

z. 1-M/2008 ISSN 0011-4561 ISSN 1897-6328

ROMAN FILIPEK, JERZY WICIAK*

ANALIZA MES PROMIENIOWANIA DŹWIĘKU PRZEZ BELKĘ Z ELEMENTAMI PIEZOCERAMICZNYMI

FINITE ELEMENTS ANALYSIS OF SOUND RADIATION FROM A BEAM WITH PIEZOCERAMIC ELEMENTS

Streszczenie

Przedmiotem badań było promieniowanie dźwięku przez jednostronnie utwierdzoną stalową belkę. Do jej powierzchni przytwierdzono dwie pary elementów piezoelektrycznych pełniące funkcje elementów wykonawczych oraz czujników. Układ wprawiono w drgania przez podanie na elektrody elementu wykonawczego napięcia przemiennego. Redukcja drgań została wprowadzona przez podanie na drugi element wykonawczy napięcia o częstotliwości identycznej z napięciem wymuszającym oraz będącego z nim, odpowiednio, w fazie lub przeciwfazie. Belkę umieszczono w objętości akustycznej, w której następowała emisja dźwięku. Rozkład pola akustycznego został określony dla stanu ustalonego w wybranych częstotliwościach rezonansowych. Obliczenia przeprowadzono, stosując MES, a następnie zweryfikowano doświadczalnie.

Słowa kluczowe: redukcja drgań i hałasu, Metoda Elementów Skończonych, piezoelektryczne elementy wykonawcze

Abstract

Sound radiation from a steel cantilever beam was investigated. Two sets of collocated piezoelectric transducers were bonded to the beams surface and they were used for actuating and sensing. One of actuators served to drive the beam by applying harmonic voltage on its electrodes. Vibrations reduction was performed by using the second actuator. The reducing voltage has the same frequency as the excitation voltage and was in phase or in antiphase with it. The beam was placed in an acoustic volume, where sound radiation occurs. Sound field distribution was obtained in selected resonance frequencies in a steady state. Results were derived from the Finite Element Modeling and then verified experimentally.

Keywords: vibrations and noise reduction, finite element method, piezoelectric actuators

^{*}Mgr inż. Roman Filipek, dr inż. Jerzy Wiciak, Katedra Mechaniki i Wibroakustyki, Wydział Inżynierii i Robotyki, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie.

1. Wstęp

Ciągły postęp w dziedzinie materiałów inteligentnych pozwala na coraz efektywniejsze ich stosowanie do tłumienia drgań oraz hałasu. Aktywność akustyczna drgającej struktury może zostać zredukowana u źródła przez wykorzystanie zjawiska piezoelektrycznego. Redukcję drgań z użyciem elementów piezoelektrycznych można przeprowadzić pasywnie, np. przez dopięcie do elektrod przetwornika rezonansowego obwodu elektrycznego [1–5], lub aktywnie [5–12].

Zagadnienie tłumienia i redukcji drgań było przedmiotem badań wielu autorów, w pracy [13] Pan, Hansen i in. przeanalizowali fizyczny mechanizm redukcji dźwięku promieniowanego do komory bezechowej przez swobodnie podpartą belkę. W pracy [14] Clark i in. zaprezentowali analizę wpływu położenia piezoelektrycznych elementów wykonawczych na poszczególne postacie drgań belki swobodnie podpartej. Model uwzględniający lokalną zmianę sztywności swobodnie podpartej belki wzbudzanej przez piezoceramiczne aktuatory przedstawiono w pracy Rivory'ego i in. [15], a sterowanej grupą trzech piezoaktuatorów zamieszczono w pozycji pod redakcją Cabella [16]. Zastosowanie metody elementów skończonych do obliczeń sprzężeń pól elektrycznych i strukturalnych oraz do analizy dużych odkształceń belek znajdziemy w [17–19]. Podejście statyczne i dynamiczne w modelowaniu oddziaływań elektromechanicznych elementów aktywnych oraz zagadnienia sterowania drganiami belek przedstawiono w [10, 20].

Celem niniejszego artykułu jest analiza możliwości aktywnego tłumienia emisji dźwięku przez belkę z elementami piezoceramicznymi. Podjęta tematyka dotyczy problemu belki Bernouliego–Eulera. Istnieje możliwość jego rozwiązania przez podział belki na pięć przedziałów. W pierwszym, trzecim i piątym przedziale jest to klasyczne zadanie, a w drugim i czwartym przedziale należy rozwiązać sprzężone zadanie belki trójwarstwowej, przy czym skrajne warstwy są wykonane z PZT. Otrzymane rozwiązanie może zostać sprzężone z obwodem sterowania. W niniejszym artykule do obliczeń zastosowano MES, aby przedstawić algorytm postępowania, który sprawdzi się także przy bardziej skomplikowanej geometrii.

2. Przedmiot badań

Przedmiotem analizy była stalowa jednostronnie utwierdzona belka (rys. 1) o prostokątnym przekroju poprzecznym. Na obydwu jej powierzchniach zewnętrznych przyklejone zostały, za pomocą cienkiej warstwy (20 μm) jednoskładnikowej żywicy epoxydowej, dwie pary elementów z materiału ceramicznego PIC140. Dwa elementy znajdujące się na jednej powierzchni belki służyły jako czujniki drgań, pozostałe jako elementy wykonawcze. Elektrody elementów piezoelektrycznych będące w kontakcie z belką zostały uziemione. Drgania poprzeczne belki wymuszono przez przyłożenie przemiennego napięcia na zewnętrzną elektrodę elementu piezoelektrycznego jednej z par. Wartość skuteczna napięcia wynosiła 30 V. Badania przeprowadzono w przedziale częstotliwości 10 Hz–3,2 kHz. Zastosowaną strategię tłumienia drgań przedstawiono w rozdziale 4 opisującym stanowisko doświadczalne (rys. 12).



Rys. 1. Geometria modelu Fig. 1. Model geometry

Przyjęte w obliczeniach numerycznych parametry fizyczne użytych materiałów zestawione zostały w tabeli 1. Współczynnik tłumienia wewnętrznego w badanym układzie uwzględnia także dodatkowe tłumienie będące tłumieniem konstrukcyjnym. W niniejszej analizie dla całego układu przyjęty został on jako niezależny od częstotliwości i wynoszący $2,7 \cdot 10^{-3}$ [3, 6].

Tabela 1

	Piezoceramika PIC140	Stal OH18N9	Klej (Epoxy)
Gęstość [kg·m ⁻³]	ρ 7600	ρ 8000	ρ 1200
Moduł Younga [Pa]	$E_{11} 8,547 \cdot 10^{10}$	E 1,93·10 ¹¹	$E 2.10^{10}$
	E_{33} 6,803·10 ¹⁰		
Wsp. Poissona	v_{xy} 0,29, v_{xz} 0,34	υ 0,29	υ 0,4
Stałe piezoelektryczne	$d_{31} 60.10^{-12}$,		
$[m \cdot V^{-1}]$	$d_{33} 200.10^{-12}$,		
	$d_{51} 265 \cdot 10^{-12}$		
Przenikalność względna	$\epsilon_{11}/\epsilon_0680,\epsilon_{33}/\epsilon_0800$		

Własności materiałowe

3. Analiza numeryczna

Model numeryczny zbudowany został z elementów skończonych z zastosowaniem programu ANSYS. Umożliwia on uwzględnienie sprzężeń pomiędzy polami elektrycznym, przemieszczeń i akustycznym. W równaniach macierzowych opisujących poszczególne elementy uwzględniane są dodatkowe stopnie swobody pozwalające na przeprowadzanie obliczeń dla całego układu fizycznego w pojedynczym kroku obliczeniowym. W przypadku elementów piezoelektrycznych są to napięcia i przemieszczenia. Natomiast dla elementów akustycznych znajdujących się w kontakcie z belką oprócz ciśnienia występują także przemieszczenia. Belka oraz warstwa kleju zostały zamodelowane przez, odpowiednio, cztery oraz jedną warstwę elementów bryłowych Solid95. Przetworniki piezoelektryczne zostały zamodelowane za pomocą elementów Solid226. Obydwa rodzaje elementów są 20-węzłowe, co zdecydowanie poprawia dokładność obliczeń w porównaniu do 8-węzłowych elementów Solid45 i Solid5 przy zachowaniu zbliżonej gęstości siatki.



Rys. 2a) Model belki z Elementów Skończonych, b) powiększenie elementu piezoelektrycznego Fig. 2a) FEM of the beam, b) piezoelectric element zoom

Rozkład poziomu dźwięku promieniowanego przez drgającą belkę został wyznaczony w objętości zawierającej medium akustyczne – powietrze. Objętość ta miała kształt półkuli o promieniu 1,1 m (rys. 3).



Rys. 3a) Dopięta objętość akustyczna, b) przekrój wraz z zaznaczonymi objętościami kontrolnymi Fig. 3a) Acoustic volume, b) acoustic volume cross-section witch marked control volumes

Objętość akustyczna składała się z ok. 0,5 mln elementów akustycznych typu Fluid30 (4-węzłowych czworościanów) oraz nieskończonych elementów akustycznych typu Fluid130 umieszczonych na zewnętrznej powierzchni kuli. Przez uwzględnienie w elementach Fluid130 warunku Sommerfelda następuje całkowite wypromieniowanie dźwięku z układu. Gęstość powietrza została przyjęta jako 1,225 kgm⁻³, prędkość dźwięku jako 343 ms⁻¹. Poziom ciśnienia akustycznego został odnotowany przez uśrednienie wartości węzłowych (średnio 63 węzły) w trzech objętościach kontrolnych o średnicy 0,1 m znajdujących się w odległości ok. 1 m od środka belki. Elementy w nich zawarte zaznaczone zostały ciemniejszym kolorem na rys. 3b).

Wstępne obliczenia polegające na wyznaczeniu częstości drgań własnych struktury i współczynnika sprzężenia elektromechanicznego zostały przeprowadzone bez uwzględnienia objętości akustycznej. Przyspieszyło to znacznie obliczenia, nie wprowadzając istotnych rozbieżności, ponieważ wpływ powietrza na drgającą strukturę jest niewielki. Przesunięcie częstotliwości rezonansowych przy obciążeniu belki dodatkową impedancją powietrza nie przekracza 0,1%. Za pomocą analizy modalnej wyznaczono pierwszych 8 częstości drgań własnych dla dwu przypadków: ω_o – przy otwartych elektrodach elementu piezoelektrycznego oraz ω_s – przy zwartych elektrodach (co powoduje zmniejszenie sztyw-

ności układu). Na tej podstawie [2, 21] obliczono uogólniony poprzeczny współczynnik sprzężenia elektromechanicznego dla całego układu z zależności

$$K_{31} = \sqrt{\frac{(\omega_o^2 - \omega_s^2)}{\omega_s^2}} \tag{1}$$

W kolejnych krokach obliczeniowych pojedynczy element piezoelektryczny umieszczano na powierzchni belki w coraz większej odległości od jej utwierdzenia. Współczynnik sprzężenia elektromechanicznego (rys. 4) największe wartości przyjmuje w strzałkach danej postaci drgań.



 Rys. 4. Współczynnik sprzężenia elektromechanicznego dla pierwszych ośmiu postaci drgań w zależności od położenia elementu piezoelektrycznego
Fig. 4. Electromechanical coupling coefficient for first 8th modes depending on piezoelectric element location

Dodanie pozostałych elementów piezoelektrycznych przez zmianę sztywności i masy układu wpłynęło na zmianę wartości współczynnika. Wynik obliczeń przy założonym wstępnie położeniu elementów piezoelektrycznych oraz odpowiedź napięciowa układu [3, 6, 22] potwierdzają możliwy do odczytania z rys. 4 wniosek, że odpowiednio silnego wymuszenia i redukcji drgań można spodziewać się w okolicy 3, 5 i 8 częstotliwości rezonansowej wynoszącej, odpowiednio, 314,9, 1020,3 i 2918,1 Hz.

Następnie, stosując analizę harmoniczną w okolicy częstotliwości rezonansowej układu, została zamodelowana przyjęta strategia redukcji drgań. Na rysunku 5 przedstawiono zależność amplitudy napięcia na czujniku 2 od amplitudy i częstotliwości napięcia przyłożonego na element wykonawczy w celu redukcji drgań w otoczeniu 5 częstotliwości rezonansowej (1020–1050 Hz).

Jeśli obliczenia przeprowadza się w częstotliwości nawet niewiele odstrojonej od rozpatrywanej częstotliwości rezonansowej, wyznaczenie amplitudy napięcia redukującego drgania przez minimalizację amplitudy napięcia odczytanego na czujniku powoduje ryzyko, że w przypadku późniejszej zmiany tej częstotliwości nastąpi wzmocnienie drgań. Tak określone kryterium optymalizacji nie byłoby jednoznaczne w rozpatrywanym otoczeniu częstotliwości rezonansowej. Przyjęcie funkcji celu na podstawie kąta przesunięcia fazowego φ pomiędzy napięciem na czujniku a napięciem wymuszenia (rys. 6a)) jest jednoznaczne, ponieważ przeprowadzając obliczenia w częstotliwości dowolnie wybranej z otoczenia częstotliwości rezonansowej, minimum funkcji celu (rys. 6b)) uzyskiwane jest przy tej samej amplitudzie napięcia wynoszącej 32 V. W zależności od rozpatrywanej postaci drgań funkcja celu *J* została przyjęta jako

$$J = \begin{cases} \varphi^2, & \text{dla 5 postaci drgań} \\ \frac{1}{\varphi^2}, & \text{dla 3 i 8 postaci drgań} \end{cases}$$
(2)

Funkcja celu została skonstruowana w ten sposób, ponieważ założono, że dla 5 postaci drgań optymalna amplituda napięcia redukującego drgania zostanie dobrana, gdy kąt przesunięcia fazowego będzie bliski zero. Natomiast dla 3 i 8 postaci przy amplitudzie napięcia zmierzającej do wartości optymalnej kąt przesunięcia fazowego zmierza do ±180°. Dodatkowe podniesienie do kwadratu zapewnia szybszą zbieżność procesu optymalizacji.





to the actuator in the vicinity of the 5^{th} resonance frequency





Dobór optymalnej amplitudy napięcia tłumiącego drgania został przeprowadzony za pomocą narzędzi optymalizacyjnych zawartych w programie ANSYS – Design Optimi-

sation. Zastosowana została zawansowana metoda Subproblem Approximation, polegająca na początkowej aproksymacji zmiennych z poprzednich kroków obliczeniowych przez średnie wyznaczone metodą najmniejszych kwadratów oraz na kolejnym przekształceniu problemu ograniczonego na nieograniczony z użyciem funkcji kary. Jako zmienna konstrukcyjna wprowadzona została amplituda napięcia redukującego drgania. Minimalizacja funkcji celu (2) pozwoliła na wyznaczenie napięć, odpowiednio, 42,2 V dla 3, 32 V dla 5 oraz 45,6 V dla 8 częstotliwości rezonansowej.

Warto podkreślić, że na początku obliczeń została założona wartość amplitudy sygnału wymuszającego drgania. W przypadku zastosowanego algorytmu postępowania, po zmianie amplitudy napięcia wymuszającego, wartość amplitudy napięcia redukującego nie będzie już optymalna (zgodnie z teorią układów o wielu wejściach i wielu wyjściach) i należy ją wyznaczyć ponownie.

Kolejny etap badań, którym było wyznaczenie rozkładu pola akustycznego wokół drgającej belki, został przeprowadzony z uwzględnieniem objętości akustycznej. W wybranych częstotliwościach przeprowadzona została analiza harmoniczna układu bez oraz z wprowadzoną redukcją drgań.

Wybrane izopowierzchnie oddające charakter rozkładu pola akustycznego oraz zmianę poziomu ciśnienia akustycznego dla poszczególnych częstotliwości rezonansowych zestawiono na rys. 7–9.



Rys. 7. Izopowierzchnie poziomu ciśnienia akustycznego dla 3 częstotliwości rezonansowej: a) bez redukcji – 58 dB, b) z redukcją – 6 dB

Fig. 7. Isosurface of SPL for the 3th mode: a) without reduction - 58 dB, b) with reduction - 6 dB

Izopowierzchnie poziomu ciśnienia akustycznego dla 3 (rys. 7) i 5 (rys. 8) częstotliwości rezonansowej po wprowadzeniu redukcji drgań, pomimo znacznego zmniejszenia wartości, nie zmieniają istotnie kształtu przestrzennego. Dla trzeciej częstotliwości rezonansowej promieniowanie dźwięku przez belkę jest zbliżone do promieniowania źródła kulistego. Jednak po wprowadzeniu redukcji drgań widoczny jest większy spadek poziomu ciśnienia akustycznego od strony swobodnego końca belki. Natomiast w przypadku 8 częstotliwości (rys. 9) rozkład pola akustycznego jest już silnie niejednorodny oraz dla drgań redukowanych następuje zmniejszenie liczby "listków" z 5 do 3. Wiąże się to także ze zmianą położenia maksymalnych wartości poziomu ciśnienia – odległości izopowierzchni od źródła promieniującego dźwięk.



Rys. 8. Izopowierzchnie poziomu ciśnienia akustycznego dla 5 częstotliwości rezonansowej: a) bez redukcji – 65 dB, b) z redukcją – 30 dB





Rys. 9. Izopowierzchnie poziomu ciśnienia akustycznego dla 8 częstotliwości rezonansowej: a) bez redukcji – 65 dB, b) z redukcją – 45 dB Fig. 9. Isosurface of SPL for the 8th mode: a) without reduction – 65 dB, b) with reduction – 45 dB

4. Doświadczenie

Eksperyment zrealizowano w komorze bezechowej (rys. 9). Belkę umieszczono w uchwycie szczękowym przymocowanym do kilkudziesięciokilogramowej podstawy. Przeprowadzono dwa etapy doświadczenia: identyfikację częstotliwości rezonansowych układu oraz redukcję drgań i hałasu zaproponowaną w rozdziałach 2–3. Częstotliwości rezonansowe belki zostały ustalone przez podanie na element wykonawczy sygnału będącego szumem białym pochodzącym z generatora Bruel & Kjaer 1405. Sygnał z czujników za-rejestrowano na dysku komputera z zastosowaniem karty pomiarowej Prosig 2600.

Analiza zapisanych danych przeprowadzona została w programie Matlab. Poziomy napięć odczytane na czujnikach 1 i 2 przedstawiono na rys. 11. Wartość napięcia odniesienia przyjęta została standardowo jako 1 μ V. Rozbieżności pomiędzy częstotliwościami obliczonymi za pomocą MES (zaznaczonymi na rys. 11 kolejnymi numerami), a wyznaczonymi eksperymentalnie wyniosły 2–4 % [3, 5].



Rys. 10. Belka w komorze bezechowej Fig. 10. Beam in an anechoic chamber



Rys. 11. Odpowiedź napięciowa układu przy wymuszeniu szumem białym Fig. 11. Voltage response of system with white-noise excitation

Schemat toru zestawionego w celu redukcji drgań przedstawiony został na rys. 12. Wzbudzający drgania sygnał napięciowy został podany na elektrody przetwornika piezoelektrycznego z generatora funkcyjnego DF1641A przez specjalizowany wzmacniacz mocy. W celu redukcji drgań ten sam sygnał został podany na przetwornik piezoelektryczny z drugiej pary przez przesuwnik fazowy, przedwzmacniacz oraz wzmacniacz VTL MB-150. Napięcie redukujące dopasowane zostało manualnie z zastosowaniem potencjometru przedwzmacniacza. Zależność fazowa pomiędzy napięciami na czujnikach obserwowana była na oscyloskopie cyfrowym Summit Scope Plus 760. Choć w tak przeprowadzonym doświadczeniu optymalizacja amplitudy napięcia redukującego drgania została dokonana z użyciem wartości bezwzględnej kąta przesunięcia fazowego, a nie jego kwadratu jak zostało założone w analizie numerycznej, to w obydwu przypadkach minimum funkcji celu zlokalizowane jest przy tej samej wartości.

Poziom ciśnienia akustycznego w poszczególnych punktach pomiarowych wyznaczony został za pomocą ½" mikrofonu oraz miernika i analizatora dźwięku SVAN 912AE.

Porównanie pomiędzy poziomem ciśnienia akustycznego wyznaczonym w obliczeniach numerycznych za pomocą MES a wynikami uzyskanymi w badaniach doświadczalnych przedstawiono na rys. 13.



Rys. 12. Schemat stanowiska: 1 – generator funkcyjny, 2 – oscyloskop cyfrowy, 3 – wzmacniacz napięciowy, 4 – potencjometr, 5 – przesównik fazowy





w punktach pomiarowych Fig. 13. Computated and measured SPL at measurements points

5. Podsumowanie i wnioski

Skuteczność zaproponowanej metody redukcji drgań i hałasu została potwierdzona w badaniach doświadczalnych.

W przyjętym modelu numerycznym rozkład pola akustycznego dla częstotliwości rzędu 300 Hz jest jednorodny. Natomiast w przypadku wyższych częstotliwości (2,9 kHz) promieniowanie dźwięku jest niejednorodne i silnie kierunkowe, co powoduje, że przy niewielkich (0,1 m) zmianach położenia odbiornika odczyt może się różnić nawet o kilkanaście dB. Największą redukcję hałasu uzyskano dla 3 postaci drgań – od 52 do 56 dB w zależności od miejsca pomiaru. Dla 5 i 8 postaci, odpowiednio, 39–42 oraz 17–23 dB.

Słabszy efekt redukcji hałasu dla 8 postaci drgań związany jest ze zmianą charakteru rozkładu ciśnienia wokół belki oraz obranymi punktami pomiarowymi.

Przeprowadzone doświadczenie dla 3 częstotliwości rezonansowej wykazało rozbieżność pomiędzy wynikami uzyskanymi w obliczeniach numerycznych i w badaniach doświadczalnych. Poziom ciśnienia akustycznego po wprowadzeniu redukcji drgań okazał się niższy od poziomu bez redukcji o co najmniej 23–34 dB. Rzeczywista zmiana poziomu ciśnienia akustycznego prawdopodobnie była większa, ponieważ w przypadku drgań redukowanych odczytany poziom ciśnienia akustycznego był zbliżony lub znajdował się poniżej poziomu tła komory bezechowej. Dokładne jego wyznaczenie wymagałoby zmiany metodologii przeprowadzonych badań przez zwiększenie napięcia wymuszającego lub pomiar ciśnienia akustycznego w odległości mniejszej od założonej. Dla pozostałych częstotliwości zmierzone poziomy ciśnienia różniły się od 2 do 12 dB, zazwyczaj nie przekraczając 8 dB. Po wprowadzeniu redukcji w układzie odnotowano zmniejszenie poziomów o 14–22 dB w 3 rezonansie, 30–32 dB w 5 oraz 18–20 w 8.

Przyczyny zaobserwowanych różnic można podzielić na dwie kategorie: związane z ograniczeniami i uproszczeniami obranego modelu numerycznego oraz powodowane niemożnością spełnienia podczas doświadczenia wszystkich jego założeń, jak np. całkowitego pochłaniania na powierzchni zewnętrznej objętości akustycznej, idealnie sztywnego utwierdzenia belki czy jednorodności i liniowości własności materiałowych.

Przedstawiona strategia tłumienia drgań nie została zrealizowana w postaci układu automatycznej regulacji, jednak mimo to dość dobrze pozwala oszacować efektywność proponowanego sposobu redukcji drgań. Podstawową trudnością w realizacji takiego układu jest konieczność znajomości sygnału wymuszającego. Stąd nie może być ona stosowana w wielu praktycznych układach, w których sygnał ten nie może być mierzony.

Pracę zrealizowano w ramach prac naukowych AGH – WIMiR DS 11.11.130.119.

Literatura

- Hagood N.W., von Flotow A., Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical network, J. of Sound and Vibration 146 (2), 1991, 1243-268.
- [2] Filipek R., Wiciak J., *FEM analysis of beam vibrations control using piezo*electric transducers and a RLC shunt circuit, The Archive of Mechanical Engineering 53 (1), 2006, 5-21.
- [3] Filipek R., Wiciak J., *Finite Element Modeling of sound fields from a beam with shunted piezoceramics*, Euronoise, Tampere 2006.
- [4] Ahmadian M., Jeric K.M., On the Application of Shunted Piezoceramics for Increasing Acoustic Transmission Loss in Structures, J. of Sound and Vibration 243 (2), 2001, 347-359.
- [5] Filipek R., Wiciak J., Comparison of active and passive methods of beam vibrations damping with the piezoceramic elements, Procesy wibroakustyczne w technice i środowisku, red. W. Batko, Z. Dąbrowski, Kraków, 2007, 239-248.
- [6] Filipek R., *FEM of sound radiation from a beam with piezoceramic elements*, 53 Open Seminar on Acoustic OSA, Zakopane 2006.

- [7] Fuller C.R., Elliott S.P., Nelson P.A., Active Control of Vibration, Academic Press, 1997.
- [8] K a m a d a T. i in., Active vibration control of frame structures with smart structures using piezoelectric actuator, Smart Mater. Structu. 6, 1997, 448-456.
- [9] L e n i o w s k a L., Aktywne metody redukcji drgań płyt kolowych, Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, Rzeszów 2006.
- [10] Pietrzakowski M., Active Damping of Transverse Vibration Using Distributed Piezoelectric Elements, Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2004.
- [11] Pietrzakowski M., Wpływ rozmieszczenia włókien piezoelektrycznych na aktywne tłumienie drgań płyt laminowanych, Czasopismo Techniczne z. 5-M/2004, 293-301.
- [12] Wiciak J., Investigations of a noise control of a plate with four pairs piezoelectric elements, Archives of Acoustic 31 (4), 2006, 1-10.
- [13] Pan J., Hansen C.H., Active control of total vibratory power flow in a beam, Physical system analysis, J. Acoust. Soc. Am. 89 (1), 1991, 200-209.
- [14] Clark R.L., Fuller C.R., Wicks A., Characterization of Multiple Piezoelectric Actuators for Structural Excitation, Journal of Acoustical Society of America 90, 1991, 346-357.
- [15] Rivory J.F., Hansen C.R., Pan J., Further studies of the dynamic respons of a simply supprted beam excited by a pair of out-of-phase piezoelectric actuators, J. of Intelligent Material Systems and Structures 5, 1994.
- [16] Cabell R.H., Smith G.C., Fuller C.R., Experimental investigation of actuator grouping for active structural acoustic control, Active 95, Newport Beach, USA 1995.
- [17] Aurillio G. i in., A finite element approach for designing active feedback control systems, Active 04, Williamsburg, Virginia 2004.
- [18] Lin C.-C., Hsu C.-Y., Huang H.-N., *Finite element analysis of deflection control* of plates with piezoelectric actuators, Composite Structures 35, 1996, 423-433.
- [19] Wu D.H., Chien W.T., Yang C.J., Yen Y.T., *Coupled-field analysis of piezo*electric beam actuator using FEM, Sensors and Actuators A. 118, 2005, 171-176.
- [20] Pietrzakowski M., *Experiment on a cantilever beam control and theoretical approximation*, J. of Theoretical and Applied Mechanics 3, 2004, 667-686.
- [21] Colla E.L., Morita T., *Piezoelectric technology for active vibration control*, Piezoelectric materials in devices, 2002, 123-154.
- [22] Filipek R., Wiciak J., Active and passive structural acoustic control of the smart beam, The European Physical Journal Special Topics 154 (1), 2008, 57-63.