

Jerzy Jasieńko*, Tomasz Nowak*, Piotr Rapp**

Analiza pracy statycznej belek drewnianych wzmocnionych taśmami CFRP

Analysis of static work of wooden beams strengthened with CFRP strips

1. Wprowadzenie

Potrzeba wzmocnienia lub naprawy belek drewnianych może wynikać z wielu przyczyn, m.in. destrukcyjnych działań otoczenia (pleśni, grzybów i owadów), uszkodzeń mechanicznych lub zwiększenia obciążeń konstrukcji.

Rozwój inżynierii materiałowej sprawił, że coraz częściej do wzmocniania wykorzystywane są kompozycje klejowe na bazie żywicy epoksydowej oraz kompozyty zbrojone włóknami – FRP (Fibre Reinforced Polymers).

Metody wzmocniania konstrukcji drewnianych z zastosowaniem kompozycji na bazie żywic epoksydowych, służące zarówno do wzmocnień strukturalnych przekrojów jak i do wytwarzania połączeń zespalających element wzmocniający z elementem wzmocnianym przedstawiono m.in. w pracach [1-4].

W problematyce utrzymania i konserwacji konstrukcyjnych elementów drewnianych w obiektach zabytkowych uwzględnia się nie tylko stan techniczny elementu, ale ponadto wartość historyczną (artystyczną i kulturową) obiektu jako całości wraz z jego detalem zdobniczym, występującym często w postaci snycerki i polichromii. Zaproponowane w pracy metody mogą być wykorzystane w pracach konserwatorskich. Wprowadzenie taśm CFRP do wnętrza przekroju drewnianego pozwala na zachowanie pierwotnego kształtu i wyglądu elementu. Ogranicza to również możliwość delaminacji połączenia klejowego „taśma-drewno” [5].

1. Introduction

The need to strengthen or repair wooden beams may result from many causes, amongst other destructive attack from the surroundings (mould, fungi and insects), mechanical damages or increase in the load of the construction.

Development of material engineering made the use of glue compositions on the basis of epoxy resin and fiber reinforced composite materials – FRP (Fiber Reinforced Polymers) for strengthening purposes more and more frequent.

Methods of strengthening of wooden constructions with the use of compositions on the basis of epoxy resins, which are applied both for structural strengthening of sections as well as for making joining connections of the strengthening element with the strengthened element have been presented amongst other in works [1-4].

When the problem of maintenance and conservation of constructional wooden elements in antique objects is concerned, it is not only technical condition of the element, but moreover the historical value (artistic and cultural) of object as the whole, together with its decorative details, which are often in the form of wood-carving and polychromy, that are taken into account. In this study methods have been proposed which can be used in conservator's works. Introducing CFRP strips to the interior of a wooden section allows preserve its original shape and the appearance of the element. This also limits the possibility of delamination of the glued connection 'strip-wood' [5].

2. Badania doświadczalne

2.1. Przedmiot i metodyka badań

Badania przeprowadzono w laboratorium Instytutu Budownictwa Politechniki Wrocławskiej. Przedmiotem badań były ok. stuletnie drewniane belki stropowe wzmocnione na całej długości (poza serią belek F, gdzie zastosowano inny sposób wzmocnienia) taśmami CFRP. W programie badawczym zaproponowano wykorzystanie taśm węglowych do wzmocnienia i odtworzenia nośności belek z defektami takimi jak: korozja biologiczna, skręt włókien, pęknięcia drewna itp.

Belki w skali technicznej o długości 4000 mm i wymiarach przekroju 120×220 mm zostały swobodnie podparte na obu końcach. Belki o rozpiętości w osiach podpór 3800 mm obciążono symetrycznie dwupunktowo siłami skupionymi (rys. 1).

Badaniom poddano 18 starych ok. stuletnich belek sosnowych (serie A, B, C, D, E, F) oraz 3 belki sosnowe z drewna nowego (seria G) – rys. 2. Belki serii A i G nie były wzmocnianie i stanowiły

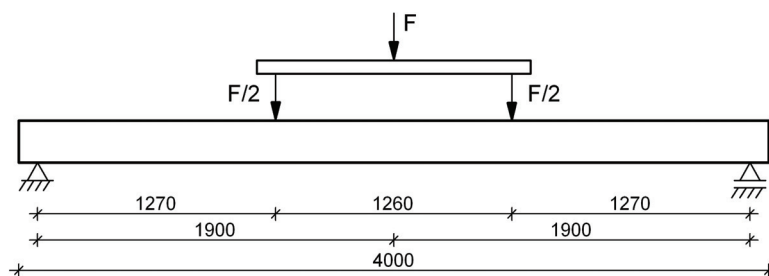
2. Experimental investigations

2.1. Object and methodology of investigations

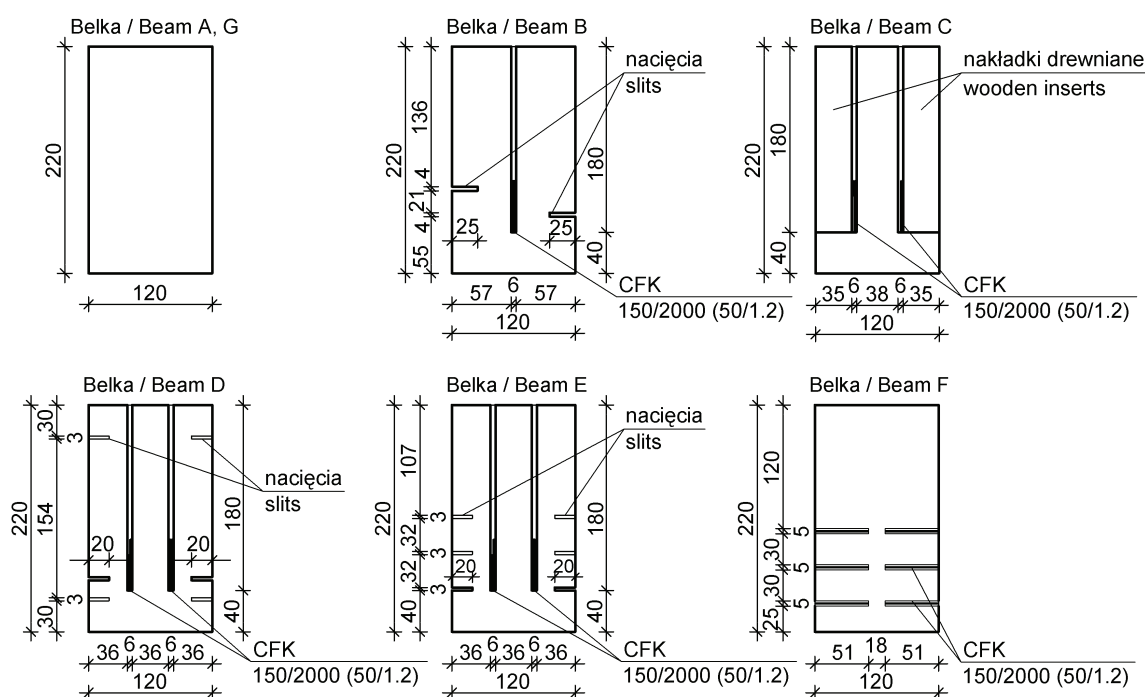
Investigations were conducted in the laboratory of The Institute of Building Engineering of Wrocław University of Technology. The object of investigations were hundred-year-old wooden ceiling beams, strengthened on the whole length with CFRP strips (except for the series of beams F, where different way of strengthening was applied). In the program of investigation it was proposed to use of carbon fiber strips for strengthening and reproducing the carrying capacity of beams with such defects as: biological corrosion, slope of grain, shake.

In the technical scale of investigation the beams of 4000 mm in length and dimensions of the section 120×220 mm were freely supported on both ends. Beams of 3800 mm in span between the axes of supports were loaded symmetrically in two points with concentrated forces (fig. 1).

The investigations were carried out on 18 about hundred-year-old pine beams (series A, B, C, D, E, F) and 3 pine beams made from new wood



Rys. 1. Schemat obciążenia i wymiary badanych belek, [mm]
Fig. 1. Loading configuration and dimensions of tested beams, [mm]



Rys. 2. Przekroje poprzeczne badanych belek, [mm]
Fig. 2. Cross sections of tested beams, [mm]

poziom odniesienia dla oceny zmian w stosunku do belek wzmacnianych.

Do wzmocnienia zastosowano taśmy S&P Lamelle CFK (tab. 1) wklejone przy użyciu kleju na bazie żywicy epoksydowej S&P Resin 55, przeznaczonego do mat kompozytowych (ze względu na konsystencję).

(series G) – fig. 2. The beam of the series A and G were not strengthened and they made up the level of reference for the assessment of changes in relation to the beams strengthened.

Strengthening of the beams was made with strips of S&P Lamelle CFK (table 1) inserted with the use of glue on the basis of epoxy resin S&P Resin 55, designed for composite mats (because of its consistency).

Tab. 1. Dane techniczne zastosowanych taśm CFRP
Technical data of applied CFRP strip

Rodzaj taśmy Kind of strip	Szerokość/wysokość taśmy Strip width/breadth b [mm]	Grubość taśmy Strip thickness t [mm]	Moduł Younga Young's modulus E [GPa]	Wytrzymałość na rozciąganie Tensile strength f_t [MPa]
CFK S&P 150/2000	50	1.2	165	2800

Do rejestracji wyników użyto komputera PC oraz wielokanałowego systemu pomiarowego UPM 100 firmy Hottinger Baldwin Messtechnik.

Podczas badania rejestrowano:

- wartość siły obciążającej - za pomocą zestawu komputerowego,
- przemieszczenie belki w środku oraz na podporach – czujniki indukcyjne W50 TS,
- odkształcenia w drewnie – tensometry elektrooporowe typu RL 300/50,
- odkształcenia w taśmie CFRP – tensometry elektrooporowe typu RL 120/20.

2.2. Wyniki badań

Wzrost nośności badanych belek wzmacnianych taśmami CFRP wyniósł od 21% dla belek serii F do nieco ponad 79% dla belek serii D [6-9].

W tablicy 2 przedstawiono wartości sił niszczących dla belek serii A i C. Wzrost nośności dla belek serii F w stosunku do belek serii A (belek referencyjnych – niewzmocnionych) wyznaczono wg wzoru (1).

$$\Delta F_u = \frac{F_{u,C} - F_{u,A}}{F_{u,C}} \cdot 100\% \quad (1)$$

gdzie: F_u – wartość siły niszczącej dla poszczególnych serii belek.

The results of tests were registered with the use of a PC computer and a multi-channel measurement system UPM 100 made by firm Hottinger Baldwin Messtechnik.

During the tests the following were recorded:

- the value of loading force - using the computer set,
- the dislocation of the beam in the centre and on the supports – inductive sensors W50 TS,
- the deformation in the wood – electro-resistance strain gauges of type RL 300/50,
- the deformation in the CFRP strip – electro-resistance strain gauges of type RL 120/20.

2.2. Results of investigations

The increase in carrying capacity of studied beams strengthened with CFRP strips was from 21% for the beams in the series F to somewhat above 79% for the beams in the series D [6-9].

The values of ultimate forces for the beams in the series A and C were introduced in table 2. The increase in carrying capacity for the beams in series F in relation to the beams in series A (reference beams – non-strengthened) has been calculated with formula (1).

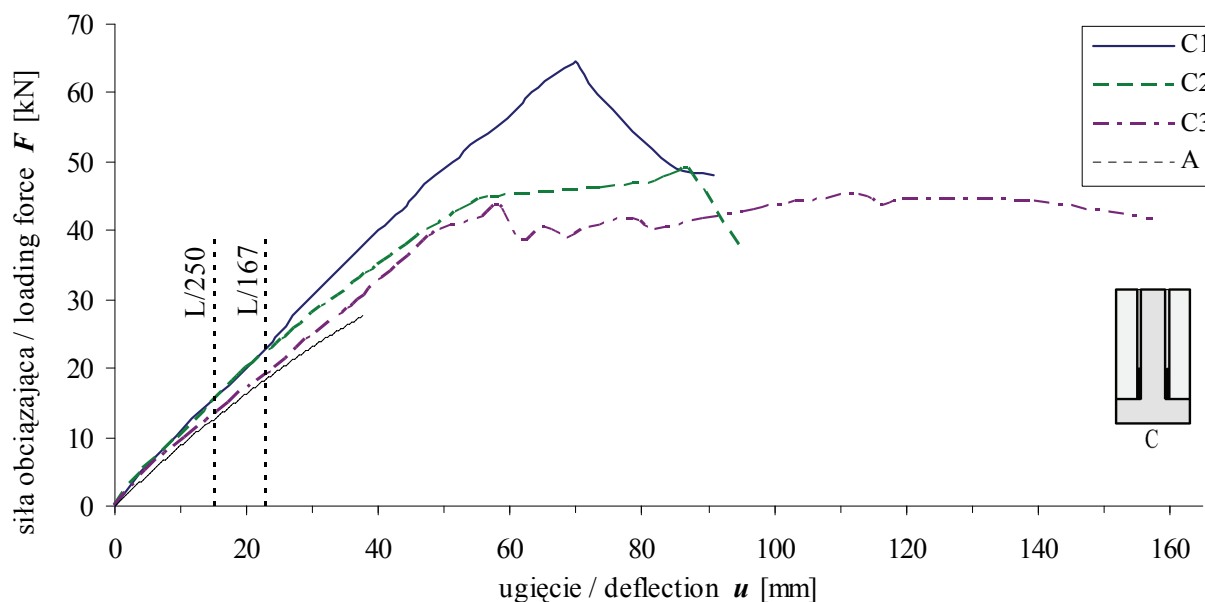
wherein: F_u – the value of ultimate force for individual series of beams.

Tab. 2. Wartości siły niszczącej badanych belek serii A i C
Ultimate force values for tested beams in series A and C

		Belka Beam					
		A1	A2	A3	C1	C2	C3
siła niszcząca ultimate force	F_u [kN]	27.02	30.69	35.01	64.20	49.00	45.25
średnia siła niszcząca mean ultimate force	$F_{u,av}$ [kN]	30.91			52.82		
wzrost nośności increase in load capacity	ΔF_u [%]	–			70.9		

Na przedstawionych ścieżkach równowagi statycznej (rys. 3) pokazano, dla porównania, linię trendu (wyznaczoną metodą najmniejszych kwadratów) dla trzech przebadanych belek świadków A. Liniami pionowymi zaznaczono graniczne ugięcie $L/250$ dla stropów i $L/167$, czyli powiększone o 50% dla obiektów starych (historycznych), remontowanych [10].

On presented static equilibrium paths (fig. 3), the line of trend was shown for comparison (as determined by the least squares method) for three reference sample beams A that underwent examination. The boundary deflections $L/250$ for floors and $L/167$, which is increased by about 50% for old (historical) repaired objects, were marked with vertical lines [10].



Rys. 3. Ścieżki równowagi belek serii C
Fig. 3. Equilibrium paths for beams of series C

3. Analityczna weryfikacja wyników badań

W modelu zastępczych charakterystyk przekroju wzmocnienie jest uwzględnione przez zwiększenie wymiarów geometrycznych przekroju poprzecznego belki drewnianej.

Przystępując do analizy należy zwrócić uwagę na to, że drewno, podobnie jak wszelkie materiały drewnopochodne, przejawia własności nie tylko sprężyste ale i plastyczne oraz lepkosprężyste. W belkach dwumateriałowych na skutek odmiennych właściwości reologicznych użytych materiałów może dochodzić do redystrybucji naprężeń w przekroju [11]. Przy wyznaczaniu charakterystyk zastępczych wykorzystuje się jedynie sprężyste właściwości materiałów. Poniżej przedstawiono analizę teoretyczną, weryfikując przy jej pomocy wyniki badań uzyskane dla belek serii C. Moduł sprężystości drewna równy 7600 MPa został przyjęty na podstawie przeprowadzonych badań materiałowych.

Zastępcza szerokość b_{zast} drewna przypadająca na jedną taśmę:

$$b_{zast} = t_f \cdot \frac{E_f}{E_d} \quad (2)$$

3. Analytic verification of the results of investigations

In the model of equivalent characteristics of the section, the strengthening is considered by increasing geometrical dimensions of the transverse section of a wooden beam.

When attempting to the analysis it should be pointed out that wood, similarly to all materials of wooden origin, manifests not only elastic properties but also plastic and viscoelastic. In two-material beams, as the consequence of different rheological properties of the used materials there may occur redistribution of stresses in the section [11]. When the equivalent characteristics are determined, only elastic properties of materials are used. The theoretical analysis, to verify the results of investigations obtained for the beams of C series has been presented below. Modulus of elasticity for wood equal 7600 MPa was accepted on the basis of carried out material investigations.

The equivalent width b_{zast} of the wood per one strip:

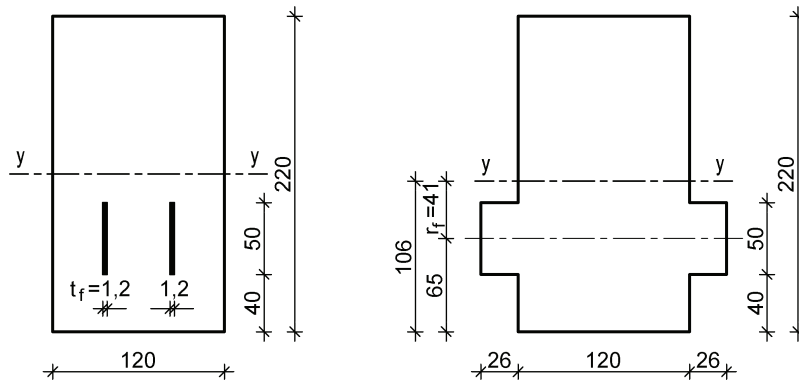
gdzie: t_f – grubość taśmy FRP, E_f – moduł sprężystości taśmy FRP, E_d – moduł sprężystości drewna.

Dla belki C:

wherein: t_f – thickness of the FRP strip, E_f – modulus of elasticity of the strip FRP, E_d – modulus of elasticity of the wood.

For the beam C:

$$b_{zast} = 1,2 \text{ mm} \cdot \frac{165 \text{ GPa}}{7,6 \text{ GPa}} = 26 \text{ mm}$$



Rys. 4. Przekrój zastępczy belki C
Fig. 4. Equivalent cross-section of beam C

Moment bezwładności przekroju litego:

Moment of inertia for a cross-section of monolithic material:

$$I_y = 10648 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

Moment bezwładności przekroju zastępczego:

Moment of inertia for an equivalent cross-section:

$$I_{y,zast} = 11181 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

Zakłada się, że odkształcenia w drewnie i taśmie są jednakowe (w przybliżeniu). Stąd:

It is assumed that strains in the wood and in the strip are equal (approximately). Therefore:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_f = E_f \cdot \varepsilon \\ \sigma_d = E_d \cdot \varepsilon \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\sigma_f}{\sigma_d} = \frac{E_f}{E_d} \quad (3)$$

Naprężenie w taśmie przeliczone na naprężenie w drewnianym przekroju zastępczym:

Then the stress in the strip re-calculated to the stress in the equivalent cross-section of wood:

$$\sigma_{d,zast} = \sigma_f \cdot \frac{E_d}{E_f} \quad (4)$$

Moment zginający (belka obciążona jak na rys. 1):

Bending moment (beam loaded as in fig. 1):

$$M = \frac{F \cdot l}{6} \quad (5)$$

Naprężenie w przekroju zastępczym:

Stress in the equivalent cross-section:

$$\sigma_{zast} = \frac{M \cdot r_f}{I_{zast}} \quad (6)$$

Charakterystyka sztywności belki:

Rigidity characteristics of the beam:

$$F = k \cdot u \Rightarrow k = \frac{F}{u} \quad (7)$$

Dla belki zastępczej:

Dla belki zastępczej:

$$k_{obl} = \frac{F}{u} = \frac{1296}{23} \cdot \frac{E_d \cdot I_{y,zast}}{l^3} \quad (8)$$

Dla belki C:

For the beam C:

$$k_{obl} = \frac{1296}{23} \cdot \frac{E_d \cdot I_{y,zast}}{l^3} = \frac{1296}{23} \cdot \frac{0,76 \cdot 11181 \cdot 10^4}{3800^3} = 0,87 N/mm$$

W tabelicy 3 przedstawiono wyniki analizy naprężeń w taśmie przeliczonych na naprężenia w drewnianym przekroju zastępczym (wzór 4) oraz naprężeń w przekroju zastępczym (wzór 6) dla belek serii C. Ponadto zaprezentowano charakterystyki sztywności uzyskane w badaniach (wzór 7) i na podstawie charakterystyk zastępczych przekroju (wzór 8). Analizę przeprowadzono dla każdego przedstawionego w [9] poziomu obciążenia. Różnice naprężeń pomiędzy wynikami analitycznymi a wartościami uzyskanymi na podstawie badań obliczono na podstawie wzoru (9). Analogicznie uzyskano różnice sztywności.

The analysis of stress in the strip, re-calculated to the stress in the equivalent wooden cross section (formula 4) and the stress in the equivalent cross-section (formula 6) for the beams of series C have been presented in table 3. Moreover, the rigidity characteristics obtained in the investigations (example 7) and obtained on the basis of the equivalent characteristics of cross sections (formula 8) have been presented. The analysis was carried out for each level of applied load presented in [9]. The differences between the stress obtained from analytic results and that obtained on the basis of investigations were calculated on the basis of formula (9). The differences of rigidity have been obtained similarly.

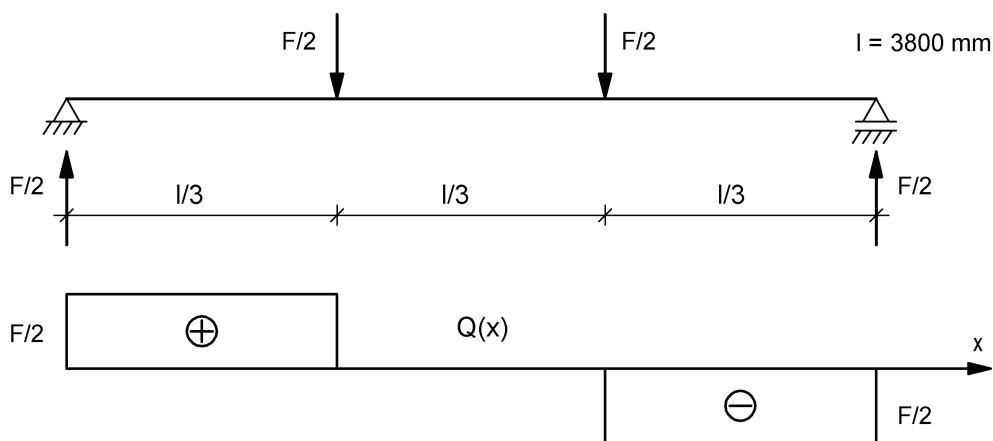
$$\Delta\sigma = \left| \frac{\sigma_{d,zast} - \sigma_{zast}}{\sigma_{d,zast}} \right| \cdot 100\% \quad (9)$$

Tab. 3. Porównanie wyników badań z wynikami analitycznymi, belki serii C
Comparison of the results of experiments with the analytical results, beams of series C

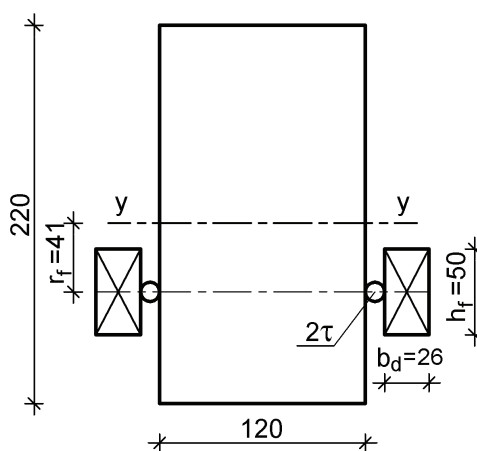
Belka	Siła F [kN]	Naprężenia normalne w taśmie (badania) σ_f [MPa]	Naprężenia normalne zastępcze (wzór 4) $\sigma_{d,zast}$ [MPa]	Naprężenia normalne zastępcze (wzór 6) σ_{zast} [MPa]	Różnica naprężeń $\Delta\sigma$ [%]	Ugięcie (badania) u [mm]	Współczynnik sztywności k [kN/mm]	Różnica sztywności Δk [%]
Beam	Force F [kN]	Normal stress in the strip (experiment) σ_f [MPa]	Equivalent normal stress (formula 4) $\sigma_{d,zast}$ [MPa]	Equivalent normal stress (formula 6) σ_{zast} [MPa]	Difference in stresses $\Delta\sigma$ [%]	Deflection (experiment) u [mm]	Coefficient of rigidity k [kN/mm]	Difference in rigidity Δk [%]
C1	10,13	42,50	1,96	2,35	22,0	9,37	1,08	19,9
	20,11	88,87	4,09	4,67	13,8	19,80	1,02	14,8
	30,15	136,75	6,30	7,00	10,1	29,68	1,02	14,8
	40,07	184,80	8,51	9,31	1,3	40,07	1,00	13,4
	50,05	236,04	10,87	11,62	2,7	51,17	0,98	11,5
	60,01	298,48	13,75	13,94	0,3	63,26	0,95	8,7
C2	9,98	43,09	1,98	2,32	24,3	9,59	1,04	16,8
	20,06	90,72	4,18	4,66	19,3	20,09	1,00	13,3
	30,00	134,69	6,20	6,97	11,7	33,05	0,91	4,6
	40,00	181,46	8,36	9,29	7,1	47,4	0,84	2,6
	44,92	204,88	9,44	10,43	3,4	58,68	0,77	13,1
C3	10,00	41,16	1,90	2,32	25,4	10,68	0,94	7,5
	20,18	95,59	4,40	4,69	29,1	24,15	0,84	3,6
	30,00	150,36	6,93	6,97	31,0	36,96	0,81	6,7
	35,09	178,25	8,21	8,15	31,4	42,79	0,82	5,6
	39,97	209,66	9,66	9,28	32,4	49,14	0,81	6,4

Naprężenia styczne w spoinie można wyznaczyć na podstawie wykresu sił tnących (rys. 5) oraz ideowego przekroju zastępczego belki (rys. 6).

Tangential stresses in the glued joint may be determined from the graph of shearing forces (fig. 5) and conceptual equivalent cross-section of the beam (fig. 6).



Rys. 5. Wykres sił tnących w próbie czteropunktowego zginania
 Fig. 5. Graph of shearing forces in the four-point bending test



Rys. 6. Ideowy przekrój zastępczy belki C
 Fig. 6. Conceptual equivalent cross-section of the beam C

Naprężenia styczne w rozpatrywanym przekroju można zapisać wzorem:

$$\tau = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q \cdot S_f}{h_f \cdot I_{y,zast}} \quad (10)$$

gdzie:

wherein:

$$Q = \frac{F}{2} \quad (11)$$

$$S_f = A_f \cdot r_f \quad (12)$$

$$A_f = b_d \cdot h_f \quad (13)$$

Ostatecznie naprężenia styczne wyrażają się wzorem:

Finally the tangential stresses are expressed in the formula:

$$\tau = \frac{F \cdot A_f \cdot r_f}{4 \cdot h_f \cdot I_{y,zast}} \quad (14)$$

W tabelicy 4 przedstawiono porównanie naprężeń stycznych w belce C uzyskanych w badaniach doświadczalnych oraz naprężeń obliczonych na podstawie wzoru (14).

The comparison of the tangential stresses in the beam C obtained in experimental investigations and the stresses calculated on the basis of formula (14) have been presented in table 4.

Tab. 4. Porównanie wartości naprężeń stycznych w spoinie, belki serii C
Comparison of the value of tangential stresses in the joint, beams of series C

Belka <i>Beam</i>	Siła F [kN] <i>Force F</i> [kN]	Max naprężenie styczne w spoinie (uzyskane z badań) τ_{bad} [MPa] <i>Max tangential stress in the joint (experimental)</i> τ_{bad} [MPa]	Naprężenie styczne w spoinie wg wzoru (14) τ_{obl} [MPa] <i>Tangential stress in the joint according to formula (14)</i> τ_{obl} [MPa]	Procentowa różnica naprężeń $\Delta\tau$ [%] <i>Percentage difference in stresses</i> $\Delta\tau$ [%]
C1	10,13	0,027	0,024	11,3
	20,11	0,052	0,048	9,4
	30,15	0,081	0,072	12,6
	40,07	0,109	0,096	13,7
	50,05	0,136	0,119	13,7
	60,01	0,165	0,143	15,6
C2	10,13	0,027	0,024	11,3
	20,11	0,052	0,048	9,4
	30,15	0,081	0,072	12,6
	40,07	0,109	0,096	13,7
	50,05	0,136	0,119	13,7
C3	10,00	0,026	0,024	9,4
	20,18	0,052	0,048	9,2
	30,00	0,078	0,072	8,7
	35,09	0,104	0,095	9,4
	39,97	0,118	0,107	10,0

Maksymalne wartości naprężeń stycznych uzyskane w badaniach są wyższe od wartości obliczeniowych ze względu na nierównomierny przyrost siły (naprężeń normalnych) w taśmie. W miejscach, gdzie przyrost siły (naprężeń normalnych) w taśmie jest większy od teoretycznego, naprężenia styczne mają większą wartość. Różnice dla analizowanego modelu C są jednak dość nieznaczne i wynoszą ok. kilkunastu procent.

4. Modelowanie nieliniowych właściwości belek wzmocnionych

Analizując rozkłady naprężeń normalnych w przekrojach badanych belek stwierdzono, że po przekroczeniu przez momenty zginające pewnych wartości, oznaczonych jako M_{sp} , belki wzmocnione zachowują się w sposób fizycznie nieliniowy. Zaobserwowaną nieliniowość można określić jako nieliniowość słabą. W pracy [9], w sposób szczegółowy, przedstawiono model obliczeniowy umożliwiającą identyfikację nieliniowych właściwości belek wzmocnionych na podstawie wyników badań doświadczalnych. Poniżej przedstawiono podstawowe założenia tego modelu.

Przyjmuje się, że całkowite wyężnienie przekroju belki następuje po osiągnięciu przez moment zginający wartości granicznej M_{gr} . Jako miarę wyężnienia przekroju obciążonego momentem M w zakresie od 0 do M_{gr} przyjmuje się parametr α określony wzorem:

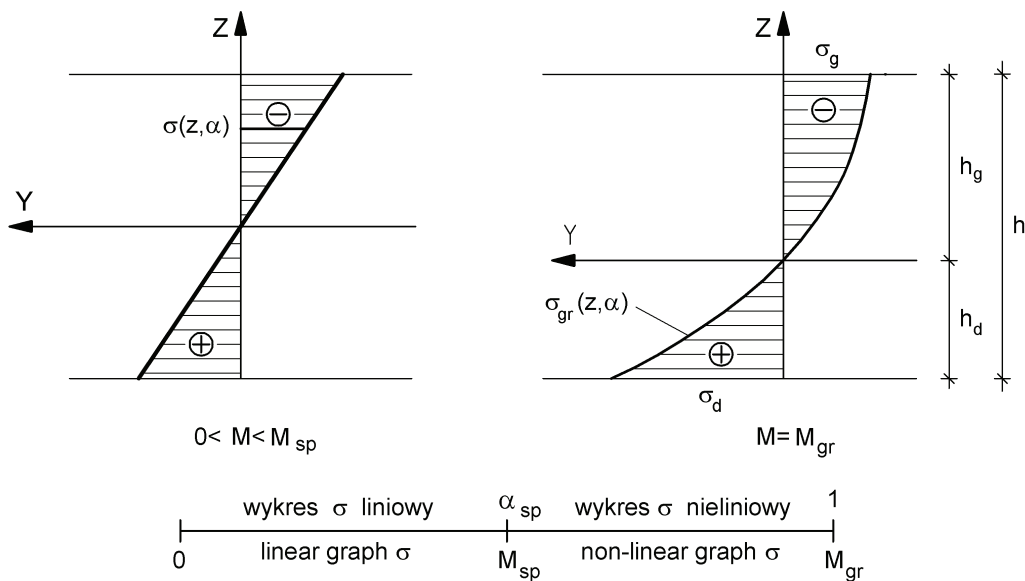
The maximum values of tangential stresses obtained in investigations are higher than the calculated values because of non-uniform increase in strength (normal stresses) in the strip. In the places where the increase in strength (normal stresses) in the strip is larger than the theoretical value, tangential stresses have larger value. However, the differences for the analyzed model C are insignificant enough and equal about a dozen or so percents.

4. Modeling of the non-linear properties of strengthened beams

Analyzing distributions of normal stresses in the sections of beams studied it was found out that after bending moments have exceeded certain values designed as M_{sp} , the strengthened beams behave in the physically non-linear way. One can qualify the observed nonlinearity as weak nonlinearity. In the work [9] a computational model enabling identification of non-linear properties of strengthened beams on the basis of the results of experimental investigations has been presented in a detailed manner. The basic foundations for that model have been presented below.

It is assumed that total effort of the section of the beam takes place after reaching the boundary value of the bending moment M_{gr} . The measure of effort of section put under load of the moment M , in the range from 0 to M_{gr} is expressed by parameter α defined by the formula:

$$\alpha = \frac{M}{M_{gr}} \quad (15)$$



Rys. 7. Wykresy naprężeń w drewnie, w zakresie liniowym i nieliniowym
Fig. 7. Graphs of stresses in wood, within the linear and non-linear range

Zgodnie z rys. 7, rozdzielając cały zakres pracy przekroju na część liniową i nieliniową, naprężenie normalne w przekroju belki określa się wzorem:

$$\sigma(z, \alpha) = \begin{cases} \sigma_{sp}(z, \alpha_{sp}) & \text{dla } 0 < \alpha \leq \alpha_{sp} \\ \sigma_{sp}(z, \alpha_{sp}) \cdot \frac{1-\alpha}{1-\alpha_{sp}} + \frac{\alpha-\alpha_{sp}}{1-\alpha_{sp}} \cdot \sigma_{gr}(z) & \text{dla } \alpha_{sp} < \alpha \leq 1 \end{cases} \quad (16)$$

Dla dowolnej wartości parametru α , gdzie $0 \leq \alpha \leq 1$, związek między rozkładem odkształceń $\varepsilon(z, \alpha)$ i rozkładem naprężeń $\sigma(z, \alpha)$ przyjmuje się w postaci:

$$\sigma(z, \alpha) = K_\alpha \cdot \varepsilon(z, \alpha) \quad (17)$$

gdzie K_α oznacza współczynnik zależny od parametru α . Współczynnik K_α wyznacza się z warunku równowagi momentów:

$$M_\alpha = \int \sigma(z, \alpha) y dA = K_\alpha \int \varepsilon(z, \alpha) z dA \quad (18)$$

Poza warunkiem równowagi momentów spełniony musi być również warunek równowagi naprężeń wzdłuż osi y :

$$\int_0^h \sigma(z, \alpha) dz = 0 \quad (19)$$

Dla obciążeń M_α rosnących od zera do pewnej wartości M_{sp} (rys. 7) materiał pracuje w zakresie liniowo sprężystym. Wtedy współczynnik K_α ma stałą wartość i jest współczynnikiem sprężystości materiału w zakresie liniowym.

According to fig. 7, dividing the whole range of work of the section on the linear and non-linear parts, the normal stress in the section of the beam is defined by the formula:

For the any value of parameter α , where $0 \leq \alpha \leq 1$ the relationship between the distribution of the strains $\varepsilon(z, \alpha)$ and the distribution of stresses $\sigma(z, \alpha)$ is assumed in the form:

wherein K_α means the coefficient dependent on the parameter α . The coefficient K_α is determined from the condition of equilibrium of moments:

In addition to the condition of equilibrium of moments there also must be fulfilled the condition of equilibrium of stresses along the axis y :

For loads M_α increasing from zero to certain value M_{sp} (fig. 7) the material works in the linear-elastic range. Then coefficient K_α has constant value and it is the coefficient of elasticity of the material in the linear range.

Dla $\alpha > \alpha_{sp}$ materiał belki wzmocnionej zachowuje się w sposób nieliniowy. Wtedy współczynnik K_α jest zmienny względem parametru α i jest mniejszy od E_{sp} . Dla $\alpha_{sp} < \alpha \leq 1$ współczynnik K_α wyznaczony ze wzoru (18) nie jest modułem sprężystości, lecz jest parametrem, który można traktować jako pewną miarę zmniejszenia sztywności przekroju w zakresie pracy nieliniowej.

5. Podsumowanie

Procentowe różnice naprężeń i sztywności – dla belek serii B, C, D, E [9] – wahają się na poziomie 20%. We wszystkich analizowanych belkach sztywność uzyskana w badaniach jest wyższa niż teoretyczna.

Stwierdzono, że nacięcia o wymiarach zastosowanych w badaniach nie mają wpływu na wartości i rozkład naprężeń przy zginaniu. Pęknięcia skurczowe nie zmniejszają w istotny sposób nośności belki zginanej, wpływają za to na stan naprężeń stycznych w drewnie.

W rzeczywistości nie ma wyselekcjonowanego drewna, pomimo metod sortowania, natomiast uzyskanie dobrej zgodności dla drewna niewyselekcjonowanego (o różnym stopniu nasilenia wad drewna) pozwala przyjąć, że metoda może być stosowana w praktyce. Należałoby oczywiście przeanalizować licznější próbę każdej z serii by móc stwierdzić jednoznacznie, że można odpowiedzialnie stosować zastępczy przekrój belki do analizy naprężeń i sztywności, również dla belek z poziomymi pęknięciami skurczowymi.

For $\alpha > \alpha_{sp}$ the material of the strengthened beam behaves in a non-linear way. Then the coefficient K_α is changing in relation to the parameter α and it is lower than E_{sp} . For $\alpha_{sp} < \alpha \leq 1$ the coefficient K_α determined as in formula (18) is no longer the modulus of elasticity, but it becomes a parameter which can be treated as certain measure of decrease in the rigidity of the cross-section in the range of non-linear work.

5. Conclusions

Differences of stresses and rigidity – for the beams of the series B, C, D, E [9] – expressed in percentages oscillate at the level 20%. In all analyzed beams rigidity obtained in investigations is higher than theoretical value.

It was found out that incisions having dimensions such as those applied in the investigations did not have any influence on the values and distribution of stresses when bending. Shrinkage shakes do not reduce in essential way the carrying capacity of the beam being bent, but they influence on the state of tangential stresses in wood, instead.

There is no sorted wood in the reality, in spite of the methods of sorting, however, the fact that good agreement was obtained in the results for the unsorted wood (of various extent of intensity of the defects in the wood) allows to accept that the method can be applied in practice. One should, of course, analyze more numerous tests for each series, in order to be able to say unambiguously that one can in a responsible manner apply the equivalent cross-section of the beam for the analysis of stresses and rigidity, also for the beams with horizontal shrinkage shakes.

Literatura • References

- [1] Bogacz W., Lis Z., Łodygowski T., Rapp P., *Badania i obliczenia belek drewnianych wzmocnionych wklejanymi taśmami z włókien węglowych (Investigations and calculations of wooden beams reinforced with inserted and glued strips from carbon fibers)*, Inżynieria i Budownictwo, 2007, No 10: 541-544.
- [2] Jasieńko J., *Połączenia klejowe i inżynierskie w naprawie, konserwacji i wzmocnieniu zabytkowych konstrukcji drewnianych. (Glued and engineering joints in repair, conservation and reinforcement of historical timber structures)*. Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław 2003.
- [3] Radford D.W., Van Goethem D., Gutkowski R.M., Peterson M.L., *Composite repair of timber structures*. Construction and Building Materials, 2002, 16(7): 417-425.
- [4] Van Gemert D., Vanden Bosch M., *Structural restoration of wooden beams by means of epoxy resin*. Materials and Structures, 1987, 20(3): 165-170.
- [5] Brunner M., Schnueriger M., *Timber Beams Strengthened by Attaching Prestressed Carbon FRP Laminates with a Graded Anchoring Device*. In: Proceedings of the International Symposium on Bond Behavior of FRP in Structures, Hong Kong, China, December 7-9, 2005: 465-471.
- [6] Jankowski L.J., Jasieńko J., Nowak T.P., *Experimental assessment of CFRP reinforced wooden beams by 4-point bending tests and photoelastic coating technique*, Materials and Structures, 2009 (in press): DOI 10.1617/s11527-009-9476-0.

- [7] Jasięńko J., Nowak T., *Strengthening of bent timber beams in historical objects*. In: Proceedings of the 16th IWC international conference and symposium: from material to structure. Mechanical behaviour and failures of the timber structures, Florence-Venice-Vicenza, 11–16 November 2007: CD-ROM.
- [8] Jasięńko J., Nowak T., Bednarz Ł., *Reinforcement of bent timber beams in historic buildings*, In: Proceedings of the International Conference on Protection of Historical Buildings, Prohitech 09, Rome, Italy, 21-24 June 2009: 325-330.
- [9] Nowak T., *Analiza pracy statycznej zginanych belek drewnianych przy użyciu CFRP. (Analysis of the static work of bent wooden beams reinforced with CFRP)*. Praca doktorska (PhD thesis), Politechnika Wroclawska 2007: <http://www.dbc.wroc.pl/publication/1778>.
- [10] Polska norma (Polish Standard) PN-B-03150:2000. *Konstrukcje drewniane. Obliczenia statyczne i projektowanie (Timber Structures - Structural analysis and design)*.
- [11] Plenzler R., *Redystrybucja naprężeń w zginanych elementach zespolonych z drewna i płyty pilśniowej (Stress redistribution in bent composite elements form Wood and fiberboard)*. In: Proceedings of Conference: Drewno i materiały drewnopochodne w konstrukcjach budowlanych, Szczecin-Świnoujście, 27-28 września 1999: 67-76.

* Politechnika Wroclawska, Wrocław, Polska
Wroclaw University of Technology, Wrocław, Poland

** Politechnika Poznańska, Poznań, Polska
Poznan University of Technology, Poznań, Poland

Streszczenie

W pracy przedstawiono wybrane wyniki badań zabytkowych drewnianych belek stropowych wzmocnianych taśmami kompozytowymi CFRP. Eksperyment przeprowadzono na elementach w skali technicznej. Przedstawiono ponadto analizę teoretyczną uzyskanych rezultatów oraz założenia własnego modelu teoretycznego opisującego pracę belek wzmocnionych z uwzględnieniem fizycznej nieliniowości materiału belki. Zaproponowana metoda wzmocniania belek drewnianych, polegająca na wklejaniu taśm CFRP do wnętrza przekrojów może być z powodzeniem zastosowana w pracach konserwatorskich.

Abstract

Selected results of investigations of antique wooden ceiling beams strengthened with composite material CFRP strips have been presented in the study. The experiment was carried out on elements in the technical scale. The theoretical analysis of the obtained results and the foundation for authors' own theoretical model describing the work of strengthened beams taking into consideration physical nonlinearity of the material of the beam has also been presented. The proposed method of strengthening of wooden beams, consisting in inserting CFRP strips to the interior of cross-sections, can be successfully applied in conservator's works.