

JAN ŁUCZKO\*

## ZJAWISKO SYNCHRONIZACJI DRGAŃ I WZBUDZENIA ASYNCHRONICZNEGO W OSCYLATORZE LIENARDA

### SYNCHRONIZATION OF VIBRATION AND ASYNCHRONIC EXCITATION IN LIENARD'S OSCILLATOR

#### Streszczenie

W niniejszym artykule zbadano wpływ parametrów oscylatora Lienarda na charakter wzbudzanych drgań. Do wyznaczania zakresów drgań podharmonicznych i prawie okresowych zastosowano metody numerycznego całkowania skojarzone z metodami analizy widmowej. W celu wyjaśnienia zjawiska synchronizacji drgań i wzbudzenia asynchronicznego sporządzono również diagramy bifurkacyjne. Ruch układu zilustrowano na płaszczyznach fazowych. W przypadku niejednoznacznych rozwiązań wyznaczono zbiory przyciągania.

*Słowa kluczowe: drgania nieliniowe, drgania prawie okresowe, bifurkacje, synchronizacja drgań*

#### Abstract

The paper has investigated the influence of the parameters of Lienard's oscillator on the character of the excited vibrations. Methods of numerical integration combined with spectral analysis have been used to determine the regions of subharmonic and quasi-periodic vibration regimes. Bifurcation diagrams have been used to explain the phenomenon of vibration synchronization and that of the asynchronous excitation of vibrations. The motion of the studied system has been illustrated in phase planes. In the case of non-unique solutions an analysis has been performed to determine the basins of attraction.

*Keywords: non-linear vibrations, quasi-periodic vibrations, bifurcation, synchronization*

\* Dr hab. inż. Jan Łuczko, prof. PK, Instytut Mechaniki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska.

## 1. Wstęp

Znaczna część układów samowzbudnych może być opisana równaniami typu van der Pola, Rayleigha lub Lienarda, zawierającymi składnik nieliniowy, będący potęgą funkcją przemieszczeń i prędkości. W pewnych specyficznych przypadkach człon samowzbudny mogą opisywać bardziej złożone funkcje. Przykładem mogą być drgania samowzbudne wałów wywołane destabilizacyjnym wpływem tłumienia wewnętrznego lub sił hydrodynamicznych w łożyskach.

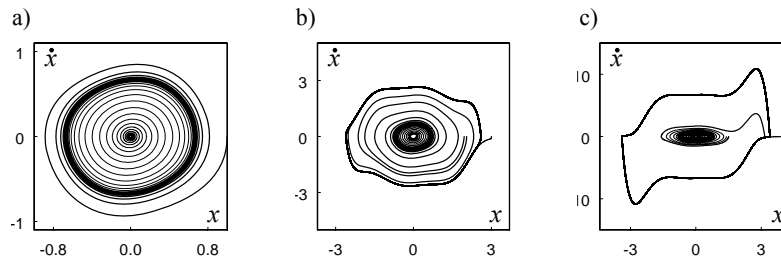
W układach rzeczywistych drgania samowzbudne rzadko zachodzą w czystej postaci, niezakłóconej przez działające na układ wymuszenia zewnętrzne lub parametryczne. Ograniczając się dalej tylko do wymuszeń harmonicznym, rozpatrzmy równanie

$$\ddot{x} + k(1 - \alpha x^2 + \beta x^4 - \gamma x^6)\dot{x} + x = p \cos \omega t \quad (1)$$

opisujące drgania oscylatora Lienarda. W przypadku  $p = 0$  mamy układ autonomiczny. Podstawowym zadaniem jest tu wyznaczenie cyklu granicznego, czyli amplitudy i częstości drgań samowzbudnych. W układzie nieautonomicznym ( $p \neq 0$ ) efektem wymuszeń okresowych są najczęściej drgania prawie okresowe [4], chociaż w pewnych, najczęściej wąskich zakresach częstości i amplitud wymuszenia, można również zaobserwować drgania okresowe. Jest to znane od dawna zjawisko synchronizacji drgań [1, 3].

## 2. Cykle graniczne

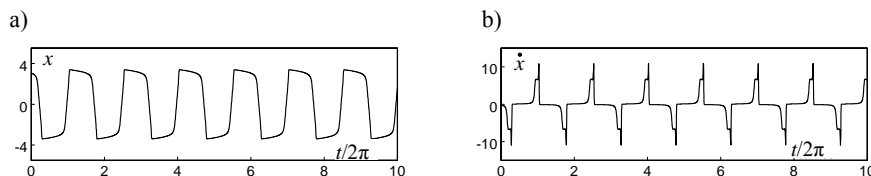
W zależności od wartości parametrów  $k$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  można zaobserwować różne schematy samowzbudzenia. Dla  $k < 0$  położenie równowagi jest niestabilne, przy spełnionych dodatkowych warunkach nałożonych na parametry  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  możemy mieć do czynienia z samowzbudzeniem miękkim. Przykładowo, dla  $\beta = \gamma = 0$  i  $\alpha > 0$  (równanie van der Pola), niezależnie od warunków początkowych, wszystkie trajektorie dążą do jednego stabilnego cyklu granicznego (konfiguracja NS). Dla  $\gamma \neq 0$  mogą występować jeden cykl (konfiguracja NS – rysunek 1a)) lub dwa stabilne cykle graniczne (konfiguracja NSNS – rys. 1b), c)).



Rys. 1. Cykle graniczne ( $k = -0,1$ ,  $\alpha = 10$ ,  $\gamma = 1$ ): a)  $\beta = 5$ , b)  $\beta = 7$ , c)  $\beta = 9$

Fig. 1. Limit cycles ( $k = -0,1$ ,  $\alpha = 10$ ,  $\gamma = 1$ ): a)  $\beta = 5$ , b)  $\beta = 7$ , c)  $\beta = 9$

Drgania o większej amplitudzie, odpowiadające drugiemu cyklowi granicznemu, mają często charakter drgań relaksacyjnych. Dla większych wartości  $\beta$  lub  $|k|$  prędkość nagle się zmienia od wysokiej wartości prawie do zera, co przypomina stan uderzenia (rys. 2). Z tego względu drgania relaksacyjne są czasami traktowane jako proces nieciągły.



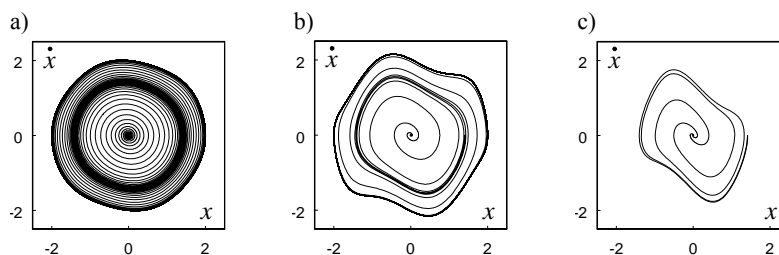
Rys. 2. Drgania relaksacyjne ( $k = -0,1$ ,  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 9$ ,  $\gamma = 1$ ): a) przemieszczenie, b) prędkość

Fig. 2. Relaxing vibrations ( $k = -0,1$ ,  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 9$ ,  $\gamma = 1$ ): a) displacement, b) velocity

Zjawisko samowzbudzenia twardego można wykazać, zakładając w równaniu (1)  $k > 0$ . Wtedy położenie równowagi jest stabilne. Rozpatrzmy dalej przypadek  $\beta = 1$  i  $\gamma = 0$ . Wartości ujemne parametru  $\gamma$  niewiele wnoszą do rozważań, zaś dodatnie nie są wskazane ze względów numerycznych – wtedy rozwiązanie równania (1) może być rozbieżne. Amplitudę cyklu granicznego można oszacować, wykorzystując metodę Galerkin. Po założeniu rozwiązania harmonicznego  $x = a \cos \omega t$  otrzymuje się równanie

$$a^4 - 2\alpha a^2 + 8 = 0 \quad (2)$$

na amplitudy ustalonych drgań. Dla  $\alpha > \sqrt{8}$  równanie (2) ma dwa dodatnie pierwiastki, a więc można się spodziewać wystąpienia dwóch cykli granicznych. Pierwszy, o mniejszej amplitudzie, jest niestabilny, a drugi – o większej – jest stabilny (SNS).



Rys. 3. Cykle graniczne – konfiguracja SNS ( $\alpha = 3$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0$ ): a)  $k = 0,1$ , b)  $k = 0,5$ , c)  $k = 1$

Fig. 3. Limit cycles – configuration SNS ( $\alpha = 3$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0$ ): a)  $k = 0,1$ , b)  $k = 0,5$ , c)  $k = 1$

Drgania samowzбудne występują tylko przy dostatecznie dużym zakłóceniu stanu równowagi, inaczej mówiąc – potrzebny jest pewien impuls, aby przekroczyć barierę niestabilnego cyklu. Przykładowo, dla  $\alpha = 3$  otrzymuje się z równania (2) dla cyklu niestabilnego  $a = \sqrt{2}$ , a dla stabilnego  $a = 2$ . Na rysunku 3 zostały pokazane trajektorie na płaszczyźnie fazowej, otrzymane przy założeniu warunków początkowych  $\dot{x}(0) = 0$  oraz

$x(0) = 1,41 < \sqrt{2}$  lub  $x(0) = 1,42 > \sqrt{2}$ . Dla większych wartości parametru  $k$  obserwuje się drgania relaksacyjne (jak na rys. 2).

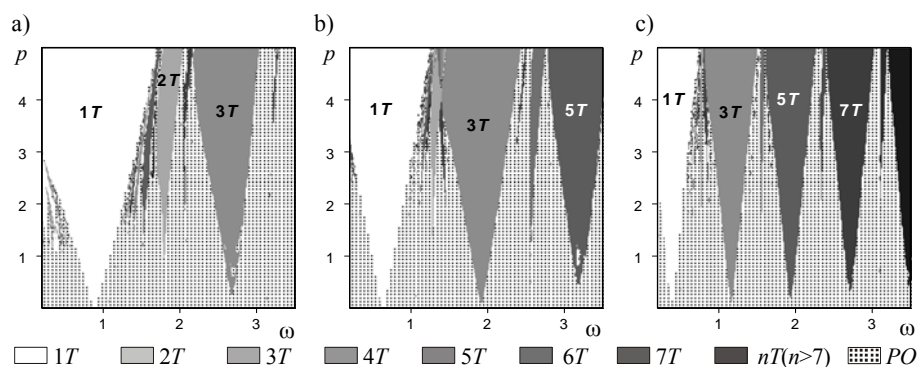
### 3. Zjawisko synchronizacji drgań

Zjawisko synchronizacji drgań było prawdopodobnie pierwszym spośród badanych zjawisk nieliniowych (Huygens). Można je zaobserwować m.in. w układach samowzbudnych z wymuszeniem harmonicznym. Efektem działania siły wymuszającej są drgania prawie okresowe, mające charakter „dudnień”. W miarę zbliżania się częstości wymuszenia do częstości drgań samowzbudnych częstość dudnień wzrasta, ale tylko do pewnej wartości różnicy tych częstości, następnie dudnienia znikają nagle – drgania zachodzą z częstością wymuszenia. Wygląda to tak, jakby częstość drgań samowzbudnych została „wciągnięta” przez częstość wymuszenia (zjawisko „wciągnięcia częstości”).

W celu lepszego zrozumienia zjawiska synchronizacji drgań zbadajmy wpływ parametrów  $\alpha$  i  $\beta$  równania różniczkowego (1). Ustalimy wartości parametrów  $k = -0,1$  i  $\gamma = 1$ . Rozważmy przypadek samowzbudzenia miękkiego.

Na rysunku 4 zilustrowano wpływ częstości i amplitudy wymuszenia na charakter wzbudzanych drgań dla  $\alpha = 1$  (konfiguracja NS) i trzech różnych wartości parametru  $\beta$ . Do analizy zastosowano metody numerycznego całkowania oraz analizy widmowej, a ocena charakteru drgań została przeprowadzona na podstawie kryteriów opisanych w pracy [2].

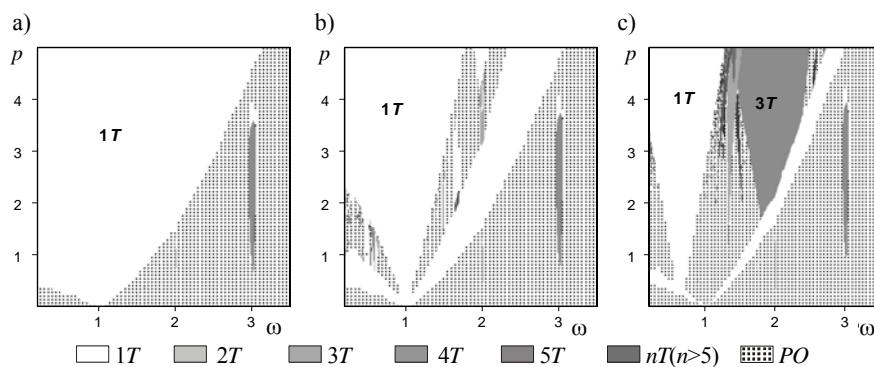
Dla częstości wymuszenia bliskiej częstości drgań samowzbudnych ( $\omega \approx 1$ ) okres drgań jest równy okresowi wymuszenia. Szerokość zakresu drgań  $1T$ -okresowych zależy prawie liniowo od amplitudy siły wymuszającej. Dla większych częstości występują podobne obszary drgań okresowych, ale o większym okresie. Wyraźnie szersze są zakresy drgań o okresie będącym nieparzystą wielokrotnością okresu wymuszenia. Wraz ze zwiększaniem wartości  $\beta$  rośnie liczba obszarów drgań okresowych. W pozostałych obszarach dominują drgania prawie okresowe, będące efektem złożenia drgań samowzbudnych i wymuszonych. Dla mniejszych  $\beta$  ( $\beta < 5$ ) obszary w zakresie wyższych częstości wyraźnie się zmniejszają i zjawisko synchronizacji zachodzi tylko w pobliżu częstości drgań samowzbudnych.



Rys. 4. Wpływ  $\omega$  i  $p$  na charakter drgań ( $k = -0,1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\gamma = 1$ ): a)  $\beta = 5$ , b)  $\beta = 7$ , c)  $\beta = 9$

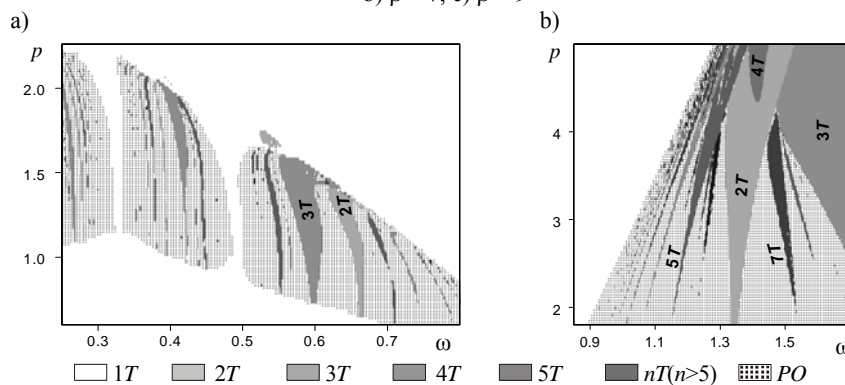
Fig. 4. Influence of  $\omega$  and  $p$  on nature of vibrations ( $k = -0,1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\gamma = 1$ ): a)  $\beta = 5$ , b)  $\beta = 7$ , c)  $\beta = 9$

Dla  $\alpha = 10$  i  $\beta > 7$  (rys. 5b, c)) występują dwa stabilne cykle graniczne (NSNS). Obszary synchronizacji mają teraz bardziej złożone kształty. Dla ustalonej wartości częstości synchronizacja zachodzi po przekroczeniu przez amplitudę wymuszenia pewnej wartości granicznej, jednak z dalszym zwiększaniem tej amplitudy zaczynają się znowu wzbudzać drgania prawie okresowe – jest to wpływ drugiego stabilnego cyklu. Dopiero po przekroczeniu kolejnej wartości granicznej mamy do czynienia z drganiami okresowymi.



Rys. 5. Wpływ  $\omega$  i  $p$  na charakter drgań ( $k = -0,1$ ,  $\alpha = 10$ ,  $\gamma = 1$ ): a)  $\beta = 5$ , b)  $\beta = 7$ , c)  $\beta = 9$

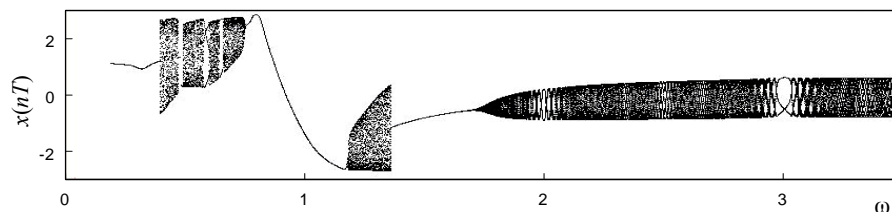
Fig. 5. Influence of  $\omega$  and  $p$  on nature of vibrations ( $k = -0,1$ ,  $\alpha = 10$ ,  $\gamma = 1$ ): a)  $\beta = 5$ , b)  $\beta = 7$ , c)  $\beta = 9$



Rys. 6. Fragmenty obszarów: a) rys. 5b), b) rys. 5c)

Fig. 6. Fragments of the regions: a) Fig. 5b), b) Fig. 5c)

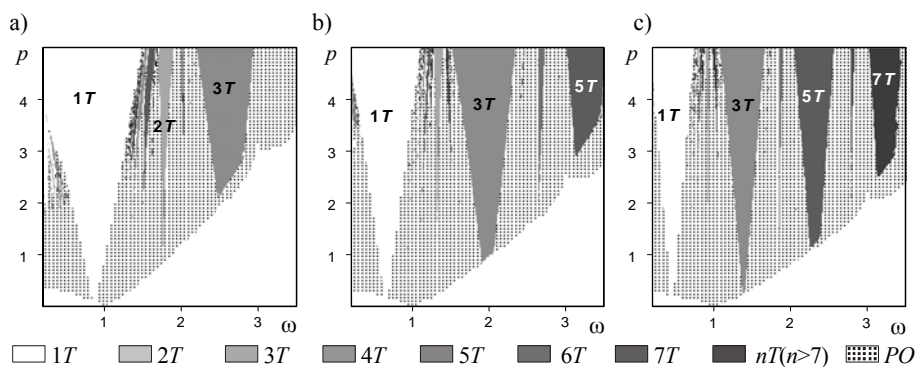
Na rysunku 7 przedstawiono diagram bifurkacyjny, odpowiadający przekrojowi rys. 5b) dla  $p = 1$ . Widoczne są dwa zakresy synchronizacji, w których okres drgań jest równy okresowi wymuszenia. Dla częstości bliskich wartościom 2 i 3 również zachodzi synchronizacja drgań, przy czym okres jest teraz, odpowiednio, dwukrotnie (2 krzywe) i trzykrotnie (3 krzywe) większy od okresu wymuszenia. Dla częstości mniejszych od jedności w pobliżu wartości  $1/2$ ,  $3/5$  i  $2/3$  także obserwuje się w wąskich zakresach drgania  $1T$ -okresowe. W pozostałych zakresach mamy do czynienia z drganiami prawie okresowymi.

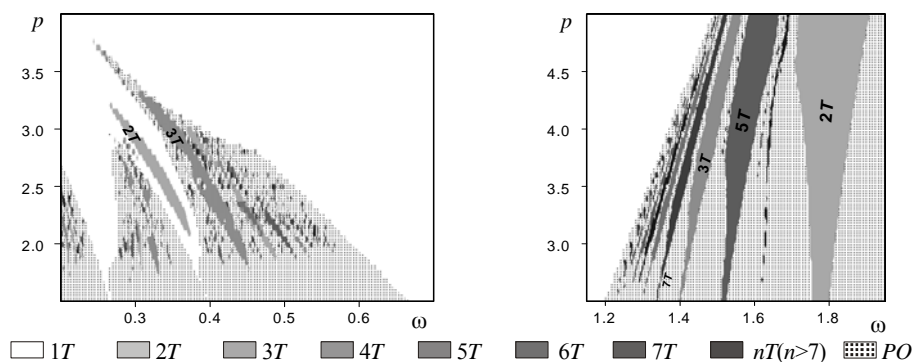
Rys. 7. Diagram bifurkacyjny – wpływ  $\omega$  ( $p = 1, k = -0,1, \alpha = 10, \beta = 7, \gamma = 1$ )Fig. 7. Bifurcation diagram – influence of  $\omega$  ( $p = 1, k = -0,1, \alpha = 10, \beta = 7, \gamma = 1$ )

#### 4. Zjawisko wzbudzenia asynchronicznego

W układach samowzbudnych można również zaobserwować zjawisko wzbudzenia asynchronicznego [3], częściowo podobne do analizowanego w poprzednim punkcie zjawiska synchronizacji drgań. Zachodzi ono w układach z samowzbudzeniem twardym albo w tzw. układach potencjalnie samowzbudnych, czyli w układach zawierających wprowadzić człon samowzbudny, ale niemających cyklu granicznego.

Aby wykazać numerycznie zjawisko wzbudzenia asynchronicznego, rozpatrzmy równanie (1) dla  $k > 0$ . Założymy  $\gamma = 0$  oraz  $\beta = 1$ . Rezultaty obliczeń numerycznych, uzyskane dla trzech stosunkowo dużych wartości parametru  $\alpha$  (konfiguracja SNS), zostały przedstawione na rys. 8. Dla małych wartości amplitudy wymuszenia drgania są okresowe, odwrotnie niż w układach z samowzbudzeniem miękkim (rys. 5). Dopiero po przekroczeniu przez amplitudę  $p$  pewnej granicznej wartości, zależnej od  $\omega$ , wzbudzają się drgania samowzbudne. Rezultatem złożenia tych drgań z drganiami o częstotliwości wymuszenia są drgania prawie okresowe. Z dalszym zwiększaniem amplitudy  $p$  ujawnia się zjawisko synchronizacji. Porównując wyniki z pokazanymi na rys. 5, można tu zauważyć analogie. Zakresy drgań okresowych o okresie będącym nieparzystą wielokrotnością okresu wymuszenia są znacznie szersze od pozostałych zakresów drgań okresowych.

Rys. 8. Wpływ  $\omega$  i  $p$  na charakter drgań ( $k = 0,1, \beta = 1, \gamma = 0$ ): a)  $\alpha = 8$ , b)  $\alpha = 12$ , c)  $\alpha = 16$ Fig. 8. Influence of  $\omega$  and  $q$  on nature of vibrations ( $k = 0,1, \beta = 1, \gamma = 0$ ): a)  $\alpha = 8$ , b)  $\alpha = 12$ , c)  $\alpha = 16$



Rys. 9. Fragmenty rysunku 8a)

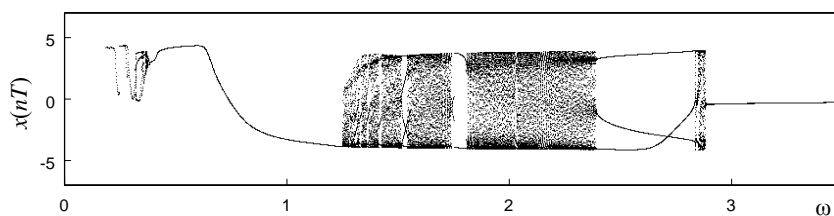
Fig. 9. Fragments of picture 8a)

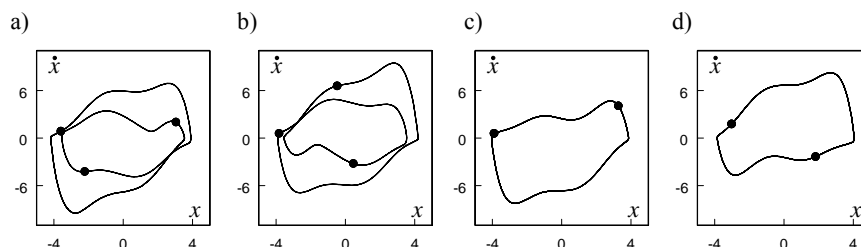
Na rysunku 10 przedstawiono wybrany wykres bifurkacyjny, odpowiadający przekrojowi obszaru  $(\omega, p)$  dla  $\alpha = 8$  (rys. 8a)) oraz  $p = 3$ . W szerokim zakresie parametru  $\omega$  maksymalne wychylenia praktycznie nie zależą od częstości wymuszenia. W zakresach rozwiązań prawie okresowych mamy do czynienia z drganiami relaksacyjnymi – świadczy o tym większe zagęszczenie punktów w pobliżu wartości maksymalnych i minimalnych przemieszczeń. W zakresach, w których obserwuje się układ pojedynczych linii, uwidacznia się zjawisko synchronizacji drgań.

W układach samowzbudnych, w porównaniu z innymi układami nieliniowymi, rozwiązania w stanie ustalonym rzadko zależą od warunków początkowych. Przykładowo, analizując rozwiązania odpowiadające kolejnym punktom diagramu (rys. 10), można wykazać, że tylko w pobliżu  $\omega = 1,42$  oraz  $\omega = 1,8$  istnieją dwa różne (choć nieco podobne) cykle graniczne. Dla  $\omega = 1,42$  cykle opisują drgania  $3T$ -okresowe (rys. 11 a, b), natomiast dla  $\omega = 1,8$  obserwujemy drgania  $2T$ -okresowe (rys. 11c, d)). Trajektorie fazowe otrzymano tu, startując z położenia zerowego  $x(0) = 0$  z różnymi prędkościami.

Zbiory warunków początkowych (baseny przyciągania), zapewniających dojście do odpowiedniego cyklu pokazano na rys. 12.

Dla znacznie mniejszych wartości parametru  $\alpha$  układ autonomiczny (bez wymuszenia) ma tylko jeden stabilny cykl graniczny (konfiguracja SNS) lub w ogóle ich nie posiada (konfiguracja S). Ten ostatni przypadek ma miejsce np. dla  $\alpha = 2,7$  (układ potencjalnie samowzbudny).

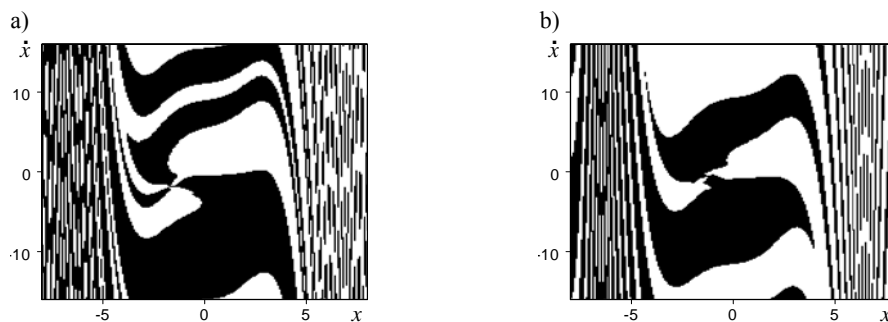
Rys. 10. Diagram bifurkacyjny ( $p = 3, k = 0,1, \alpha = 8, \beta = 1, \gamma = 0$ )Fig. 10. Bifurcation diagram ( $p = 3, k = 0,1, \alpha = 8, \beta = 1, \gamma = 0$ )



Rys. 11. Portrety fazowe: a)  $\omega = 1,42$ ,  $\dot{x}_0 = 1$ , b)  $\omega = 1,42$ ,  $\dot{x}_0 = -1$ , c)  $\omega = 1,8$ ,  $\dot{x}_0 = 1$ , d)  $\omega = 1,8$ ,  $\dot{x}_0 = -1$

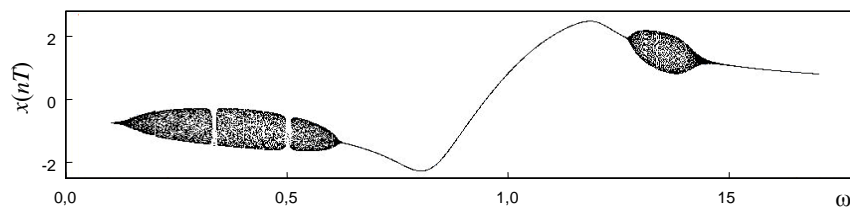
Fig. 11. Phase portraits: a)  $\omega = 1,42$ ,  $\dot{x}_0 = 1$ , b)  $\omega = 1,42$ ,  $\dot{x}_0 = -1$ , c)  $\omega = 1,8$ ,  $\dot{x}_0 = 1$ , d)  $\omega = 1,8$ ,  $\dot{x}_0 = -1$

Pomimo braku cyklu granicznego układ wykazuje cechy typowe dla układu samowzbudnego. Cechy te ujawniają się jednak dopiero w obecności zewnętrznego wymuszenia. Efektem są drgania prawie okresowe zauważalne na pokazanym na rys. 14 diagramie bifurkacyjnym. Analizując dokładniej diagram, można stwierdzić występowanie w zakresach drgań prawie okresowych wąskich zakresów drgań okresowych w pobliżu częstości  $1/5$ ,  $1/3$  i  $1/2$  oraz jeszcze węższych w zakresie wyższych częstości, widocznych dopiero na powiększonych fragmentach diagramu.



Rys. 12. Zbiory przyciągania ( $p = 3$ ,  $k = 0,1$ ,  $\alpha = 8$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0$ ): a)  $\omega = 1,42$ , b)  $\omega = 1,8$

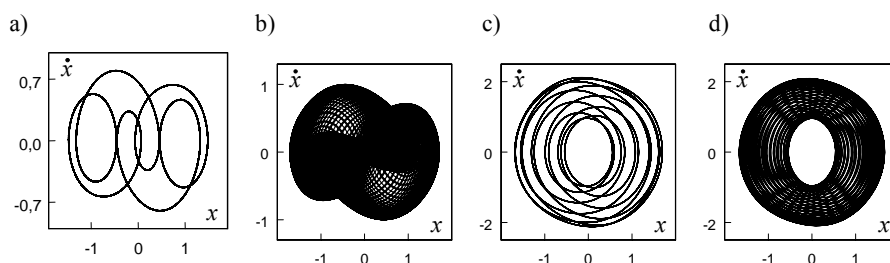
Fig. 12. Basins phase portraits ( $p = 3$ ,  $k = 0,1$ ,  $\alpha = 8$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0$ ): a)  $\omega = 1,42$ , b)  $\omega = 1,8$



Rys. 13. Diagram bifurkacyjny ( $p = 1$ ,  $k = -0,1$ ,  $\alpha = 2,7$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0$ )

Fig. 13. Bifurcation diagram ( $p = 1$ ,  $k = -0,1$ ,  $\alpha = 2,7$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0$ )





Rys. 14. Płaszczyzny fazowe: a)  $\omega = 0,2$ , b)  $\omega = 0,34$ , c)  $\omega = 1,3755$ , d)  $\omega = 1,38$

Fig. 14. Phase planes: a)  $\omega = 0,2$ , b)  $\omega = 0,34$ , c)  $\omega = 1,3755$ , d)  $\omega = 1,38$

Przykładowo, dla  $\omega = 0,2$  okres drgań jest równy okresowi wymuszenia, jednak drgania te odbiegają znacznie od drgań harmoniczných, o czym świadczą złożone trajektorie fazowe (rys. 14a)). Dla  $\omega = 1,3755$  drgania też są okresowe – są to drgania podharmoniczne typu 1:11 (rys. 14c)). Dwa pozostałe przypadki pokazane na rys. 14b) i d) ilustrują drgania prawie okresowe. Porównanie rysunków 14c) i d) pokazuje, że bardzo mała zmiana wartości parametru może powodować zmianę charakteru drgań – z tej też przyczyny trudno jest czasami, analizując widmo sygnału, stwierdzić jednoznacznie, z jakim typem drgań mamy do czynienia.

## 5. Podsumowanie

W artykule wykazano, że w układach z samowzbudzeniem miękkim zachodzi zjawisko synchronizacji drgań, a w układach z samowzbudzeniem twardym zjawisko wzbudzenia asynchronicznego. Szerokości zakresów częstości, w których te zjawiska występują, rosną wraz ze wzrostem amplitudy wymuszenia. Szersze są zakresy, w których wzbudzają się drgania podharmoniczne nieparzystego rzędu. W pozostałych zakresach dominują drgania prawie okresowe.

## Literatura

- [1] Hayashi Ch., *Drgania nieliniowe w układach fizycznych*, WNT, Warszawa 1968.
- [2] Łuczko J., *Metody numeryczne wyznaczania zakresów drgań podharmonicznych i chaotycznych*, Czasopismo Techniczne z. 11-M/2006, Kraków 2006, 39-62.
- [3] Minorsky N., *Drgania nieliniowe*, PWN, Warszawa 1967.
- [4] Warmiński J., *Drgania regularne i chaotyczne układów parametryczno-samowzbudnych z idealnymi i nieidealnymi źródłami energii*, Politechnika Lubelska, Lublin 2001.