uchronił ją trzy razy przed nieuchronnym zawaleniem się, które ostatecznie nastąpiło z dwóch podstawowych

powodów: bizantyjskiej praktyki budowlanej (która antycypowała stosowanie dużych grubości zaprawy) i sił sejsmicznych [12]. Dopiero tysiąc lat później, Sinan naprawił ten „błąd” przez wzmocnienie kolumn u ich podstawy i ujęcie kopuły w olbrzymie żelazne ciężna. Nie ma dowodów na to, że Sinan przeprowadził obliczenia matematyczne, ale to historyczne wzmocnienie bazyliki Hagia Sophia jest pierwszym przypadkiem przewyżczenia dawnej zasady geometrycznej



Fig. 3. Viviani sketches for Santa Maria del Fiore ties calculation

Rys. 3. Szkice Vivianiego przedstawiające obliczenia wiązań katedry Santa Maria del Fiore

even trying to justify it: it was the application of pure empiricism, whose validity was tested by encircled domes secular stability.

The first mathematical definition of this empirical method has been attempted by the mathematician Vincenzo Viviani in the late XVIIth century, during his strong debate with Cecchini, on Santa Maria del Fiore dome [13]. The opponent of Viviani identified in differential soil settlements the principal cause of the early noticed cracks (*screpoli*): the same argument already used during the first debate on Vatican dome, some decades before. Viviani used the simple formulation already applied by Torricelli in the Uffizi "*columnae fessae*" question and by the application of same trigonometric formula he had first found a way of calculate the exact value of the force opposed by an encircling tie to the thrust at the base of a dome [14]. It was the first mathematical formulation of a generally accepted intervention, without a really connection with the dome behavior.

The dome collapse mechanism has been deeply investigated only during another great debate which took place between the three Mathematicians and Poleni on the Vatican dome stability, some decades later. In 1743 Jacquier, Le Seur and Boscovich have defined the kinematics subtended to the cracks typical of all masonry domes. For the first time, they applied the Virtual Work Principle to the system composed by the huge dome and the underlying tambour of San Peter in Rome, reaching the correct visualization of the movement of each single element involved in the collapse process, almost by anticipating the concept of macroelements [15]. Instead, Poleni's analysis reported the question to the "ancient graphical way", which has seen the dome reduced to its slices-arches equilibrium, verifying that the line of thrust would be contained into its thickness and using the hanging *catenaria* visualization in order to prove it [16]. It's not so important, for our scopes, that the conclusion of the dome instability – theorized by Mathematicians – was partially wrong and that the debate finished with the success of Poleni. What's important to stress is that for the first time the dome equilibrium has been considered by using the kinematics concepts.

The problem of horizontal thrust has been then solved in the last debate which has decreed the end of the dome – as it was originally conceived – and the parallel birth of membrane structure. The last debate about French Pantheon stability has definitely transformed the equilibrium approach into a resistance problem. The Soufflot's revolutionary design of slender pillars have challenged the ancient

przez empiryzm. Otomańska metoda wzmacniania stosowana była przez wieki bez podejmowania jakichkolwiek wysiłków, aby ją uzasadnić. Jest to przykład zastosowania czystego empiryzmu, którego słuszność udowodniła stabilność wzmocnionej kopuły.

Pierwszy podjął próbę zdefiniowania tej metody empirycznej matematyk Vincenzo Viviani pod koniec 17 wieku w ramach ostrej polemiki z Cecchinim dotyczącej kopuły Katedry Santa Maria del Fiore [13]. Według przeciwnika Vivianiego główną przyczyną powstałych rys (*screpoli*) było zróżnicowane osiadanie gruntu. Ten sam argument był kilkadziesiąt lat wcześniej wysunięty podczas pierwszej dysputy dotyczącej kopuły watykańskiej. Viviani zastosował prosty wzór trygonometryczny wcześniej użyty przez Torricelliego do rozwiązania problemu *columnae fessae* pałacu Uffizi. Dzięki temu udało mu się obliczyć dokładną wartość siły z jaką ciężno otaczające kopułę przeciwstawiało się naporowi u jej podstawy [14]. Było to pierwsze matematyczne sformułowanie interwencji budowlanej powszechnie stosowanej bez uzasadnienia.

Mechanizm zawalenia się kopuły był dogłębnie analizowany kilkadziesiąt lat później podczas kolejnej wielkiej dysputy między trzema matematykami a Polenim dotyczącej stabilności kopuły watykańskiej. W 1743 r. Jacquier, Le Seur i Boscovich określili kinematykę leżącą u podstaw pojawiania się pęknięć typowych dla wszystkich kopuł muryowanych. Po raz pierwszy zastosowali oni zasadę pracy wirtualnej do układu składającego się z olbrzymiej kopuły i tamburu w Bazylice Św. Piotra w Rzymie, uzyskując poprawną wizualizację ruchu każdego poszczególnego elementu biorącego udział w procesie zawalenia się (prawie antycypując koncepcję makroelementów) [15]. Analiza Poleniego ujmowała ten problem w tradycyjny sposób graficzny, sprowadzając go do problemu równowagi segmentów łuków. Poleni stosując wizualizację wiszącej linii łańcuchowej (*catenaria*) wykazał, że linia parcia przebiega w grubości kopuły [16]. Nie jest to tak istotne dla naszych rozważań, że wnioski dotyczące niestabilności wyprowadzone przez powyższych matematyków były częściowo błędne i że dysputa zakończyła się sukcesem Poleniego. Istotnym jest to, że po raz pierwszy równowaga kopuły była rozpatrywana w kategoriach kinematyki.

Problem poziomego naporu został rozwiązany w ostatniej dyspucie, podczas której ogłoszono koniec kopuły w jej tradycyjnym ujęciu i jednocześnie narodziny konstrukcji membranowej. Ta dysputa dotyczyła stabilności Francuskiego Panteonu i definitywnie przekształciła problem równowagi w problem wytrzymałości. Rewolucyjny projekt Soufflota

proportional rules and the final covering of the new laic temple has solved in its structural configuration the problem of the thrust.

A new material made by stones and iron links was finally capable to absorb the ineradicable tensile stresses at the base of the great dome, justifying the verdict of Rondelet: domes don't push anymore [17].

#### 4. An experimental case: from empiricism to computational models

The experience carried out on a XVII century dome, Santa Maria del Quartiere, in Parma, (Italy) has clearly shown the potentiality of empiricism reappraisal in domes structural analysis, as a confirmation and calibration of the results obtained by numerical models.

A clear map of the cracks surveyed, has pointed out a substantial symmetry of the crack pattern, which confirms the domes typical collapse mechanism, with a droop of the top under its own weight and with a correspondent enlargement at the base.

According to the historical method, and by virtue of its symmetry, the dome has been converted to an arch, obtained by cutting two consecutive dome panels in their centre. Then, the thrust of the whole dome has been calculated by the equilibrium of this single slice, considering the dead weight applied in the centre of mass. Once solved the three simple equilibrium equations we have reached the radial thrust which guarantees the stability of the dome, equal to  $H = 8200$  kg.

The numerical model of the dome has been then performed by consecutive steps. A very simplified 3D model has been built up, on hexagonal base, symmetric, growing in height and following the circular profiles of the real dome edges, whose variable thickness starts from 30 cm at the abutment up to 20 cm at the top, meshed by tetrahedron solid finite elements (FEM Abaqus). As stated before, it can be considered a very low tensile resistance for traditional masonry, which can be approximated to an ideal no-tension material, (especially in for domes, in which the

smukłych kolumn podważył dawne zasady proporcjonalności i ostateczne przykrycie tej nowej świeckiej świątyni w swoim układzie konstrukcyjnym rozwiązało problem naporu.

Nowy materiał wykonany z kamieni i żelaznych łączników był wreszcie w stanie zamortyzować nieuniknione naprężenia rozciągające u podstawy wielkiej kopuły, uzasadniając opinię Rondeleta, że kopuły przestały już napierać [17].

#### 4. Przykład praktyczny: od empiryzmu do modeli obliczeniowych

Eksperyment przeprowadzony na siedemnastowiecznej kopule Kościoła Santa Maria del Quartiere w Parmie (Włochy) wykazał możliwość zastosowania empirycznej oceny kopuły w statyce budowli w celu

potwierdzenia i kalibracji wyników uzyskanych za pomocą modeli numerycznych.

Wyraźna siatka spękań wykazywała znaczną symetrię, co potwierdzało typowy mechanizm zawałania się kopuły – opadnięcie szczytu kopuły pod własnym ciężarem i jej powiększenie się u podstawy.

Zgodnie z metodą historyczną i uwzględniając symetrię kopuły, została ona przekształcona w łuk uzyskany przez wycięcie dwóch kolejnych płyt w jej środku. Następnie parcie całej kopuły obliczono na podstawie równowagi tego jednego wycinka, uwzględniając ciężar własny przyłożony w środku masy. Po rozwiązaniu trzech prostych równań otrzymano

napór promieniowy zapewniający kopule stabilność, a wynoszący  $H = 8200$  kg.

Następnie opracowano model numeryczny kopuły. Najpierw zbudowano uproszczony model trójwymiarowy na sześciokątnej podstawie. Był on symetryczny i odwzorowywał kołowe profile krawędzi rzeczywistej kopuły, których grubość zmienia się od 30 cm przy wezłowaniu do 20 cm u szczytu. Zastosowano siatkę czworościennych pełnych elementów skończonych (FEM Abaqus). Jak wspomniano wyżej, w przypadku tradycyjnego muru wytrzymałość na rozciąganie jest bardzo mała. Materiał taki jest zbliżony do idealnego materiału nierozciągliwego (szczególnie w przypadku kopuły,

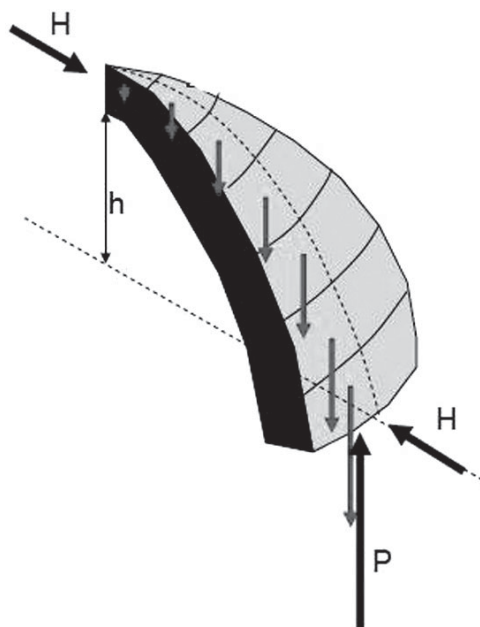


Fig. 4. The reduction to an arch equilibrium for solution of dome stability  
Rys. 4. Sprowadzenie problemu stabilności kopuły do równowagi łuku

prevalence of compressive stresses is obvious). Then, we have attributed to this 3D model the mechanical characteristics of an elastic, homogeneous, isotropic solid (precisely, the following values have been applied:  $E = 10.000 \text{ kg/cm}^2$ ; Poisson ratio  $\nu = 0.2$ ; Mass density  $\rho = 1800 \text{ kg/m}^3$ ), both in the intact and the cracked situation.

w których dominują naprężenia ściskające). Następnie przypisano temu modelowi charakterystyki mechaniczne ciała sprężystego, jednorodnego i izotropowego (konkretnie przypisano następujące wartości:  $E = 10,000 \text{ kg/cm}^2$ ; współczynnik Poissona  $\nu = 0,2$ ; gęstość  $\rho = 1800 \text{ kg/m}^3$ ) zarówno w stanie nienaruszonym jak i spękany.

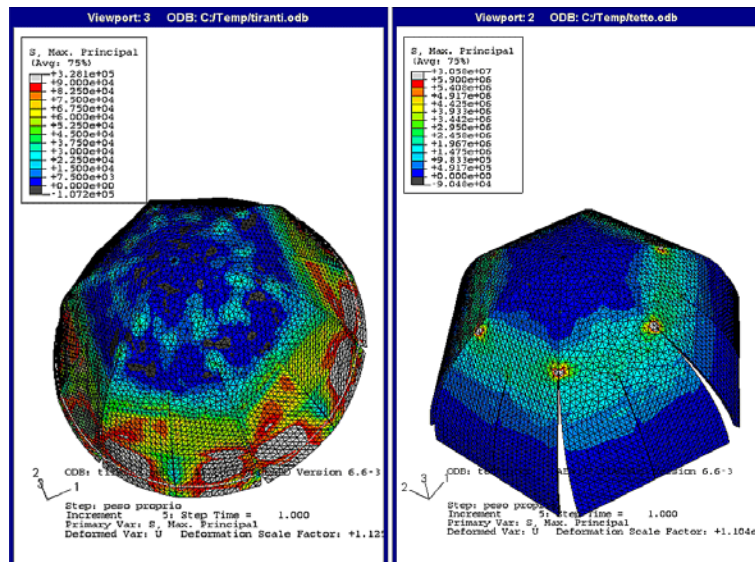


Fig. 5. The insertion of the encircling tie (left) on the cracked dome  
Rys. 5. Nałożenie cięgna obejmującego na pękniętą kopułę (obraz z lewej strony)

Despite the material is assumed to be linear-elastic, the non-linear geometry has been then introduced by inserting the cracks in the undamaged structure: in this way, the non-linearity of the material is concentrated in the discontinuities inserted as cracks actually surveyed.

Gradually proceeding from the more simplified model, up to simulate the real critical load and restraint conditions, different load cases and dome configurations have been considered. The intact dome model isn't realistic but it has been useful to simulate the previous damage: the results, in fact, pointed out the higher tensile stresses in the zones which are actually cracked. The last numerical model have seen the insertion of an encircling steel tie on the cracked dome: the absence of tensile stresses incompatible with the masonry properties has confirmed the validity of the hypothesis assumed at the beginning.

The intermediate step has been the calibration of the hypothesized mechanical parameters by the setting up of a dynamic modal analysis and the results of the ideal model of the dome, geometrically regularized, has verified the outcomes of the first empiric-experimental phase. Moreover, these findings have confirmed the collapse mechanism hypothesis, based on the observation of the cracks on the analysis of historical debates. The founded ten-

Pomimo że materiał przyjęto jako liniowo-sprężysty, wprowadzono geometrię nieliniową przez uwzględnienie pęknięć w nieuszkodzonej konstrukcji. W rezultacie nieliniowość materiału skoncentrowana jest w nieciągłościach wprowadzonych jako spękania stwierdzone w rzeczywistości.

Stopniowo przechodzą od uproszczonego modelu do symulacji rzeczywistych obciążeń krytycznych i warunków utwierdzenia oraz różnych konfiguracji obciążenia i kopuły. Model kopuły nienaruszonej nie jest realistyczny, ale był przydatny w symulacji poprzedniego uszkodzenia. Uzyskane wyniki wykazały występowanie większych naprężeń rozciągających w strefach, które były rzeczywiście spękane. W ostatnim modelu numerycznym nałożono na kopułę stalowe cięgno. Brak naprężeń rozciągających niezgodnych z własnościami muru potwierdził słuszność założenia przyjętego na początku.

Etap pośredni obejmował kalibrację hipotetycznych parametrów mechanicznych poprzez analizę modelu dynamicznego i na podstawie wyników uzyskanych dla idealnego modelu kopuły regularyzowanego geometrycznie. W rezultacie uzyskano potwierdzenie wyników pierwszego etapu empirycznego-doświadczonego.

Ponadto na podstawie spękań opisanych w historycznych dysputach została potwierdzona hipoteza mechanizmu zawalenia się kopuły. Wyznaczo-



sile pattern matches with the actual cracks, which really represent the main continuous monitoring system of the structure.

## 5. Conclusions

As stated before, some historical debates, on the Vatican dome, the octagonal dome of Santa Maria del Fiore in Florence, and finally on French Pantheon of Paris, have been analysed as fundamental steps in domes behaviour clarification, in a route from art of building up to science of construction.

The historical solution to the primeval thrust of domes, which during the centuries has caused their principal cause of collapse, has finally found a confirmation in the numerical analysis of the XVII century hexagonal dome of Santa Maria del Quartiere in Parma (Italy).

Thanks to a fusion between historical analysis, precision geometrical surveys, experimental investigations and numerical modelling, the static behaviour of a typical rotation dome has been determined, in order to plan future interventions for its consolidation and conservation, which in the ancient intervention of encircling tie has found its guarantee of success.

Only a reappraisal of empiricism and art of building can give to the modern numerical methods a way of reliability to mutable and complex structures as historical ones, finding an interpretative key to their primeval mechanisms and then reaching a conservative solution of consolidation.

ny przebieg spękań zgadza się z przebiegiem spękań występującym w rzeczywistości, który stanowi system ciągłego monitorowania konstrukcji.

## 5. Wnioski

Przeanalizowano niektóre historyczne dysputy (począwszy od sztuki budowlanej do nauki o budowlach) dotyczące kopuły watykańskiej, ośmiokątnej kopuły Katedry Santa Maria del Fiore we Florencji i Francuskiego Panteonu w Paryżu, jako fundamentalne etapy w zrozumieniu zachowania się kopuł.

Historyczne rozwiązanie problemu naporu kopuły, który w ciągu wieków stanowił podstawową przyczynę ich zawalania się zostało ostatecznie potwierdzone przez analizę numeryczną siedemnastowiecznej sześciokątnej kopuły Kościoła Santa Maria del Quartiere w Parmie (Włochy).

Dzięki połączeniu analizy historycznej, precyzyjnych pomiarów geometrycznych, badań doświadczalnych i modelowania numerycznego, określono statyczne zachowanie się typowej kopuły obrotowej przez co możliwe staje się planowanie przyszłych interwencji wzmacniających i konserwacyjnych, których sukces gwarantuje historyczna interwencja z zastosowaniem ciągu otaczającego.

Tylko poprzez uwzględnienie osiągnięć podejścia empirycznego i sztuki budowlanej współczesne metody numeryczne mogą stać się bardziej wiarygodne w zastosowaniu do ulegającym zmianom złożonych budowli historycznych. Tylko na tej drodze można znaleźć klucz do interpretacji ich fundamentalnych mechanizmów i na tej podstawie opracować sposób ich wzmocnienia.

## References • Literatura

- [1] Guenzi C., *The art of building. Treatises in Italy, 1750-1950 (L'arte di edificare. Manuali in Italia 1750-1950)*, Rome, BeMa, 1993.
- [2] Benvenuto E., *The historical developments of science of constructions*, Sansoni (ed), The Sahara and the Nile: 21-35. Rome, Italy, 1981.
- [3] Villard de Honnecourt (XIII<sup>th</sup> century) *Le carnet, f.28*, Paris, France, free available on <http://classes.bnf.fr/villard/feuillelet/index.htm>.
- [4] Ottoni F., *The long story of domed structures. Historical notes on stability, between debate and experimentation, (La lunga vicenda delle fabbriche cupolate. Note storiche sulla stabilità, tra dibattito e sperimentazione)*, PhD Thesis, Dept. of Civil Engineering and Architecture, Parma, Italy, 2009.
- [5] Giuffrè A., *Lectures on historical masonry mechanics (Lecture sulla Meccanica delle murature storiche)*, Edizioni Kappa, Rome, Italy, 1991, pp. 69-85.
- [6] Huerta S., *Galileo was wrong: the geometrical design of masonry arches*, in Nexus Network Journal, 2006, vol. 8, n.2, pp. 25-51.
- [7] Milani G.B., *Masonry skeleton (L'ossatura muraria)*, C. Crudo, Torino, Italy, 1910.
- [8] Heyman J., *The stone skeleton*, in Int J. Solid structures, 2, 1966, 249-279.
- [9] Di Pasquale S., *Art of construction between knowledge and science*, Marsilio (ed), Venice, Italy, 1996.
- [10] Couplet P., *De la pousse des voutes*, Histoire de l'Academie Royale des Sciences, Paris, France, 1729.

- [11] Heyman J., *The safety of masonry arches*, Proc. Inst. Civ. Eng. University of Cambridge, Cambridge, England, 1980.
- [12] Blasi C. Bianchini L., *Hagia Sophia: geometry*, in Hagia Sophia Surveying Project Conference, March 20, 2001.
- [13] Nelli G.B., Sgrilli B.S., *Descrizione e studi dell'insigne fabbrica di S. Maria del Fiore*, Metropolitana Fiorentina, Firenze, 1733.
- [14] Galluzzi P., *Le colonne "fesse" degli Uffizi e gli "screpoli" della Cupola*, Annali Ist. e Museo di Storia della Scienza, Firenze, II, n. 1, 1977.
- [15] Le Seur T., Jacquier F., Boscovich G., *Parere de' tre matematici sopra I Danni che si sono trovati nella cupola di San Pietro sul fine dell' anno 1742, dato per ordine di N.S. Benedetto XIV*, Roma, 1742.
- [16] Poleni, G., *Memorie istoriche della Gran Cupola del Tempio Vaticano*. Padova, Italy, 1748.
- [17] Rondelet J. B., *Mémoire historique sur le dôme du Panthéon Français, divisé en quatre parties*, du Pont Imprimeur-Libraire, Parigi, 1797.

---

\* Department of Civil Engineering and Architecture, Parma University, Parma, Italy

---

## Abstract

Aim of this paper is to show the potentiality of the empiricism in the process of ancient buildings structural analysis, particularly referred to domes. Fundamental historical debate have been considered Numerical models, even very precise and complex, can hardly describe the real behaviour of masonry ancient building. Only through a path from the historical debate on stability of ancient structures we can finally reach the final definition of their mechanical behaviour, up to the collapse prefiguration.

A reappraisal of this type of analysis empiric-experimental, which for centuries has been the centre of architectural books and manuals, is really desirable even today, even if we have calculation and numerical instruments definitely more efficient than in the past. This type of analysis rests one of the most important for the study of the ancient buildings complexity, confirming that the qualitative identification, often, gives results more suitable than the numerical ones. In this paper, an analysis of some historical debates on domes stability are presented, which have represented as many instruments for the solution of the experimental case of a XVII century masonry dome. Only a fusion of empiricism and numerical model has allowed to confirm the historical solution to the dome primeval problem: its ineradicable and secular thrust.

## Streszczenie

Referat przedstawia badania empiryczne w procesie analizy statycznej historycznych budowli, w szczególności kopuł. Dokonano przeglądu fundamentalnych dysput historycznych na ten temat. Modele numeryczne, nawet bardzo dokładne i złożone, nie opisują adekwatnie rzeczywistego zachowania się historycznych budowli murowanych. Tylko poprzez prześledzenia historycznych dysput dotyczących stabilności dawnych budowli można ostatecznie ustalić ich mechaniczne zachowanie od momentu powstania aż do warunków prowadzących do ich zawalenia się.

Uwzględnienie tego typu empiryczno-doświadczalnych analiz, które od wieków stanowiły główną treść książek i podręczników z dziedziny architektury jest pożądane nawet dzisiaj, kiedy dysponujemy bardziej wydajnymi narzędziami obliczeniowymi i numerycznymi. Ten rodzaj analizy jest niezbędny w przypadku badania złożonych budowli historycznych, potwierdzając słuszność stwierdzenia, że identyfikacja jakościowa często daje lepsze rezultaty niż badania numeryczne. W referacie przedstawiono analizę historycznych dysput dotyczących stabilności kopuł, które dostarczyły wiele narzędzi umożliwiających rozwiązanie przypadku kopuły murowanej z XVII wieku. Tylko dzięki połączeniu badań empirycznych i modelu numerycznego udało się potwierdzić słuszność historycznego rozwiązania odwiecznego problemu zachowania kopuł.