

GRZEGORZ CIEPŁOK\*

**AMPLITUDA DRGAŃ SYMETRYCZNIE POSADOWIONEJ  
MASZYNY WIBRACYJNEJ  
PODCZAS REZONANSU PRZEJŚCIOWEGO**

**VIBRATION AMPLITUDE OF A SYMMETRICALLY  
SUSPENDED VIBRATORY MACHINE DURING  
TRANSIENT RESONANCE**

**Streszczenie**

W niniejszym artykule poddano analizie symetrycznie posadowioną maszynę wibracyjną pod kątem wyznaczenia amplitudy drgań korpusu w stanach rezonansu przejściowego. Sformułowano równania ruchu maszyny w jednostkach względnych dla przypadku, w którym korpus wykonuje ruch postępowy i na ich podstawie wyznaczono mapy warstwiczne do określenia amplitudy rezonansowej dla fazy rozruchu wibratora oraz nomogram w celu określenia amplitudy drgań rezonansowych dla fazy wybiegu wibratora. Wskazano na możliwość adaptacji wyników do maszyny o prostoliniowej trajektorii ruchu korpusu.

*Słowa kluczowe: rezonans przejściowy, napęd maszyny wibracyjnej, rozruch, wybieg*

**Abstract**

Symmetrically suspended vibratory machine was analysed in the paper in order to determine the frame vibrations amplitude in the transient resonance state. The equations of machine motion in relative units were formulated for the case, in which the machine frame performs translatory motion. On the bases of these equations the contour graphs for the determination of the resonance amplitude for the vibrator starting phase were drawn as well as the nomogram for the determination of the resonance vibrations amplitude was prepared. The possibility of adapting the results for the machine of a rectilinear trajectory of the frame motion – was indicated

*Keywords: transient resonance, vibratory machine drive, starting, rundown*

\*Dr inż. Grzegorz Cieplak, Katedra Mechaniki i Wibroakustyki, Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie.

### Oznaczenia

- $M$  – masa korpusu maszyny [kg]  
 $m$  – masa wibratora [kg]  
 $e$  – promień niewyważenia wibratora [m]  
 $k$  – współczynnik sprężystości podparcia maszyny [N/m]  
 $b$  – współczynnik tłumienia wiskotycznego podparcia maszyny [Ns/m]  
 $M_{el}$  – moment napędowy działający na wibrator [Nm]  
 $\varphi$  – kąt obrotu wibratora [rad]  
 $J_{zx}$  – zredukowany na kąt  $\varphi$  masowy moment bezwładności układu napędowego i wibratora [kgm<sup>2</sup>]  
 $\omega$  – prędkość kątowa wibratora [rad/s]  
 $\omega_0$  – częstość drgań własnych nietłumionych masy drgającej maszyny [rad/s]  
 $\gamma$  – liczba tłumienia. W artykule  $\gamma = \frac{b}{2\sqrt{k(M+m)}}$   
 $\alpha$  – współczynnik zwielokrotnienia amplitudy drgań korpusu maszyny podczas przejścia przez rezonans. W artykule  $\alpha = \frac{A_{rez}(M+m)}{me}$

### 1. Wstęp

Miękko posadowione maszyny o niewyważonym wirniku mogą podlegać podczas rozruchu i wybiegu drganiom, których amplitudy przekraczają wielokrotnie amplitudy drgań w stanach ustalonych. Zjawisko to, związane z przejściem siły wymuszającej pochodzącej od niewyważonego wirnika przez zakres częstotliwości rezonansowych związanych z układem korpus maszyny–zawieszenie sprężyste, prowadzi do przekazywania dużych sił zmiennych na fundament lub konstrukcję wsporcza. Staje się ono szczególnie groźne w przypadku maszyn o dużym niewyważeniu, jak np. nadrezonansowych maszyn wiracyjnych napędzanych za pomocą wibratorów inercyjnych [5].

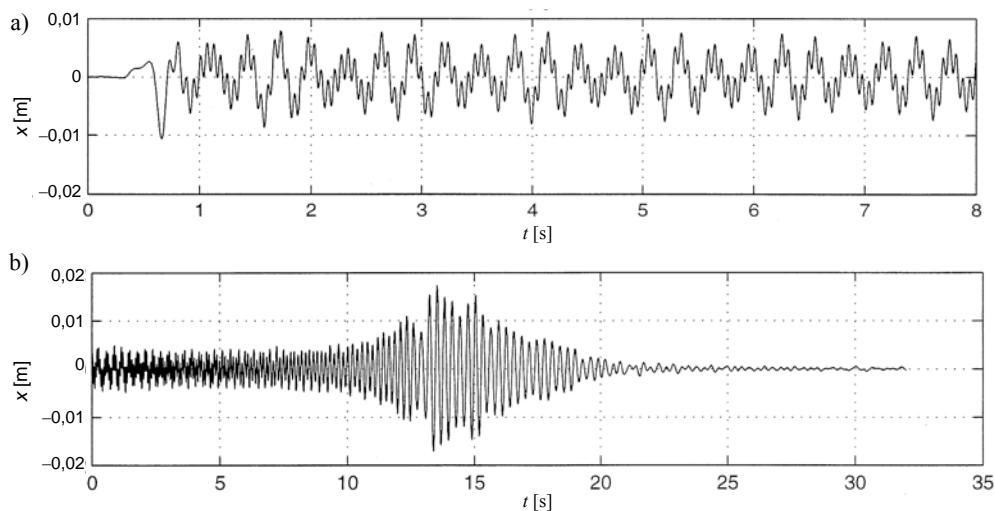
Przykładowy przebieg drgań na kierunku współrzędnej pionowej podczas rozruchu i wybiegu nadrezonansowego przesiewacza wiracyjnego pokazano na rysunku 1.

Zjawisko rezonansu przejściowego analizowano w literaturze wielokrotnie. Cechą wspólną tych analiz było przyjęcie przebiegu siły wymuszającej jako zadanej funkcji zależnej od czasu. Przyjmowano, że częstotliwość tej siły jest liniową funkcją czasu, zakładając jej stałą amplitudę lub – w pewien sposób odzwierciedlając działanie siły promieniowej wibratora inercyjnego – przyjmowano jej moduł jako funkcję kwadratu prędkości kątowej wibratora.

Punktem wyjścia dla większości analiz teoretycznych stało się równanie (1a), które przy zadanej funkcji  $\dot{\varphi}$  stanowi niesprzęgniętą z wibratorem postać opisu dynamiki korpusu maszyny przedstawionej na rys. 2

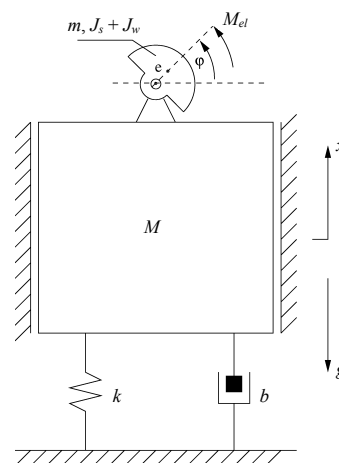
$$(M+m)\ddot{x} + b\dot{x} + kx = -me\ddot{\varphi}\cos(\varphi) + me\dot{\varphi}^2\sin(\varphi) = f(t) \quad (1a)$$

$$(J_w + J_s + me^2)\ddot{\varphi} + me\ddot{x}\cos(\varphi) = M_{el} \quad (1b)$$



Rys. 1. Przebieg drgań środka masy rzeszota przesiewacza wibracyjnego obciążonego nadawą podczas: a) rozruchu (na rysunku uwidocznione zostały niegasnące drgania własne rzeszota będące wynikiem uderzeniowego oddziaływania nadawy na sito przesiewacza), b) wybiegu wibratora bezwładnościowego

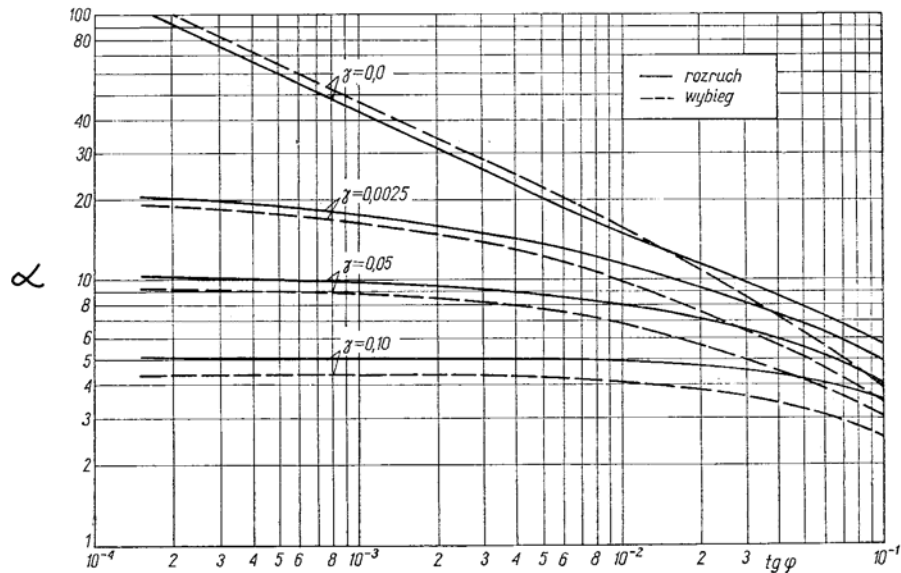
Fig. 1. Vibrations of the center of mass of the vibratory screen riddle loaded with the feed during: a) starting (not going out natural vibrations of the riddle being the result of the feed impacting the screen – are shown), b) rundown of the inertial vibrator



Rys. 2. Model fenomenologiczny maszyny wibracyjnej, której korpus wykonuje ruch prostoliniowy

Fig. 2. Phenomenological model of the vibratory machine, which frame performs a rectilinear motion

Zatem we wszystkich przypadkach, w których przeprowadzono badania analityczne na podstawie tak przyjętego równania, oddziaływanie wzajemne pomiędzy korpusem maszyny i wirnikiem zostało pominięte i stało się zasadniczą przyczyną błędów oszacowań maksymalnych amplitud drgań i sił podczas przechodzenia maszyny przez strefę rezonansową i to zarówno podczas rozruchu wirnika, jak i podczas jego wybiegu.



Rys. 3. Wartości maksymalnej bezwymiarowej amplitudy drgań dla różnych wartości liczby tłumienia  $\gamma$  podczas rozruchu i wybiegu wirnika [2]

Fig. 3. Values of maximal dimensionless vibration amplitude for various damping numbers  $\gamma$  during starting and coasting of the rotor [2]

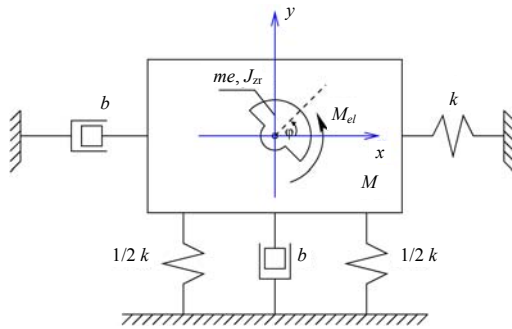
W fundamentalnych pracach Lewisa i Kaca rozwiązanie równania (1a) zostało w praktyczny sposób podane w postaci nomogramów (rys. 3), które pozwalają na podstawie znajomości wskaźnika przyspieszenia  $\tan(\varphi) = \varepsilon / \omega_0^2$  i liczby tłumienia  $\gamma$  wyznaczyć maksymalną amplitudę drgań korpusu maszyny podczas rozruchu i wybiegu wibratora. Praktyka pokazuje jednak, że stosowanie nomogramów bez możliwości poprawnego określenia przyspieszenia kąowego wibratora może prowadzić do błędów – najczęściej nieznacznie zaniżonych dla rozruchu i wysoko zawyżonych (nawet kilkakrotnie) dla wybiegu [5]. Sytuacja ta szczególnie uwypukla się w przypadku stosowania wibratorów inercyjnych, gdzie wysoka wartość momentu wiracyjnego w sposób istotny wpływa na załamanie się prędkości kąowej w strefie rezonansu.

## 2. Równania symetrycznie podpartej maszyny wibracyjnej w jednostkach względnych. Wyniki analizy równań ruchu

Rozpatrzmy tym razem model fenomenologiczny maszyny wibracyjnej przedstawionej schematycznie na rys. 4.

Korpus maszyny o masie  $M$  posadowiony został na symetrycznym układzie sprężysto-lepkim określonym przez stałe skupione  $k$  i  $b$ . Do drgań wzbudzony został za pomocą wibratora bezwładnościowego o wartości niewyważenia statycznego  $me$ . Moment bezwładności wibratora łącznie z momentem bezwładności układu napędowego zredukowano do współrzędnej kąowej obrotu wibratora i oznaczono przez  $J_{zr}$ . Wibrator poddano dzia-

łaniu stałowartościowego momentu napędowego działającego zgodnie ze współrzędną ruchu kąтового wibratora  $\varphi$ . Przemieszczenie środka masy korpusu maszyny opisano dwiema współrzędnymi  $x_s$  i  $y_s$ .



Rys. 4. Model symetrycznie posadowionej maszyny wibracyjnej

Fig. 4. Model of the symmetrically suspended vibratory machine

Dla tak określonego modelu możemy sformułować równania ruchu, które w formie zapisu macierzowego przyjmują postać układu

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_c & 0 \\ 0 & M_c \end{bmatrix}}_{[M]} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x}_s \\ \ddot{y}_s \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}}_{[B]} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_s \\ \dot{y}_s \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}}_{[K]} \underbrace{\begin{bmatrix} x_s \\ y_s \end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix}} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \sin(\varphi) \\ -m \cos(\varphi) \end{bmatrix} \ddot{\varphi} + \begin{bmatrix} m \cos(\varphi) \\ m \sin(\varphi) \end{bmatrix} \dot{\varphi}^2 \quad (3)$$

$$J_{zz} \ddot{\varphi} - m(\ddot{x}_s \sin(\varphi) - \ddot{y}_s \cos(\varphi)) = M_{el} \quad (4)$$

Z kolei wyrażając położenie środka masy ( $x_s$ ,  $y_s$ ) w układzie współrzędnych związanych z chwilowym położeniem wibratora [1], możemy równania ruchu doprowadzić do postaci

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4\pi^2} & 0 & -\frac{1}{2\pi} \eta_r & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4\pi^2} & \frac{1}{2\pi} (1 + \xi_r) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma}{4\pi^2} & \frac{1}{2\pi} (\sigma \xi_r + 1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} v_{\xi_r} \\ v_{\eta_r} \\ \omega_r \\ \xi_r \\ \eta_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_r^2 - (1 - \omega_r^2) \xi_r + \frac{1}{\pi} \omega_r v_{\eta_r} - \frac{\gamma}{\pi} v_{\xi_r} + 2\gamma \omega_r \eta_r \\ -(1 - \omega_r^2) \eta_r - \frac{1}{\pi} \omega_r v_{\xi_r} - \frac{\gamma}{\pi} v_{\eta_r} - 2\gamma \omega_r \xi_r \\ -\frac{\sigma}{\pi} v_{\xi_r} \omega_r + \sigma \eta_r \omega_r^2 + q \\ v_{\xi_r} \\ v_{\eta_r} \end{bmatrix} \quad (5)$$

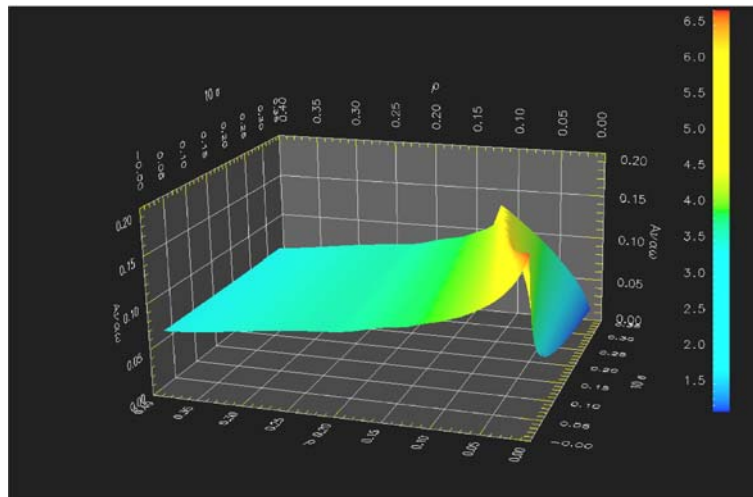
gdzie:

$\xi$ ,  $\eta$ ,  $v_{\xi}$ ,  $v_{\eta}$  – odpowiednio – współrzędne i prędkości położenia środka masy korpusu w układzie współrzędnych związanych z wibratorem

$$\begin{aligned} \xi_r &= \frac{\xi}{A_u} & \eta_r &= \frac{\eta}{A_u} & \omega_r &= \frac{\omega}{\omega_0} & \tau &= \frac{\omega_0 t}{2\pi} \\ \sigma &= \frac{m^2 e^2}{M_c J_{zt}} & \gamma &= \frac{b}{2\sqrt{M_c k}} & q &= \frac{M_{el}}{J_{zt}} \frac{1}{\omega_0^2} & A_u &= \frac{me}{M_c} \\ M_c &= M + m \end{aligned} \quad (6)$$

W tej formie zbiór sześciu parametrów fizycznych  $M_c$ ,  $me$ ,  $J_{zt}$ ,  $M_{el}$ ,  $k$  i  $b$  potrzebnych do zapisania dynamiki maszyny we współrzędnych uogólnionych, zredukowany został do trzech parametrów –  $\sigma$ ,  $\gamma$ ,  $q$ .

Uzyskane po transformacji postacie równań pozwalają na wykreślenie wykresów maksymalnych amplitud drgań korpusu maszyny dla fazy rozruchu i wybiegu. Istnieje również możliwość ich adaptacji dla maszyny o odcinkowej trajektorii ruchu korpusu. W tym przypadku wystarczające jest użycie przy odczytywaniu wykresów dwukrotnie mniejszej wartości parametru  $\sigma$  niż to wynika z zależności (6).

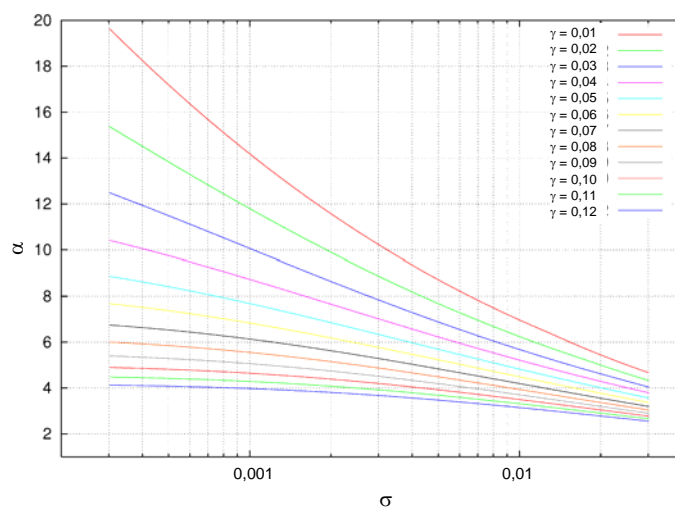


Rys. 5. Wartość względnej amplitudy rezonansowej w funkcji zmienności parametrów  $\sigma$  i  $q$  dla  $\gamma = 0,079$   
 Fig. 5. Value of the relative resonance amplitude as a function of the variability of parameters  $\sigma$  and  $q$  for  $\gamma = 0,079$

Na rysunku 5 przedstawiono przykładowy wykres uzyskany dla fazy rozruchu dla zadanej wartości parametru  $\gamma$ . Na jego podstawie można stwierdzić wyraźny wpływ zmienności parametrów fizycznych na wartość amplitudy rezonansowej. I tak, biorąc pod uwagę powierzchnię amplitud maksymalnych, jakie wystąpiły dla przypadków, w których wibrator pokonał strefę rezonansową (nie utykając np. w rezonansie), zachodzą:

- 1) wzrost amplitudy rezonansowej przy zmniejszaniu współczynnika tłumienia viskozycznego  $b$ ,
- 2) zmniejszanie amplitudy rezonansowej przy zmniejszaniu współczynnika sprężystości  $k$ ,
- 3) zmniejszanie amplitudy rezonansowej przy zwiększaniu wartości momentu napędowego,

- 4) wzrost amplitudy rezonansowej przy zwiększaniu wartości zredukowanego momentu bezwładności  $J_x$  ( $J_x$  wpływa jednocześnie na parametry  $\sigma$  i  $q$  – jednak rozstrzyga, widoczny na wykresach, intensywniejszy wpływ parametru  $q$ ),
- 5) wzrost amplitudy rezonansowej względnej przy zwiększaniu wartości niewyważenia statycznego wibratora  $me$  (należy zwrócić również uwagę na zmianę wartości odniesienia  $A_{ii}$ ).



Rys. 6. Wartość względnej amplitudy rezonansowej dla fazy wybiegu  
Fig. 6. Value of the relative resonance amplitude for the rundown phase

Podobnie jak dla rozruchu, tak dla wybiegu można wyznaczyć wykresy względnej amplitudy rezonansowej. Uzyskuje się je na podstawie rozwiązań równań (5), w których przyjmuje się  $q = 0$  i warunki początkowe odpowiadające stanowi ustalonemu określone dla ponadrezonansowej prędkości wibratora. W pracy przyjęto  $\omega_r = 4$ .

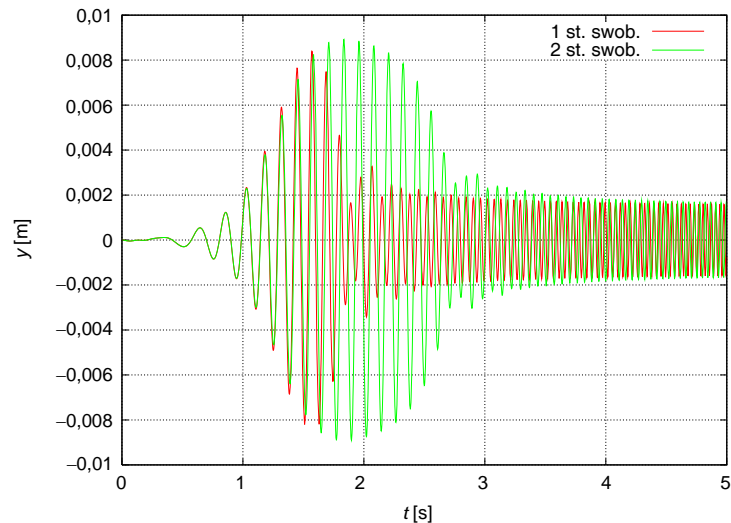
Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić, że na obniżenie amplitudy rezonansowej w fazie wybiegu wpływają:

- 1) zmniejszenie współczynnika sprężystości  $k$  zawieszenia maszyny,
- 2) podwyższenie współczynnika tłumienia wiskotycznego  $b$  zawieszenia maszyny,
- 3) obniżenie momentu zredukowanego układu napędowego  $J_x$ ,
- 4) zmniejszenie masy części drgającej maszyny,
- 5) zwiększenie wartości niewyważenia statycznego wibratora (dla punktów 4) i 5) ulega również zmianie wartość odniesienia  $A_{ii}$ ).

W celu przykładowej weryfikacji uzyskanych wyników na rys. 7 i 8 zostały przedstawione przebiegi czasowe rozwiązań równań ruchu maszyny o prostoliniowej i postępowej trajektorii ruchu korpusu uzyskane niezależnie, na drodze symulacji komputerowej.

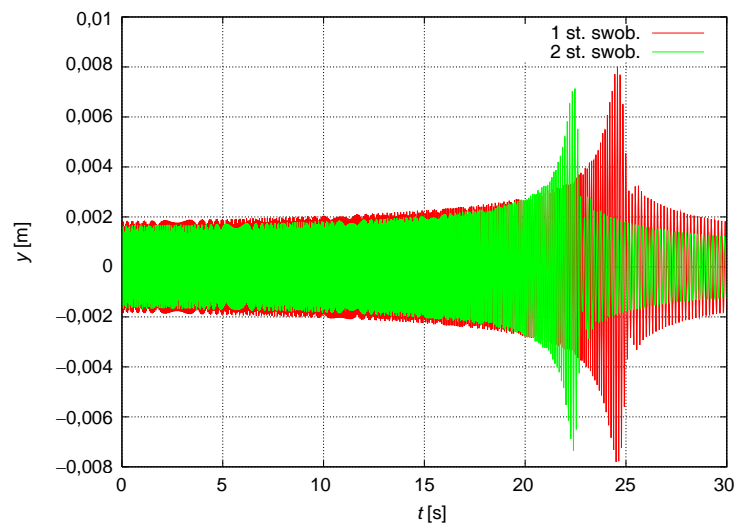
Odnosząc się do wyników z rys. 5, można dla  $\sigma = 0,0028$ ,  $q = 0,17$  odczytać wartość względnej amplitudy rezonansowej równą w przybliżeniu 5,5–6; co daje 8,14–8,9 mm dla ruchu postępowego i nieznacznie niższą amplitudę dla ruchu prostoliniowego. Z kolei dla fazy wybiegu z rys. 6 można odczytać wartości 4,9 (dla  $\sigma$ ) i 5,4 (dla  $\frac{1}{2} \sigma$ ), co odpowiada

amplitudzie rezonansowej 7,2 mm dla ruchu postępowego i 8 mm dla ruchu prostoliniowego. Odczytane wartości liczbowe odpowiadają amplitudom rezonansowym symulacji komputerowych.



Rys. 7. Faza rozruchu. Przebiegi współrzędnej pionowej ruchu korpusu maszyny dla przypadku, w którym korpus wykonuje ruch postępowy (przebieg oznaczony jako: 2 st. swob.) i ruch prostoliniowy (przebieg oznaczony jako 1 st. swob.)

Fig. 7. Starting phase. Runs of the vertical co-ordinate of the machine frame motion for the case, in which the frame performs a translatory motion (marked as: 2 st. swob.) and a rectilinear motion (marked as: 1 st. swob.)



Rys. 8. Faza wybiegu. Opis tak samo jak na rys. 7

Fig. 8. Rundown phase. Description as in Fig. 7



### 3. Podsumowanie

W artykule:

1. Wskazano na istotne błędy oszacowań maksymalnych amplitud drgań podczas pokonywania rezonansu przejściowego przez maszyny wibracyjne w przypadku, gdy pomija się sprzężenia pomiędzy wirnikiem a korpusem maszyny.
2. Podano równania ruchu symetrycznie posadowionej maszyny wibracyjnej w wirującym układzie współrzędnych i poprzez wprowadzenie jednostek względnych obniżono do trzech liczbę parametrów potrzebnych do opisanie dynamiki maszyny.
3. Wyznaczono nomogramy do określenia amplitudy rezonansowej dla fazy rozruchu i wybiegu wibratora oraz na ich podstawie przeprowadzono analizę wpływu zmienności parametrów fizycznych maszyny na jej wartość.
4. Wskazano na możliwość wykorzystania wyników do maszyny o prostoliniowym ruchu korpusu.

*Pracę wykonano w ramach badań statutowych Katedry Mechaniki i Wibroakustyki AGH za rok 2007.*

### Literatura

- [1] Ciepłok G., *Równania symetrycznej maszyny wibracyjnej w wirującym układzie współrzędnych. Zagadnienie utknięcia w rezonansie*, XII Konferencja Naukowa Wibroakustyki i Wibrotechniki, WibroTech 2006, Kraków 2006.
- [2] Goliński J.A., *Wibroizolacja maszyn i urządzeń*, WNT, Warszawa 1979.
- [3] Kac A.M., *Wynuzdjonnyje kolebanija pri prochozdientii czerez rezonans*, Inzyniernyj Sbornik, 1947.
- [4] Lewis F.M., *Vibration during Acceleration through a Critical Speed*, ASME-Transactions.
- [5] Michalczyk J., Ciepłok G., *Rezonans przejściowy maszyn wirnikowych – przyczyny błędów oszacowań*, Zeszyty Naukowe AGH, Mechanika, t. 13, Kraków 1994.
- [6] Michalczyk J., Bednarski Ł., *Graniczne przypadki rozruchu przenośnika wibracyjnego*, [w:] *Procesy wibroakustyczne w technice i środowisku*, praca zbiorowa pod red. W. Batko i Z. Dąbrowskiego, Kraków 2006.