CZASOPISMO TECHNICZNE M
WYDAWNICTWO POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

z. 1-M/2008
ISSN 0011-4561
ISSN 1897-6328

OLAF BAR*

DRGANIA WYMUSZONE KRĘPYCH BELEK POSADOWIONYCH NA PODŁOŻU SPRĘŻYSTYM

FORCED VIBRATIONS OF THICK BEAMS ON ELASTIC FOUNDATION

Streszczenie

W niniejszym artykule przeanalizowano drgania wymuszone krępej belki, posadowionej na sprężystym podłożu o charakterystyce liniowej. Rozważano dwa rodzaje wymuszających obciążeń harmonicznych: stałego wzdłuż osi belki i sinusoidalnie zmiennego. Przyjęto, że końce belki są swobodne. Zbadano przypadki, gdy częstości obciążenia zewnętrznego zmierzają (lub są równe) do częstości drgań własnych belki. Wykazano, że nie we wszystkich przypadkach zachodzi klasyczne zjawisko rezonansu.

Słowa kluczowe: *belka krępa, drgania, postacie drgań, rezonans, model Timoshenki*

Abstract

The paper presents the analysis of forced vibrations of a thick beam on the springy foundation with linear characteristic. Two types of harmonic forces has been considered: evenly distributed (along the beam) and sinusoidally distributed, on the assumption that the ends of the beam are free. The frequencies of the distributed forces have been close to natural frequencies of the beam. It has been proved that resonance does not occur in all natural frequencies.

Keywords: *thick beam, vibrations, resosonance, vibration forms, Timoshenko model*

* Mgr Olaf Bar, Katedra Informatyki i Metod Komputerowych, Wydział Matematyczno-Fizyczno-Techniczny, Akademia Pedagogiczna w Krakowie.

1. Wstęp

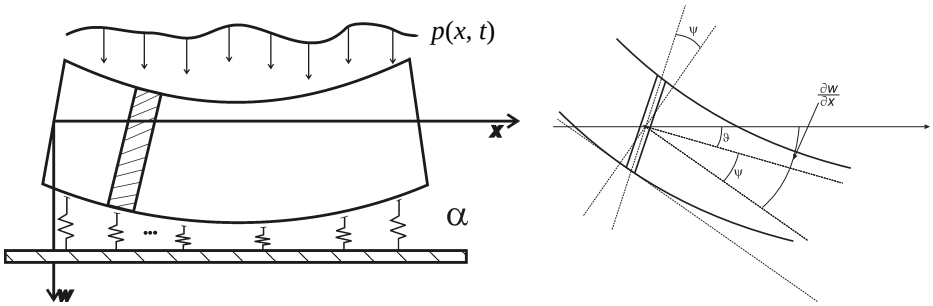
W wielu zagadnieniach inżynierskich mamy do czynienia z obiektami, w których stosunek szerokości do długości wykracza poza założenia modelu smukłego. Takie obiekty, zwane krępymi, dobrze opisuje model zaproponowany przez S. Timoshenkę. W modelu tym uwzględnione są oprócz drgań poprzecznych również spaczenia i obroty przekrojów belki. Istotą modelu jest potraktowanie przemieszczeń poprzecznych i kątów obrotu przekroju jako zmiennych niezależnych.

W artykule [1] autor skupił się na drganiach własnych krępej belki, wspartej na nieliniowym podłożu, ograniczając rozważania do swobodnego podparcia końców belki. Celem niniejszego artykułu było uzyskanie analitycznego opisu ruchu układu liniowego, zamodelowanego krępą belką o końcach swobodnych wspartą na podłożu sprężystym. Spodziewanym efektem jest uzyskanie rozwiązań w obszarach bliskich rezonansom.

2. Opis modelu

Badanym układem jest belka o przekroju kołowym, o długości l i o promieniu R, przy czym do analizy przyjęto R/l = 0,25. Rozłożone oddziaływanie sprężystego podłoża na belkę opisano zależnością liniowo-sprężystą o współczynniku proporcjonalności α. Założono przy tym, że ruch odbywa się w płaszczyźnie prostopadłej do podłoża i przechodzącej przez oś belki. Wymuszenie $p(x, t)$ działa na belkę w płaszczyźnie ruchu i ma rozkład ciągły.

Model układu przedstawiono na rysunku 1.



Rys. 1. Model układu i użyte współrzędne

Fig. 1. Model of the system and used coordinates

Równanie ruchu takiego układu można przedstawić (za: [3]) w następującej formie

$$
\begin{aligned}
&w_{xx} - \frac{k\rho}{G} w_{tt} = \vartheta_x + \frac{\alpha k}{GA} w - \frac{k}{GA} p(x,t) \\
&\vartheta_{xx} - \frac{\rho}{E} \vartheta_{tt} = -\frac{GA}{kEJ} (w_x - \vartheta)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

gdzie:

$w(x, t)$ – wychylenie poprzeczne,
η – kąt obrotu przekroju,
k – współczynnik geometryczny spaczenia; dla belki kołowej wynosi 10/9.

Pozostałe oznaczenia stałych materiałowych i geometrycznych są standardowe.

Warunki brzegowe dotyczą momentu M i siły tnącej T na końcach belki. Określają je zależności

$$T = -\frac{GA}{k}(w_x - \vartheta) \quad ; \quad T(0) = T(l) = 0 \ ; M = EJ\vartheta_x \quad ; \quad M(0) = M(l) = 0 \tag{2}$$

3. Analiza drgań własnych

Poszukujemy rozwiązań równania (1) przy założeniu, że $p(x, t) = 0$ w postaci

$$w(x,t) = X_1(x)\sin(\omega t) \qquad \vartheta(x,t) = X_2(x)\sin(\omega t), \text{ gdzie } X_1(x) = C_1 e^{px} \qquad X_2(x) = C_2 e^{px}$$

Takie podstawienie sprowadza (1) do układu równań zwyczajnych (w dziedzinie położenia) dla funkcji $X_1(x)$ i $X_2(x)$

$$\begin{aligned} X'_1 + \left(\frac{k\rho\omega^2}{G} - \frac{\alpha k}{GA}\right)X_1 &= X'_2 \\ X'_2 + \frac{\rho\omega^2}{E}X_2 &= -\frac{GA}{kEJ}(X'_1 - X_2) \end{aligned} \tag{3}$$

Równanie charakterystyczne dla (3) przyjmuje postać

$$\left(p^2 + \frac{k\rho\omega^2}{G} - \frac{\alpha k}{GA}\right)\left(p^2 + \frac{\rho\omega^2}{E} - \frac{GA}{kEJ}\right) + \frac{GA}{kEJ}p^2 = 0 \tag{4}$$

Postać funkcji $X_1(x)$ i $X_2(x)$ jest zdeterminowana przez typ rozwiązań równania (4), wyznaczającego parametr p w zależności od ω^2.

Wyróżnik Δ dwukwadratowego równania (4) zmienia znak z (–) na (+) dla $\omega^2 = 5{,}56 \times 10^6$. Częstość tę oznaczono przez ω_2^2 (numeracja indeksem 2 zostanie wyjaśniona w dalszej części artykułu). Punkt ten odpowiada zerowaniu się członu $\left(\frac{k\rho\omega^2}{G} - \frac{\alpha k}{GA}\right)$ w równaniu (4). Wprowadzono również parametr $\omega_{gr}^2 = 4{,}1 \times 10^8$, przy którym człon $\left(\frac{\rho\omega^2}{E} - \frac{GA}{kEJ}\right)$ z równania (4) przyjmuje wartość 0. Zarówno ω_2^2, jak i ω_{gr}^2 okazują się być granicami obszarów związanych z różnymi typami rozwiązań równania (4). Zestawienie tych obszarów przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1

Klasyfikacja typów rozwiązań równania charakterystycznego (4)

Oznaczenie obszaru	Zakres częstości	Dziedzina rozwiązań	Postać rozwiązań p_1, p_2, p_3, p_4
I	$\omega^2 < \omega_2^2$	$p_1^2, p_2^2 \in Z$	$u+iv, u-iv, -u+iv, -u-iv$
I/II	$\omega^2 = \omega_2^2$	$p_1^2 = 0, p_2^2 < 0$	$0,\ 0,\ ir_3,\ -ir_3$
II	$\omega_2^2 < \omega^2 < \omega_{gr}^2$	$p_1^2 > 0, p_2^2 < 0$	$r_1,\ -r_1,\ ir_3,\ -ir_3$
II/III	$\omega^2 = \omega_{gr}^2$	$p_1^2 = 0, p_2^2 < 0$	$0,\ 0,\ ir_3,\ -ir_3$
III	$\omega^2 > \omega_{gr}^2$	$p_1^2 < 0, p_2^2 < 0$	$ir_1,\ -ir_1,\ ir_3,\ -ir_3$

Rozwiązania układu równań (3) zapiszmy w formie

$$X_j(x) = c_{j1}e^{p_1x} + c_{j2}e^{p_2x} + c_{j3}e^{p_3x} + c_{j4}e^{p_4x};\ j = 1,2 \tag{5}$$

Ze względu na to, że układ ten jest jednorodny, można wyznaczyć stosunki $c_{2n}/c_{1n}, (n = 1, \ldots, 4)$, oznaczone dalej przez $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$. Spełniają one (w obszarze II)[1] zależności

$$\frac{c_{2n}}{c_{1n}} = p_n + \frac{k\rho\omega^2}{Gp_n} = \lambda_n;\ \lambda_1 = r_1 + \frac{k\rho\omega^2}{Gr_1} \quad \lambda_2 = -\lambda_1 \quad \lambda_3 = r_3 - \frac{k\rho\omega^2}{Gr_3} \quad \lambda_4 = -\lambda_3 \tag{6}$$

Wykorzystując (5) oraz (6), otrzymamy rozwiązania układu równań (3) w postaci

$$\begin{aligned} X_1 &= a_1 \cos hr_1x + a_2 \sin hr_1x + a_3 \cos r_3x + a_4 \sin r_3x \\ X_2 &= \lambda_1 a_2 \cos hr_1x + \lambda_1 a_1 \sin hr_1x + \lambda_3 a_4 \cos r_3x - \lambda_3 a_3 \sin r_3x \end{aligned} \tag{7}$$

gdzie: $a_1 = c_{11} + c_{12}$; $a_2 = c_{11} - c_{12}$; $a_3 = c_{13} + c_{14}$; $a_4 = i(c_{13} - c_{14})$. W obszarze II są to liczby rzeczywiste.

3.1. Analiza zagadnienia brzegowego

Dla belki o swobodnych końcach zerowanie momentu i siły tnącej (2) można przedstawić jako układ czterech równań algebraicznych jednorodnych ze względu na stałe $a_1, \ldots, a_4$.

$$\begin{aligned} &M(0) = M(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad X_2'(0) = X_2'(l) = 0 \\ &T(0) = T(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(X_1'(0) - X_2(0)\right) = \left(X_1'(l) - X_2(l)\right) = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

[1] Dla pozostałych obszarów autor wyznaczył jawne postacie rozwiązań, lecz z powodu ograniczonego miejsca nie zostały tu one przedstawione. Poza żmudnymi przekształceniami nie wnoszą nic nowego do pracy.

3.1.1. Częstości własne

Układ równań (8) ma nietrywialne rozwiązanie, gdy jego wyznacznik główny (będący funkcją ω^2) osiąga wartość 0. Ponieważ w każdym ze zdefiniowanych w tab. 1 obszarów postać rozwiązań równania (3) jest inna osobno, wyznaczono jawną postać wyznacznika głównego (8) dla każdego z tych obszarów. Należy tu wspomnieć, że rzeczywiste parametry u, v oraz r_1 i r_3 są zależne od ω^2 poprzez równanie charakterystyczne (4). Po wprowadzeniu oznaczeń: $a = \left(\frac{k\rho\omega^2}{G} - \frac{\alpha k}{GA}\right)$, $d_2 = \frac{r_1(r_1^2 + a)}{r_3(r_3^2 + a)}$ w obszarze II i $d_3 = \frac{r_1(r_1^2 - a)}{r_3(r_3^2 - a)}$ w obszarze III, zestawienie jawnych wzorów określających ten wyznacznik przedstawiono w tab. 2

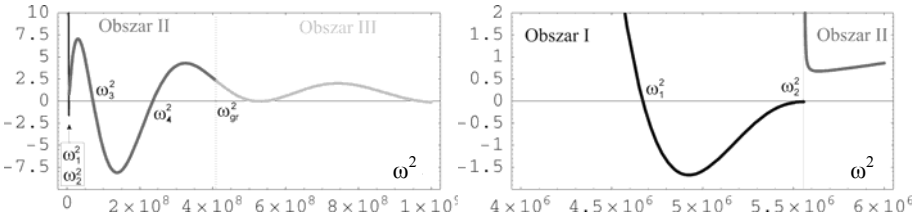
Tabela 2

Jawna postać wyznacznika głównego układu równań (8)

Oznaczenie obszaru z tab. 1	Wyznacznik główny układu równań (8)
I	$\frac{2a^2}{(u^2+v^2)^2}(v^2(a+3u^2-v^2)\cos h(2lu)+u^2(a-3v^2+u^2)\cos(2lv)$ $-(u^2+v^2)(a^2+2a(u-v)(u+v)+(u^2+v^2)^2))$
II	$1-\cos r_1 l\cos r_3 l+\frac{d_2^2-1}{2d_2}\sin r_1 l\sin r_3 l$
III	$1-\cos r_1 l\cos r_3 l-\frac{d_3^2+1}{2d_2}\sin r_1 l\sin r_3 l$

Jawne zależności przedstawione w tab. 2 pozwalają wykreślić przebieg wyznacznika układu (8) w zależności od ω^2 w celu wyznaczenia jego miejsc zerowych. Jak wcześniej wspomniano, tylko wtedy istnieją niezerowe rozwiązania X_1 i X_2.

Wykresy z rysunku 2 przedstawiają tę zależność w obszarach I, II i III.

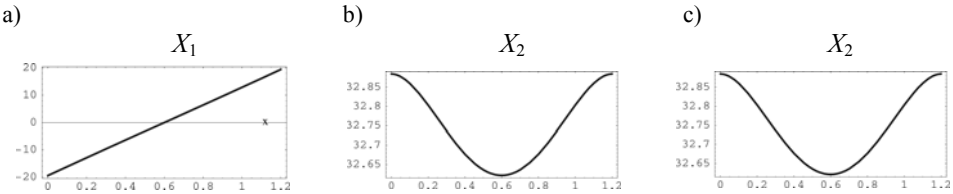


Rys. 2. Zależność wyznacznika układu równań (8) od ω^2. Część czarna (I), ciemnoszara (II) i jasnoszara (III) rozróżniają typy rozwiązań ze względu na p. Zera odpowiadają istnieniu nietrywialnych rozwiązań X_1 i X_2. Prawa część jest powiększonym obszarem z lewego rysunku

Fig. 2. Determinant of Equation (8) depending on ω^2. Black (I), dark-grey (II) and light-grey (III) distinguish types of solution. Solutions X_1 i X_2 exist only for zeros. The right part is a magnified of the left figure

3.1.2. Kształty form własnych

W obszarze niskich częstości znajduje się jedno rozwiązanie $\omega_1^2 = 4{,}67 \times 10^6$. Dla tej wartości można wyznaczyć kształty form.



Rys. 3. Kształty form dla pierwszej częstości własnej. Trzeci rysunek przedstawia X_2 w innej skali – występują zmiany kąta obrotu przekroju, lecz są one minimalne

Fig. 3. Shapes of form for first natural frequeny. Third pictures shows X_2 but scale is different. It shows minimal changes of cross section angle

Druga częstość własna, jak wspomniano, związana jest z zerowaniem wyrażenia $\left(\frac{k\rho\omega^2}{G} - \frac{\alpha k}{GA}\right)$ w równaniu (3), z czego wynika

$$\omega_2^2 = \frac{\alpha}{\rho A} \tag{9}$$

Przy przyjętych parametrach modelu jej kwadrat wynosi $\omega_2^2 = 5{,}56 \times 10^6$. W tym przypadku równanie (3) można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} &X'_1 - X'_2 = 0 \\ &X'_2 + \frac{\rho\omega^2}{E} X_2 = -\frac{GA}{kEJ}(X'_1 - X_2) \end{aligned} \tag{10}$$

Z pierwszego z równań (10) można wywnioskować, że $X_1 - X_2 = C_1$. Z warunku brzegowego dotyczącego zerowania siły tnącej wynika, że $C_1 = 0$. Wykorzystanie warunku brzegowego określającego moment gnący pozwala ostatecznie stwierdzić, że rozwiązaniem równania (10) są funkcje

$$\begin{aligned} X_1(x) &= C_2 \\ X_2(x) &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Mamy więc do czynienia z ruchem postępowym. Ponieważ dla tej formy wyrażenie αl jest całkowitą siłą, jaką podłoże oddziałuje na belkę przy jednostkowym wychyleniu, ρAL jest jej masą, zaś ω^2 określa zależność (9), można stwierdzić, że cały układ zachowuje się przy tej częstości analogicznie do belki sztywnej wspartej na sprężystym podłożu.

Układ belki sztywnej na sprężystym podłożu ma dwa stopnie swobody. Obydwie częstości własne takiego układu są jednakowe. Jedna z form opisuje ruch postępowy, druga zaś obrotowy. W przypadku belki sprężystej można dostrzec pewne analogie, lecz w tym przypadku częstości – związana z formą obrotową ω_1 i związana z formą postępową ω_2 – nie są sobie równe. Na rysunku 3 wyjaśniono, dlaczego analogia do bryły sztywnej przy formie obrotowej nie jest pełna. Część energii ruchu drgającego jest zamieniana na energię sprężystości belki, co obniża częstość tego ruchu w stosunku do układu sztywnego.

Dla dwóch kolejnych częstości własnych (znajdujących się w II obszarze) kształty form przedstawiono na kolejnych rysunkach. Forma X_1 wykazuje podobieństwo do form otrzymanych na podstawie modelu Bernoulliego.

Rys. 4. Kształty form dla $\omega_3^2 = 0{,}710 \times 10^8$

Fig. 4. Shapes of forms for $\omega_3^2 = 0{,}710 \times 10^8$

Rys. 5. Kształty form dla $\omega_4^2 = 2{,}34 \times 10^8$

Fig. 5. Shapes of forms for $\omega_4^2 = 2{,}34 \times 10^8$

3.2. Problem ortogonalności form własnych

Wyprowadzono również warunek ortogonalności, który przyjmuje postać

$$\int_0^l \left(X_{1n} X_{1m} + \frac{J}{A} X_{2n} X_{2m} \right) dx = 0$$

4. Drgania wymuszone

W artykule zbadano odpowiedź układu opisanego równaniami (1) na dwa typy wymuszenia harmonicznego: stałego wzdłuż osi belki

$$p(t,x) = d\sin(v,t) \tag{12}$$

oraz mającego rozkład sinusoidalny

$$p(t,x) = d\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)\sin(vt) \tag{13}$$

Jak pokażą dalsze rozważania, odpowiedzi te różnią się jakościowo w przeciwieństwie do przypadku belki obustronnie podpartej [1].

4.1. Wymuszenie harmoniczne rozłożone równomiernie

Poszukujemy całek szczególnych równania (1) w postaci: $\tilde{f}(x)\sin(vt)$ i $\tilde{g}(x)\sin(vt)$, co po zamianie zmiennych: $f = \tilde{f} + c; g = \tilde{g}$, gdzie $c = \dfrac{d}{A\rho v^2 - \alpha}$ sprowadza cząstkowe równania (1) do jednorodnego układu równań różniczkowych zwyczajnych

$$\begin{aligned} &f'' + \left(\frac{k\rho v^2}{G} - \frac{\alpha k}{GA}\right)f - g' = 0 \\ &g'' + \left(\frac{\rho v^2}{E} - \frac{GA}{kEJ}\right)g + \frac{GA}{kEJ}f' = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Ich rozwiązania są formalnie identyczne z rozwiązaniami (3), w których częstość ω zastąpiono przez v. Odpowiedź układu na wymuszenie rozłożone równomiernie ma w II obszarze postać

$$\begin{aligned} w(x,t) &= [f(x) - c]\sin(vt) = \left[b_1\cos hr_1x + b_2\sin hr_1x + b_3\cos r_3x + b_4\sin r_3x - c\right]\sin(vt) \\ \vartheta(x,t) &= g(x)\sin(vt) = [\lambda_1 b_2\cos hr_1x + \lambda_1 b_1\sin hr_1x + \lambda_3 b_4\cos r_3x - \lambda_3 b_3\sin r_3x]\sin(vt) \end{aligned} \tag{15}$$

gdzie b_1, ..., b_4 oraz r_i są funkcjami v^2, a stały współczynnik $c(v)$ jest ograniczony w całym obszarze II.

Rozwiązania opisujące odpowiedź układu na wymuszenie muszą spełniać warunki brzegowe (2), które zgodnie z (15) mają postać

$$\begin{aligned} &g'(0) = g'(l) = 0 \\ &f'(0) - g(0) = f'(l) - g(l) = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

Są one identyczne z warunkami brzegowymi (8) określającymi formy X_1 i X_2. W związku z tym funkcje $f(x)$ i $g(x)$ osiągają w II obszarze niezerowe (ale skończone) wartości jedynie wówczas, gdy $v = \omega_3$ lub $v = \omega_4$. W tym obszarze nie występują więc rezonanse, mimo iż zawiera on dwie częstości własne.

Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla obszaru I. Tam również współczynnik $c(v) < \infty$, a niezerowe funkcje f i g istnieją jedynie, gdy $v = \omega_1$.

Na granicy obszarów I i II mamy do czynienia z jakościowo inną sytuacją. Wymuszenie z częstością $v = \omega_2$ implikuje $c(v) \to \infty$, jest to więc częstość rezonansowa.

Reasumując: swobodna, krępa belka, wsparta na podłożu sprężystym, poddana równomiernie rozłożonemu wymuszeniu harmonicznemu osiąga stan rezonansu jedynie przy częstości wymuszającej równej ω_2, związanej z ruchem postępowym.

4.2. Wymuszenie harmoniczne rozłożone sinusoidalnie

Zgodnie z założeniem ze wstępu do rozdziału 4 rozłożone obciążenie wymuszające wyraża się zależnością (13). Odpowiedzi na to wymuszenie będziemy poszukiwali w postaci

$$w(x,t) = f(x)\sin(vt) \text{ i } \vartheta(x,t) = g(x)\sin(vt)$$

Zastosowanie powyższego podstawienia przekształca układ równań cząstkowych (1) w dwa równania różniczkowe zwyczajne niejednorodne w dziedzinie położenia

$$\begin{aligned} &f'' + \left(\frac{k\rho\omega^2}{G} - \frac{\alpha k}{GA}\right) f - g' = d\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) \\ &g'' + \left(\frac{\rho\omega^2}{E} - \frac{GA}{kEJ}\right) g + \frac{GA}{kEJ} f' = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Postać całek szczególnych tego układu jest łatwa do przewidzenia

$$f_s(x) = \Phi_0 \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right); g_s(x) = \Gamma_0 \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right)$$

Wstawienie tych wyrażeń do (17) pozwala znaleźć zależności, które muszą spełniać stałe Φ_0 i Γ_0

$$\begin{bmatrix} \frac{k\rho v^2}{G} - \frac{\alpha k}{GA} - \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 & \frac{\pi}{l} \\ \frac{\pi GA}{lkEJ} & \frac{\rho v^2}{E} - \frac{GA}{kEJ} - \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_0 \\ \Gamma_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Równania jednorodne odpowiadające równaniom (17) mają identyczną strukturę jak równania (3) wyznaczające formy własne $X_1(x)$ i $X_2(x)$. Tak więc ich rozwiązania są również podobne, z tym że współczynniki $a_i(\omega^2)$ przechodzą w $b_i(v^2)$, zaś ω zastąpiono przez v.

Zauważmy dodatkowo, że wyznacznik główny równania (18) zeruje sie przy wartości $v^2 = 2{,}31 \times 10^7$, którą oznaczono w tab. 1 przez ω_{gr}^2. Drugi pierwiastek leży poza badanym zakresem.

Całki ogólne równań jednorodnych wraz z całkami szczególnymi stanowią pełne rozwiązanie opisujące drgania wymuszone (w dziedzinie położeń). Ma ono (np w obszarze II) postać

$$
\begin{aligned}
f(x) &= b_1(v)\cos hr_1x + b_2(v)\sin hr_1x + b_3(v)\cos r_3x + b_4(v)\sin r_3x + \Phi_0 \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) \\
g(x) &= \lambda_1 b_2(v)\cos hr_1x + \lambda_1 b_1(v)\sin hr_1x + \lambda_3 b_4(v)\cos r_3x - \lambda_3 b_3(v)\sin r_3x + \Gamma_0 \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right)
\end{aligned}
\tag{19}
$$

4.3. Analiza drgań wymuszonych w obszarach bliskich częstościom własnym

Funkcje położenia ($f(x)$ i $g(x)$) stanowiące pełne rozwiązanie układu (17) muszą spełniać warunki brzegowe (16). Wykorzystanie tych warunków pozwala (przy częstościach różnych od rezonansowych) wyznaczać w sposób jednoznaczny stałe b_i w równaniu (19).

4.3.1. Wymuszenie z częstością bliską pierwszej częstości własnej ω_1 (obszar I)

Badana częstość należy do obszaru I (klasyfikacja w tab. 1). Rozwiązania w tym obszarze można opisać zależnościami

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \left(b_1e^{ux} + b_2e^{-ux}\right)\cos(vx) + \left(b_3e^{ux} + b_3e^{-ux}\right)\sin(vx) + \Phi_0 \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) \\
g(x) &= \left((b_1\delta_1 + b_3\delta_2)e^{ux} - ((b_2\delta_1 - b_4\delta_2)e^{-ux}\right)\cos(vx) + \\
&+ \left((b_3\delta_1 - b_1\delta_2)e^{ux} - ((b_4\delta_1 + b_2\delta_2)e^{-ux}\right)\sin(vx) + \Gamma_0 \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right)
\end{aligned}
\tag{20}
$$

gdzie u i v są częściami, odpowiednio, rzeczywistą i urojoną rozwiązania p równania charakterystycznego (4), $\delta_1 = \left(1 + \frac{a}{u^2+v^2}\right)u$; $\delta_2 = \left(1 - \frac{a}{u^2+v^2}\right)v$.

Dla tej częstości daje sie wyznaczyć współczynniki b_1, ..., b_4 oraz Φ_0, Γ_0, pomimo że wyznacznik główny układu wynikającego z warunków brzegowych zeruje się. Istnienie niezerowych współczynników wynika z faktu, że zerują się również wyznaczniki z podstawioną kolumną wyrazów wolnych. Wartości tych współczynników daje się wyznaczyć w granicy $v \to \omega_1$ i są one skończone (brak rezonansu).

Rys. 6. Rozwiązania $f(x)$ i $g(x)$ przy wymuszeniu z częstością $1 - \frac{a}{u^2+v^2}$

Fig. 6. Forced solutions $f(x)$, $g(x)$ with $1 - \frac{a}{u^2+v^2}$

4.3.2. Wymuszenie z częstością bliską drugiej częstości własnej ω_2

Jest to przypadek klasyczny, w którym zachodzi rezonans, bowiem

$$v \to \omega_2 \Rightarrow b_1, \ \ldots, b_4 \to \infty$$

zaś funkcje $f(x)$ i $g(x)$ dążą do nieskończoności. Kładąc $v = 0{,}995\omega_2$, można uzyskać obwiednie rozwiązań wymuszonych z otoczenia rezonansu, które pokazano na wykresach na rys. 7.

Rys. 7. Rozwiązania $f(x)$ i $g(x)$ przy wymuszeniu z częstością $v = 0{,}995\omega_2$

Fig. 7. Forced solutions $f(x)$, $g(x)$ with $v = 0{,}995\omega_2$

Tak jak należało przewidywać, kształt rozwiązań determinuje ruch postępowy belki.

4.3.3. Wymuszenie z częstością $v = \omega_3$ (obszar II)

Przy tej częstości wszystkie współczynniki b_i określające (19) zmierzają do nieskończoności, zaś Φ_0 i Γ_0 pozostają skończone. Mamy więc do czynienia z rezonansem. Zamieszczone na rys. 8 wykresy przedstawiają kształt funkcji f i g przy wymuszeniu nieco rozstrojonym od rezonansu ($v = 0{,}999\omega_3$).

Rys. 8. Rozwiązania $f(x)$ i $g(x)$ przy wymuszeniu z częstością $v = \omega_3$

Fig. 8. Forced solutions $f(x)$, $g(x)$ with $v = \omega_3$

4.3.4. Wymuszenie z częstością $v = \omega_4$

Dają się tu wyznaczyć (alogicznie do przypadku z ω_1) wszystkie współczynniki b_i i są one skończone. Na rysunku 9 przedstawiono kształt funkcji f i g.

Rys. 9. Rozwiązania $f(x)$ i $g(x)$ przy wymuszeniu z częstością $v = \omega_4$ (obszar II)

Fig. 9. Forced solutions $f(x)$, $g(x)$ with $v = \omega_4$ (region II)

4.3.5. Wymuszenie z częstością $\nu = \omega_{gr}$

Należy pamiętać, że nie jest to częstość własna. Jednak w tym punkcie współczynniki Φ_0 i Γ_0 dążą do nieskończoności. Kształt rozwiązań można tu jednak wyznaczyć ze względu na fakt, że współczynnik b_4 również dąży do nieskończoności, ale z przeciwnym znakiem. Te dwa efekty znoszą się wzajemnie, sprawiając, że istnieje skończone rozwiązanie.

Rys. 10. Rozwiązania $f(x)$ i $g(x)$ przy wymuszeniu z częstością $\nu = \omega_{gr}$

Fig. 10. Forced solutions $f(x)$, $g(x)$ with $\nu = \omega_{gr}$

5. Wnioski

Analizując w artykule [1] układ belki obustronnie podpartej, stwierdzono, że drganiom o różnych częstościach odpowiadać może jedna forma z powodu takich właśnie warunków brzegowych i sinusoidalnie rozłożonego wymuszenia. Jednym z zasadniczych wniosków niniejszego artykułu jest stwierdzenie, że występowanie tego zjawiska zdeterminowane było postacią warunku brzegowego. Przy brzegach uwolnionych zjawisko takie nie występuje.

Obserwacja dotycząca różnic w rozkładzie siły wymuszającej pozwala stwierdzić, że przy jednorodnym rozkładzie wymuszenia układ ma tylko jeden rezonans odpowiadający ruchowi postępowemu. Wydaje się to być nieco zaskakujące w układzie liniowym. Ciekawe jest również to, że przy sinusoidalnie rozłożonym wymuszeniu rezonanse występują nie przy wszystkich częstościach własnych. Istotnie, porównując kształty form własnych z rys. 3 i 5 (związanych, odpowiednio, z częstościami ω_1 oraz ω_2) z kształtami rozwiązań wymuszonych zamieszczonych na rys. 6 i 9 widać, że kształty te, przy odpowiadających sobie częstościach, są zdecydowanie różne. Przypisane do ω_1 oraz ω_2 formy są antysymetryczne, podczas gdy wymuszenie jest symetryczne. Nasuwa się tu wyjaśnienie fizyczne, mianowicie że symetryczna postać wymuszenia nie wywołuje rezonansów przy częstościach własnych, dla których formy własne są antysymetryczne.

Literatura

[1] Bar O., *Częstości drgań belki Timoshenki z uwzględnieniem nieliniowego podłoża*, Czasopismo Techniczne z. 13-M/2004, Kraków, 3-13.

[2] Nizioł J., Bar O., *Drgania belki Timoshenki z uwzględnieniem harmonicznego wymuszenia i rozpraszania energii*, Czasopismo Techniczne z. 5-M/2004, Kraków, 243-255.

[3] Nowacki W., *Dynamika Budowli*, Arkady, Warszawa 1972.

[4] Timoshenko S., *Vibration problems of engineering*, Toronto–New York–London 1955.