

ANTONI GAJEWSKI\*

## NIEKONSERWATYWNE PROBLEMY STATECZNOŚCI PŁYT PIERŚCIENIOWYCH

### NON-CONSERVATIVE STABILITY PROBLEMS OF ANNULAR PLATES

#### Streszczenie

W niniejszym artykule: 1 – zbadano zależności krzywych charakterystycznych (tzn. zależności części rzeczywistej i części urojonej zespolonej częstości drgań od obciążenia) od współczynnika śledzenia dla pierścieniowej płyty o stałej grubości, ściskanej niekonservatywnymi siłami równomiernie rozłożonymi na brzegu zewnętrznym płyty, w warunkach nieliniowego pełzania; 2 – wyznaczono zależności obciążenia krytycznego od współczynnika śledzenia; 3 – zbadano wpływ nieliniowych własności reologicznych materiału płyty na jej stateczność i drgania. Aby zastosować kinetyczne kryterium stateczności, analizowano małe, liniowe drgania ukła-du, nałożone na stan przedkrytyczny (stan membranowy) płyty. Obciążenie krytyczne określano na podstawie kryterium Lyapunowa.

*Słowa kluczowe: płyty pierścieniowe, stateczność, drgania, niekonservatywne zagadnienia*

#### Abstract

In the paper the following problems have been considered: 1 – the dependence of the characteristic curves (i.e. real and imaginary parts of complex frequencies of vibration versus the compressive force) on the tangency coefficient for an annular plate of constant thickness, compressed by uniformly distributed non-conservative loadings; 2 – the relationship between the critical loading and the tangency coefficient; 3 – the influence of non-linear rheological properties of material on vibration and stability of the plate. In order to use the kinetic criterion of stability, the small, linear vibrations superposed on the pre-critical membrane state have been analyzed. The critical loading has been determined on the basis of Lyapunov criterion.

*Keywords: annular plates, stability, vibration, non-conservative problems*

\*Prof. dr hab. inż. Antoni Gajewski, Instytut Fizyki, Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki Stosowanej, Politechnika Krakowska.

## 1. Wstęp

### 1.1. Niekonserwatywne zagadnienia stateczności sprężystych elementów konstrukcyjnych

Stateczność niekonserwatywnych układów sprężystych była rozważana po raz pierwszy w 1928 r. przez Nikolai [24], który badał skrećanie pręta prostego momentem o kierunku wektora stycznym do osi nieutwierdzonego końca pręta. Jednak gwałtowny rozwój problemów niekonserwatywnych nastąpił dopiero po 1952 r., w którym Beck [1] zastosował kinetyczne kryterium stateczności w odniesieniu do jednostronnie utwierdzonego pręta przyrządkowego, ściskanego stałą siłą o kierunku stycznym do osi pręta na swobodnym końcu. Jest to tzw. **siła śledząca** (tangencjalna), której kierunek zależy od przemieszczeń (kąta ugięcia osi pręta na swobodnym końcu). Zagadnienie Becka ma istotne znaczenie ze względu na zastosowania praktyczne, bowiem taki charakter ma stała siła ciągu rakiety lub stała siła reakcji strumienia płynu wypływającego przez koniec przewodu rurowego. W tych przypadkach układy sprężyste mogą być niekonserwatywne, nie tylko z powodu dysypatywności układu lub zależności od czasu działających obciążeń.

Literatura poświęcona problemom stateczności i optymalizacji kształtu prętów ściskanych siłą śledzącą jest bardzo obszerna i została szeroko omówiona np. w pracach: Bogacza i Janiszewskiego [3] (1987), Gajewskiego i Życzkowskiego [15] (1988), Przybylskiego [25] (2002), Elishakoffa [6] (2005) i in. Z punktu widzenia niniejszego artykułu istotne znaczenie mają uogólnienia wprowadzone przez Kordasa i Życzkowskiego [19] (1963), dotyczące opisu kierunku ściskającej siły niekonserwatywnej, działającej na swobodny koniec pręta. Autorzy wprowadzili tzw. współczynnik śledzenia  $\eta$ , który został zdefiniowany jako stosunek kąta zawartego między kierunkiem siły i kierunkiem nieodkształconej osi pręta do kąta zawartego między styczną do osi pręta na jego swobodnym końcu i nieodkształconej osi pręta.

Stosownie do przedziału, w którym leżą wartości współczynnika śledzenia, wprowadzono również odpowiednią terminologię dla działającej siły. Tak więc gdy  $\eta < 0$  siłę nazwano przeciwsledzącą, gdy  $\eta = 0$  jest to siła eulerowska, gdy  $0 < \eta < 1$  siła jest podsledzącą, gdy  $\eta = 1$  siła jest śledzącą (tangencjalna) oraz gdy  $\eta > 1$  siłę nazwano nadśledzącą. Również, w zależności od wartości współczynnika śledzenia, mamy do czynienia z różnymi sposobami utraty stateczności pręta przyrządkowego: dla  $\eta \leq 0$  jest to wyboczenie (dywergencja), dla  $0 < \eta < 1$  może to być wyboczenie lub flutter, dla  $\eta \geq 1$  jest to zawsze flutter. Po raz pierwszy przedstawiono zależność siły krytycznej od współczynnika śledzenia dla pręta przyrządkowego, ściskanego siłą nadśledzącą.

Znacznie mniejsza liczba prac dotyczy problemów stateczności sprężystych płyt pierścieniowych, ściskanych równomiernie rozłożonymi na brzegu zewnętrznym siłami śledzącymi. Po raz pierwszy stateczność i drgania płyt pierścieniowych o zmiennej grubości były badane w pracy Irie, Yamada i Kaneko [18] (1980). Następnie Gajewski i Cupiał [13] (1992) przedstawili rozwiązanie problemu optymalizacji grubości sprężystej płyty pierścieniowej, poddanej ściskaniu równomiernie rozłożonymi siłami śledzącymi działającymi na jej brzegu zewnętrznym, przy warunku maksymalizacji obciążenia krytycznego i warunku stałej objętości. W pracy tej autorzy uwzględnili także równania stanu przedkrytycznego.

## 1.2. Niekonserwatywne zagadnienia stateczności i optymalizacji elementów konstrukcyjnych w warunkach pełzania

Podstawy problematyki optymalnego kształtowania konstrukcji w warunkach pełzania zostały sformułowane przez Życzkowskiego [37] (1996). W przypadku zagadnień niekonserwatywnych własności reologiczne materiału są związane z tłumieniem wewnętrznym drgań oraz z odkrytym przez Zoriya i Leonowa [36] (1961) interesującym efektem destabilizacji. O ile tłumienie zewnętrzne drgań podnosi wartość niekonserwatywnego obciążenia krytycznego (flutteru), to tłumienie wewnętrzne materiału (nawet nieskończenie małe) powoduje gwałtowny spadek tego obciążenia. Jak wykazano w pracach Gajewskiego i Życzkowskiego [7,14] (1972), wielkość efektu destabilizacji zależy jednak od stosunku parametrów charakteryzujących tłumienie zewnętrzne i wewnętrzne, gdy oba te parametry zmierzają do zera. Przeprowadzone badania eksperymentalne (cf. Yagn, Parshin [34] (1966), Sugiyama i in. [30,31] (1999, 2000)) wykazują, że wartości siły krytycznej dla układów z tłumieniem wewnętrznym są zbliżone do siły krytycznej obliczonej dla układów bez tłumienia. Stąd też pojawiły się pewne nowe kryteria kinetycznej utraty stateczności, związane z przyjęciem określonego wzrostu amplitudy drgań tłumionych (inkrementu amplitudy drgań). Jedno z takich kryteriów zaproponowano w pracy Sugiyamy i in. [29] (1995).

W wielu pracach badano również wpływ wewnętrznego tłumienia materiału na optymalne kształty ściskanych prętów, obciążonych siłami śledzącymi. Z reguły tłumienie wewnętrzne materiału było opisywane za pomocą liniowego modelu reologicznego Voigta–Kelvina. Przegląd tych prac zawiera monografia Przybylskiego [25].

Stateczność przyrzmatycznych prętów ściskanych niekonserwatywną siłą śledzącą, wykonanych z materiału wykazującego nieliniowe własności reologiczne, była badana po raz pierwszy przez Życzkowskiego i Kowalskiego [39] (1984). Wpływ nieliniowych własności reologicznych materiału na tzw. **krzywe charakterystyczne** (zależność części rzeczywistej i części urojonej zespolonej częstości drgań od wielkości obciążenia ściskającego) w przypadku przyrzmatycznego pręta ściskanego siłą śledzącą przedstawiono w pracy Gajewskiego [9] (2000). Uwzględniono w niej wiele dodatkowych efektów, a mianowicie: ściśliwość osi pręta, tłumienie zewnętrzne oraz bezwładność obrotu przekroju poprzecznego.

Próbie optymalizacji sprężystego pręta ściskanego siłą niekonserwatywną podjęto po raz pierwszy w pracy Życzkowskiego i Gajewskiego [38] (1969). Ograniczono się jednak do zakresu siły podśledzającej i przeciwsledzającej, dla których wystarczające jest stosowanie statycznego kryterium stateczności. Optymalne kształtowanie sprężystego pręta ściskanego siłą śledzącą (tangencjalną), dla której konieczne jest stosowanie kinetycznego kryterium stateczności, badano przede wszystkim w pracach Claudona [4] (1975), Hanaoki i Washizu [17] (1980) oraz Błachuta i Gajewskiego [2] (1980). Wiele innych, pokrewnych zagadnień omówiono w pracy Bogacza i Janiszewskiego [3]. Z nowszych badań należy wymienić wyniki zamieszczone w pracach: Ringertza [28] (1994), Langthjema i Sugiyamy [20, 21, 22] (1999, 2000) oraz Langthjema, Sugiyamy, Kobayashiego i Yutani [23] (2000).

Z kolei wpływ nieliniowych własności reologicznych materiału na krzywe charakterystyczne w przypadku nieprzyrzmatycznego lub optymalnie ukształtowanego pręta ściskanego siłą śledzącą (tangencjalną) przedstawiono w pracy Gajewskiego [8] (1997). W dalszym ciągu badania te uogólniono na zagadnienia poszukiwania krzywych charakterystycznych dla pręta optymalnego w zależności od wartości współczynnika śledzenia (Gajewski [10],

(2001)). Na tej podstawie otrzymano zależność siły krytycznej od współczynnika śledzenia dla wybranych wartości parametrów, charakteryzujących nieliniowe pełzanie materiału.

Stateczności i drganiom płyty pierścieniowej o zmiennej grubości, ściskanej równomiernie rozłożonymi siłami śledzącymi, w warunkach nieliniowego pełzania poświęcona jest praca Gajewskiego [11] (2002). Podjęto w niej również próbę optymalizacji parametrycznej płyty ze względu na stateczność, jednak ograniczono się tylko do przypadku obciążenia siłą śledzącą (tangencjalną:  $\eta = 1$ ).

### 1.3. Cel i zakres pracy

Główne cele niniejszego artykułu to: 1 – zbadanie zależności krzywych charakterystycznych od współczynnika śledzenia dla pierścieniowej płyty o stałej grubości, ściskanej niekonserwatywnymi siłami równomiernie rozłożonymi na brzegu zewnętrznym płyty, w warunkach nieliniowego pełzania; 2 – wyznaczenie zależności obciążenia krytycznego od współczynnika śledzenia; 3 – zbadanie wpływu nieliniowych własności reologicznych materiału płyty na jej stateczność i drgania. Aby zastosować kinetyczne kryterium stateczności, należy analizować tu małe drgania układu nałożone na stan przedkrytyczny (stan membranowy) płyty. Jeżeli części rzeczywiste wszystkich zespolonych częstości drgań są ujemne, to układ jest stateczny (stabilny). Jeżeli część rzeczywista przynajmniej jednej zespolonej częstości drgań staje się dodatnia, to układ traci stateczność (w sensie asymptotycznym – Lapunowa). Gdy równocześnie odpowiednia część urojona zespolonej częstości drgań jest różna od zera, to drgania układu zmieniają swoje amplitudy z malejących na rosnące i układ traci stateczność przez tzw. flutter. Zagadnienie brzegowe stanu przedkrytycznego oraz zagadnienie brzegowe małych drgań układu pozwalają na wyznaczenie zależności części rzeczywistej i części urojonej zespolonej częstości drgań od wielkości obciążenia ściskającego, czyli wyznaczenie krzywych charakterystycznych. Wszystkie podstawowe równania, wymagane do zrealizowania wymienionych celów, przedstawione zostały w pracy autora [11] (2002). W niniejszym artykule zostaną one zaprezentowane w skróconej formie.

## 2. Konstytutywne równania pełzania

Konstytutywne równania nieliniowego pełzania w stanie przedkrytycznym płyty przyjmujemy (zgodnie z hipotezą Davenporta [5] (1938) zaadaptowaną przez Wróblewskiego [32] (1992)) w postaci

$$\Phi(\bar{\sigma}_e, \varepsilon_e^c, \dot{\varepsilon}_e^c) = 0, \quad \varepsilon_e^c = \varepsilon_e - \frac{\bar{\sigma}_e}{E}, \quad \varepsilon_e^2 = \frac{2}{3} e_{ij} e_{ij}, \quad \bar{\sigma}_e^2 = \frac{3}{2} \bar{s}_{ij} \bar{s}_{ij} \quad (1)$$

gdzie:

- $\varepsilon_e^c$  – oznacza intensywność odkształceń niesprężystych,
- $\varepsilon_e$  – intensywność odkształceń całkowitych,
- $\bar{\sigma}_e$  – intensywność naprężeń,
- $\bar{s}_{ij}, e_{ij}$  – dewiatory naprężeń i odkształceń.

Kropka oznacza różniczkowanie względem czasu, a nadkreślenia nad symbolami oznaczają wielkości wymiarowe. W celu wyznaczenia krzywych charakterystycznych nałożymy na stan przedkrytyczny (statyczny) małe wariacje stanu naprężenia i odkształcenia w postaci opisującej małe, liniowe drgania układu, o zespolonej częstości kołowej, w postaci

$$\delta \varepsilon_e = \delta \varepsilon_e^a e^{\bar{\Omega} t}, \quad \delta \bar{\sigma}_e = \delta \bar{\sigma}_e^a e^{\bar{\Omega} t}, \quad \bar{\Omega} = \bar{\delta} + i \bar{\omega} \quad (2)$$

Na podstawie równań (1) i (2) wprowadzamy tzw. styczny moduł pełzania, określony wzorem

$$\bar{E}_t = \frac{\delta \bar{\sigma}_e}{\delta \varepsilon_e} = \frac{\delta \bar{\sigma}_e^a}{\delta \varepsilon_e^a} = \frac{\left( \bar{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varepsilon}_e^c} \Big|_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_e^c} \Big|_0 \right)}{\left( \frac{\bar{\Omega}}{\bar{E}} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varepsilon}_e^c} \Big|_0 + \frac{1}{\bar{E}} \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_e^c} \Big|_0 - \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\sigma}_e} \Big|_0 \right)} \quad (3)$$

Ma on istotne znaczenie w teorii stateczności w warunkach pełzania, sformułowanej przez Rabotnowa–Shesterikowa [27] (1957), którą będziemy tu stosowali. Natomiast w stanie przedkrytycznym zasadniczą rolę odgrywa tzw. sieczny moduł pełzania, zdefiniowany wzorem

$$\bar{E}_s = \frac{\bar{\sigma}_e}{\varepsilon_e} \quad (4)$$

i obliczany bezpośrednio z równania (1). Wobec tego można zauważyć, że „styczny” moduł pełzania jest wielkością zespoloną, natomiast moduł „sieczny” jest wielkością rzeczywistą.

W celu wykonania efektywnych obliczeń konieczne jest przyjęcie konkretnego prawa pełzania. Analogicznie do pracy Wróblewskiego i Życzkowskiego [33] (1989) ograniczymy nasze rozważania do fizycznego prawa pełzania, zaproponowanego przez Rabotnowa [26] (1966)

$$\Phi(\bar{\sigma}_e, \varepsilon_e^c, \dot{\varepsilon}_e^c) = \dot{\varepsilon}_e^c (\varepsilon_e^c)^\mu - \Gamma \bar{\sigma}_e^n = 0 \quad (5)$$

w którym  $\Gamma$ ,  $\mu$ ,  $n$  są stałymi materiałowymi (na ogół zależnymi od temperatury). W szczególności wartości stałych materiałowych dla miedzi w temperaturze 200°C zostały podane w pracy Zhukova i in. [35] (1953) i wynoszą:  $n = 32,8$ ,  $\mu = 9,52$ ,  $\bar{E}_0 = 1,22 \cdot 10^5$  MPa,  $\Gamma = 2,18 \cdot 10^{-113+n}$  MPa $^{-n} h^{-1}$ . Na podstawie równań (1), (3), (4) i (5) możemy wyznaczyć moduł „sieczny” i moduł „styczny”, które zapiszemy w postaci bezwymiarowej

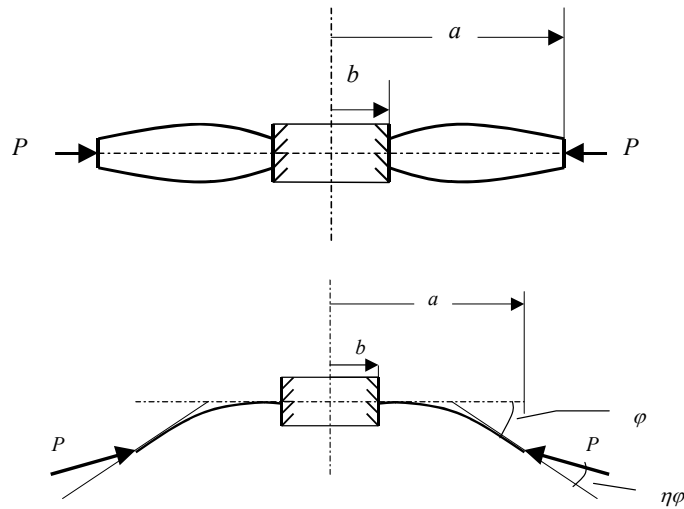
$$E_s = \frac{\bar{E}_s}{\bar{E}_0} = \frac{\bar{E}}{\bar{E}_0 \{1 + \bar{E} [(1 + \mu) \Gamma \bar{t}^*]^{1/(1+\mu)} \bar{\sigma}_e^{(n-1-\mu)/(1+\mu)}\}} \quad (6)$$

$$E_t = \frac{\bar{E} \left( 1 + \frac{1 + \mu}{\mu} \bar{t}_* \bar{\Omega} \right)}{\bar{E}_0 \left\{ 1 + \frac{1 + \mu}{\mu} \bar{t}_* \bar{\Omega} + \frac{n(1 + \mu)}{\mu} \bar{t}_* \Gamma \bar{E} [(1 + \mu) \Gamma \bar{t}_*]^{-\mu/(1+\mu)} \bar{\sigma}_e^{(n-1-\mu)/(1+\mu)} \right\}} \quad (7)$$

Moduł „sieczny” jest zależny od czasu krytycznego  $\bar{t}_*$ , natomiast moduł „styczny” od czasu krytycznego i od zespolonej częstości drgań  $\bar{\Omega}$ .  $\bar{E}_0$  jest pewną stałą o wymiarze naprężenia.

### 3. Równania stanu

Rozważamy izotropową, cienką płytę pierścieniową o zmiennej grubości, zamocowaną na brzegu wewnętrznym i obciążoną równomiernie rozłożonymi siłami niekonserwatywnymi na brzegu zewnętrznym. Zakładamy przy tym, że grubość płyty jest osiowo symetryczna, tzn. zależy tylko od zmiennej radialnej (rys. 1). Nie wchodząc w szczegóły wyprowadzeń układów równań stanu przedkrytycznego i równań nałożonych na niego liniowych drgań (szczegóły można znaleźć w pracy [11]), zapiszemy oba zagadnienia brzegowe w postaci bezwymiarowej.



Rys. 1. Płyta pierścieniowa o zmiennej grubości  
Fig. 1. Annular plate of variable thickness

#### 3.1. Nieliniowe zagadnienie brzegowe stanu przedkrytycznego

$$u' = -\frac{1}{2x}u + \frac{3}{4xhE_s}n, \quad n' = \frac{hE_s}{x}u + \frac{1}{2x}n, \quad u(\beta) = 0, \quad n(1) = 1 \quad (8)$$

$$n_r = \frac{n}{x}, \quad n_\theta = \frac{hE_s}{x}u + \frac{1}{2x}n, \quad n_e = \sqrt{\frac{n^2}{x^2} + n_\theta^2} - \frac{n}{x}n_\theta, \quad E_s = \frac{e}{1 + T\left(\frac{Pn_e}{h}\right)^{(n-1-\mu)/(1+\mu)}} \quad (9)$$

Wprowadzono tu następujące zmienne i parametry bezwymiarowe

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \bar{a}x, & \bar{u} &= -\frac{\bar{P}\bar{a}}{\bar{E}_0\bar{h}_0}u, & \bar{N} &= \bar{r}\bar{N}_r = -\bar{P}\bar{a}n, & \bar{N}_r &= -\bar{P}n_r, & \bar{N}_\theta &= -\bar{P}n_\theta \\ \bar{P} &= \frac{\bar{E}_0\bar{h}_0^3}{9\bar{a}^2}P, & \beta &= \frac{\bar{b}}{\bar{a}}, & \alpha &= \frac{\bar{h}_0^2}{9\bar{a}^2}, & \bar{E} &= \bar{E}_0e(x), & \bar{h} &= \bar{h}_0h(x) \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie:

- $u(x)$  – przemieszczenie radialne,
- $n(x)$  – iloczyn zmiennej radialnej i gęstości siły ściskającej,
- $h(x)$  – bezwymiarowa grubość płyty,
- $e(x)$  – funkcja niejednorodności stałej  $\bar{E}$ ,
- $\alpha$  – stały parametr smukłości płyty,
- $\beta$  – stosunek promienia wewnętrznego do zewnętrznego płyty pierścieniowej,
- $P$  – wielkość obciążenia zewnętrznego,
- $E_s$  – bezwymiarowy moduł sieczny.

Stała  $T$ , związana z prawem fizycznym, jest określona równaniem (16).

### 3.2. Zagadnienie brzegowe liniowych drgań

Po rozdzieleniu zmiennej radialnej i zmiennej obwodowej równania opisujące małe, liniowe drgania nałożone na stan przedkrytyczny można sprowadzić do czterech zwyczajnych liniowych równań różniczkowych, zawierających zespolone współczynniki oraz liczbę fal obwodowych  $m$

$$\begin{aligned} w' &= \varphi \\ \varphi' &= \left( \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{m^2}{x^2} - \frac{Pn}{2a_{11}E_s h^3 x} \right) w - \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{1}{x} \varphi - \frac{1}{a_{11}E_s h^3 x} M \\ M' &= \left\{ \left( 2a_{33} + \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}} \right) E_s h^3 \frac{m^2}{x^2} - P \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \right) \frac{n}{x} + \frac{1}{2} E_s h \frac{u}{x} \right] \right\} w - \\ &\quad - \left( 2m^2 a_{33} + \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}} \right) \frac{E_s h^3}{x} \varphi + \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{1}{x} M + Q \\ Q' &= \left\{ m^2 \left( 2a_{33} + m^2 \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}} \right) \frac{E_s h^3}{x^3} - P \left[ m^2 \frac{E_s h}{x^2} u + \frac{m^2}{2x^2} \left( 1 - \frac{2a_{12}}{a_{11}} \right) n + \frac{Pn^2}{4a_{11}E_s h^3} \right] \right\} w + \\ &\quad + (\gamma_0 \gamma x \Omega + \rho x h \Omega^2) w - \left\{ \left( 2a_{33} + \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}} \right) E_s h^3 \frac{m^2}{x^2} - P \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \right) \frac{n}{x} + \frac{1}{2} E_s h \frac{u}{x} \right] \right\} \varphi + \\ &\quad + \left( \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{m^2}{x^2} - \frac{Pn}{2a_{11}E_s h^3 x} \right) M \end{aligned} \quad (11)$$

do których należy dołączyć odpowiednie warunki brzegowe

$$w(\beta) = 0, \quad \varphi(\beta) = 0, \quad M(1) + \frac{1}{2}Pw(1) = 0, \quad Q(1) + \left(\eta - \frac{1}{2}\right)P\varphi(1) = 0 \quad (12)$$

W powyższych równaniach wprowadzono następujące wielkości bezwymiarowe:

– funkcje stanu

ugięcie płyty –  $w(x)$ , kąt ugięcia powierzchni środkowej wzdłuż promienia –  $\varphi(x)$  oraz zmienne stanu  $M(x)$  i  $Q(x)$ , powiązane z siłami wewnętrznymi za pomocą podstawień, zaproponowanych przez Grineva i Filippova [16],

– zmienne niezależne i stałe parametry

$$x = \frac{\bar{r}}{\bar{a}}, \quad t = \frac{\bar{t}}{t_0}, \quad \alpha = \frac{\bar{h}_0^2}{9\bar{a}^2}, \quad \bar{t}_0 = \sqrt{\frac{9\bar{\rho}_0\bar{a}^4}{\bar{h}_0^2\bar{E}_0}} = \sqrt{\frac{\bar{\rho}_0\bar{a}^2}{\alpha\bar{E}_0}} \quad (13)$$

– siła ściskająca i zespolona częstość drgań

$$P = \frac{9\bar{P}\bar{a}^2}{\bar{E}_0\bar{h}_0^3}, \quad \Omega = \bar{\Omega}\bar{t}_0, \quad \Omega = \delta + i\omega \quad (14)$$

– rozkłady gęstości masy, tłumienia zewnętrznego i modułu Younga

$$\rho(x) = \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_0}, \quad \gamma(x) = \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}_0}, \quad e = \frac{\bar{E}}{\bar{E}_0} \quad (15)$$

– wielkości związane z prawem fizycznym

$$T_{00} = e \left[ (1 + \mu) \Gamma \bar{E}_0^n \bar{\tau}_0 \right]^{1/(1+\mu)} \alpha_0^{(n-1-\mu)/(1+\mu)}, \quad T = T_{00} \left( \frac{\bar{\tau}}{\bar{\tau}_0} \right)^{1/(1+\mu)} \left( \frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^{(n-1-\mu)/(1+\mu)} \quad (16)$$

$$E_s = \frac{\bar{E}_s}{\bar{E}_0} = \frac{e}{1 + T \left( \frac{Pn_e}{h} \right)^{(n-1-\mu)/(1+\mu)}}, \quad E_t = \frac{\bar{E}_t}{\bar{E}_0} = e \frac{1 + \frac{1+\mu}{\mu} t_* \Omega}{1 + \frac{1+\mu}{\mu} t_* \Omega + \frac{n}{\mu} T \left( \frac{Pn_e}{h} \right)^{(n-1-\mu)/(1+\mu)}} \quad (17)$$

$$\bar{\tau} = \bar{t}_0 t_* = \bar{t}_*, \quad \bar{\tau}_0 = 3600 \text{ [s]} = 1 \text{ [h]}, \quad \alpha_0 = 10^{-4}$$

Biorąc pod uwagę stałe fizyczne dla miedzi oraz przyjmując jednorodność modułu  $E$ , otrzymujemy:  $T_{00} = 0,781408$ .

Współczynniki

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \frac{3}{4} \left( \frac{\bar{E}_t}{\bar{E}_s} - 1 \right), & a_{11} &= 1 + \tilde{a} \frac{n_r^2}{n_e^2}, & a_{12} &= a_{21} = \frac{1}{2} + \tilde{a} \frac{n_r n_0}{n_e^2} \\ a_{32} &= 1 + \tilde{a} \frac{n_0^2}{n_e^2}, & a_{33} &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (18)$$



są zależne od czasu krytycznego i od zespolonej częstości drgań. W przypadku liniowo sprężystym  $\tilde{a} = 0$ .

Zagadnienia brzegowe (8), (9), (11), (12) wyznaczają krzywe charakterystyczne rozważanego problemu niekonserwatywnego, tzn. zależności części rzeczywistej  $\delta$  i urojonej  $\omega$  zespolonej częstości  $\Omega$  ( $\Omega = \delta + i\omega$ ) od wielkości obciążenia ściskającego  $P$ . Przyjmujemy tu, że badana płyta traci stateczność przez flutter przy obciążeniu, dla którego część rzeczywista  $\delta$  zmienia znak z ujemnego na dodatni. Dla pewnych zakresów zmienności współczynnika śledzenia  $\eta$  płyta może tracić stateczność przez wyboczenie (dywergencję). W tym przypadku urojona część  $\omega$  przyjmuje wartość równą zero.

#### 4. Obliczenia numeryczne i analiza wyników

##### 4.1. Obliczenia numeryczne

Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla płyty o stałej grubości, dla której  $\beta = 0,2$ . Przyjęto, że gęstość materiału płyty jest równa gęstości odniesienia  $\bar{\rho}_0$ , tzn.  $\rho = 1$  oraz że  $e = 1$ . W obliczeniach zaniedbano zewnętrzne tłumienie, tzn. przyjęto  $\gamma = 0$ . W przypadku płyt o zmiennej grubości celowa jest normalizacja grubości zgodnie z warunkiem stałej objętości

$$\int_{\beta}^1 xh(x)dx = \frac{\bar{V}}{2\pi\bar{a}^2\bar{h}_0} = 1 \quad (19)$$

gdzie  $\bar{V}$  jest objętością płyty. Wobec tego stała  $\bar{h}_0$  jest równa  $\bar{h}_0 = 3\bar{a}\sqrt{\alpha}$  dla wybranej wartości parametru smukłości  $\alpha$ . W dalszych obliczeniach przyjmowano  $\alpha = 10^{-6}$ . Dla płyty o stałej grubości (dla  $\beta = 0,2$ ) stała bezwymiarowa grubość płyty wynosi  $h = 2,083333$ .

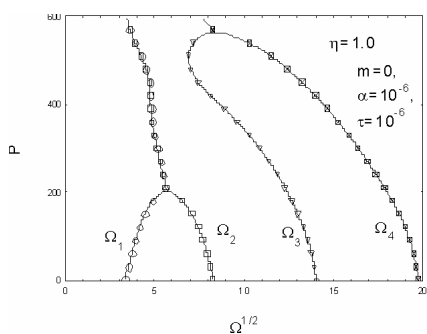
Wszystkie obliczenia numeryczne przeprowadzono za pomocą metody Runge–Kutty–Gilla czwartego rzędu. Przedział całkowania  $[\beta, 1]$  z reguły dzielono na 50 podprzedziałów, sprawdzając dokładność obliczeń przez podwojenie ich liczby. Do zagadnienia brzegowego drgań (11), (12) stosowano metodę macierzy przeniesienia, po zamianie równań zespolonych na równania rzeczywiste. Więcej szczegółów przedstawiono w pracy [11].

##### 4.2. Obciążenie ściśle śledzące (tangencjalne): $\eta = 1$

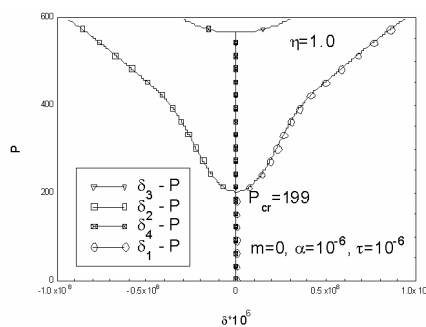
Na rysunku 2 przedstawiono typowe krzywe charakterystyczne, odpowiadające czterem częstościom drgań, dla bardzo małej wartości czasu krytycznego  $\bar{\tau} = 10^{-6}$  s i dla liczby fal obwodowych  $m = 0$ . Wpływ reologicznych wartości materiału jest tu znikomy i kształt krzywych charakterystycznych jest bardzo zbliżony do otrzymanych w pracy [13] dla materiału liniowo sprężystego.

Jednak nawet dla małych wartości  $\bar{\tau}$  krzywe  $\delta - P$  i  $\delta - \omega$  powinny być również analizowane. Jak wynika z rys. 3, pierwsza siła krytyczna wynosi  $P_{cr} \approx 199$ , a druga  $P_{cr} \approx 570$ . Lecz na rys. 4, który powstał z rys. 3 poprzez znaczne rozciągnięcie osi pozio-

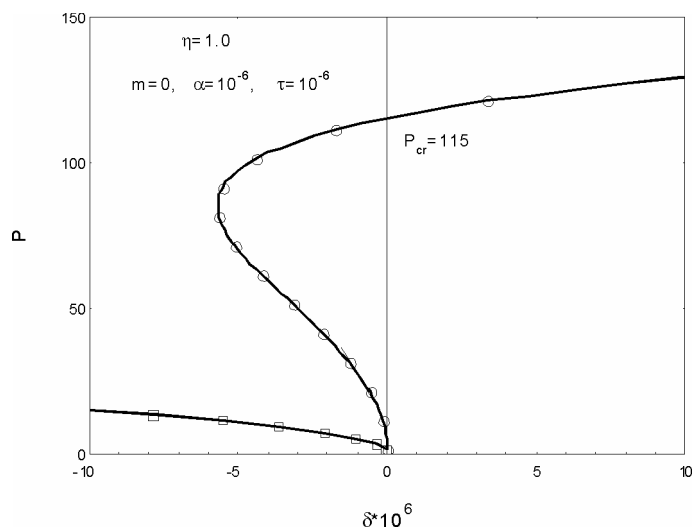
mej, część rzeczywista pierwszej częstości drgań zmienia swój znak przy sile  $P_{cr} \approx 115$ . Zatem również dla płyt pierścieniowych pojawia się efekt destabilizacji, analogiczny do efektu destabilizacji dla prętów ściskanych (cf. [9]). Teoretycznie pierwsza siła krytyczna jest więc równa:  $P_{cr} \approx 115$ . Oczywiście, w przypadku płyt pierścieniowych krzywe charakterystyczne zależą od liczby fal obwodowych  $m$ . Jak wynika z przeprowadzonych obliczeń, najniższa siła krytyczna, dla przyjętych parametrów płyty, jest osiągnięta dla  $m = 0$ .



Rys. 2. Urojone części częstości drgań w zależności od siły ściskającej  
Fig. 2. Imaginary parts of frequencies of vibration versus the compressive force



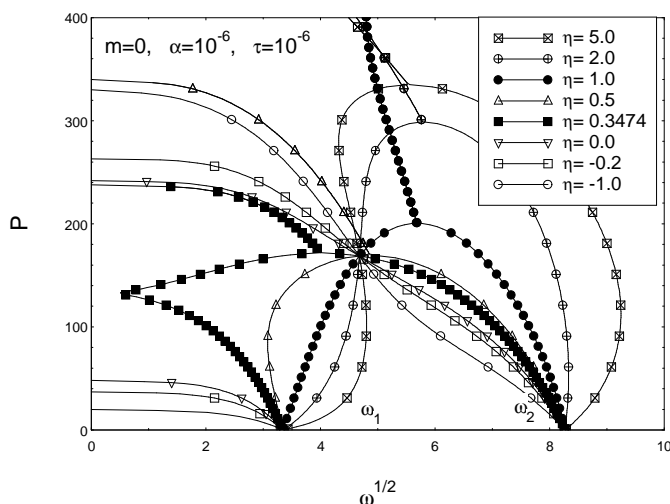
Rys. 3. Rzeczywiste części częstości drgań w zależności od siły ściskającej  
Fig. 3. Real parts of frequencies of vibration versus the compressive force



Rys. 4. Części rzeczywiste częstości drgań w zależności od siły ściskającej (przeskalowana oś pozioma)  
Fig. 4. Real parts of frequencies of vibration versus the compressive force (X-axis on a larger scale)

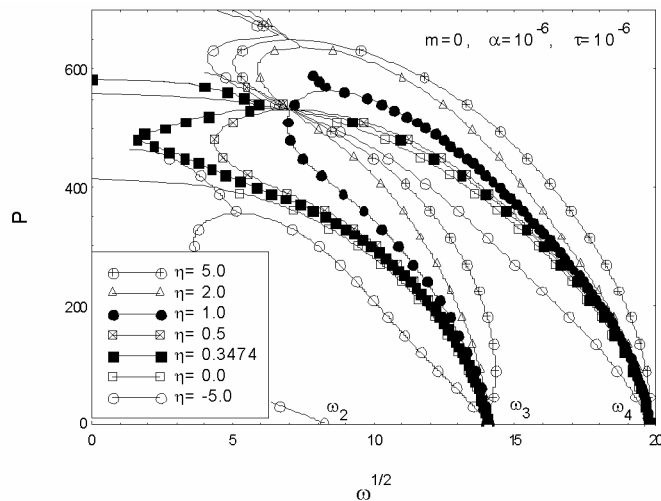
#### 4.3. Krzywe charakterystyczne w zależności od współczynnika śledzenia dla $\tau = 10^{-6}$

Zależności urojonych części częstości drgań  $\omega$  od siły ściskającej  $P$  od współczynnika śledzenia przedstawiono na rys. 5 i 6. Zależność rzeczywistych części częstości drgań  $\delta$  od siły ściskającej  $P$  dla wybranej wartości współczynnika śledzenia  $\eta = 0,3474$  przedsta-



Rys. 5. Krzywe charakterystyczne ( $\omega_{1,2} - P$ ) w zależności od współczynnika śledzenia

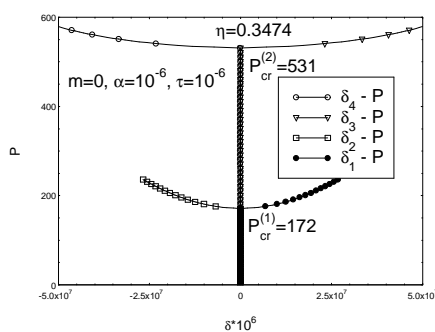
Fig. 5. Characteristic curves ( $\omega_{1,2} - P$ ) versus the tangency coefficient



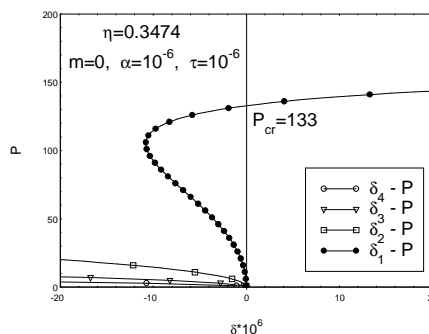
Rys. 6. Krzywe charakterystyczne ( $\omega_{3,4} - P$ ) w zależności od współczynnika śledzenia

Fig. 6. Characteristic curves ( $\omega_{3,4} - P$ ) versus the tangency coefficient

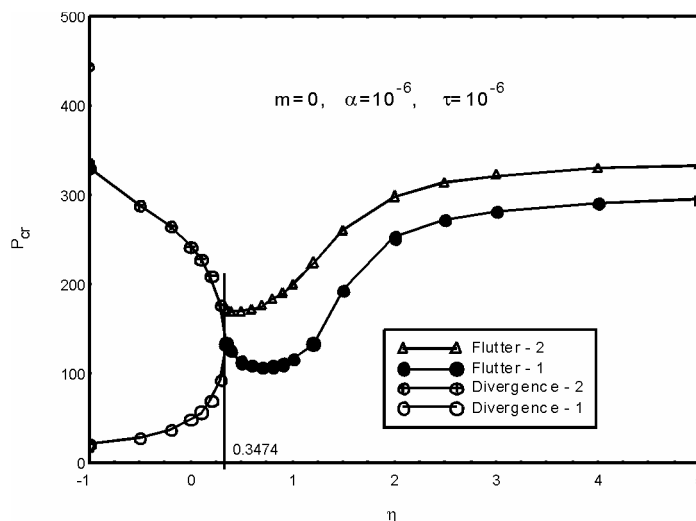
wiono na rys. 7 i 8. Wybrana tu wartość  $\eta$  odpowiada wartości granicznej, dla której utrata stateczności przez wyboczenie przechodzi w utratę stateczności przez flutter. Należy zauważyć, że analogiczna wartość dla pryzmatycznych, sprężystych kolumn jest równa  $\eta = 0,5$  (cf. [19]). Oczywiście, również tu, na rys. 7 i 8, można zauważyć efekt destabilizacji.



Rys. 7. Części rzeczywiste częstości drgań w zależności od siły ściskającej  
Fig. 7. Real parts of frequencies of vibration versus the compressive force



Rys. 8. Części rzeczywiste częstości drgań w zależności od siły ściskającej (przeskalowana oś pozioma)  
Fig. 8. Real parts of frequencies of vibration versus the compressive force (X-axis on a larger scale)



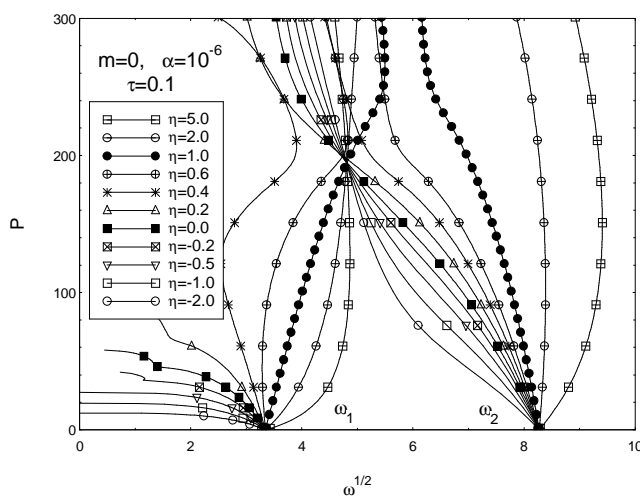
Rys. 9. Zależność obciążenia krytycznego od współczynnika śledzenia  
Fig. 9. Critical loading versus the tangency coefficient

Na podstawie wyników pracochłonnych obliczeń, analogicznych do pokazanych powyżej, można skonstruować końcowe wykresy zależności obciążenia krytycznego od współczynnika śledzenia dla badanej płyty pierścieniowej. Przedstawiono je na rys. 9,

gdzie naniesiono krzywe: bez uwzględnienia destabilizacji (krzywa górna) i z uwzględnieniem destabilizacji (krzywa dolna). Krzywe te są analogiczne do tych, które zostały otrzymane dla ściskanych prętów w pracach [9 i 19].

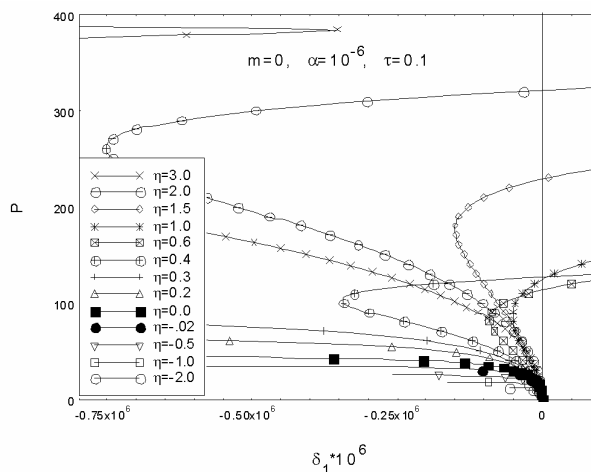
#### 4.4. Krzywe charakterystyczne w zależności od współczynnika śledzenia dla $\tau = 0,1$

Wpływ własności reologicznych materiału pokazano na rys. 10 i 11, przyjmując znacznie większą wartość czasu krytycznego, a mianowicie  $\tau = 0,1$ .



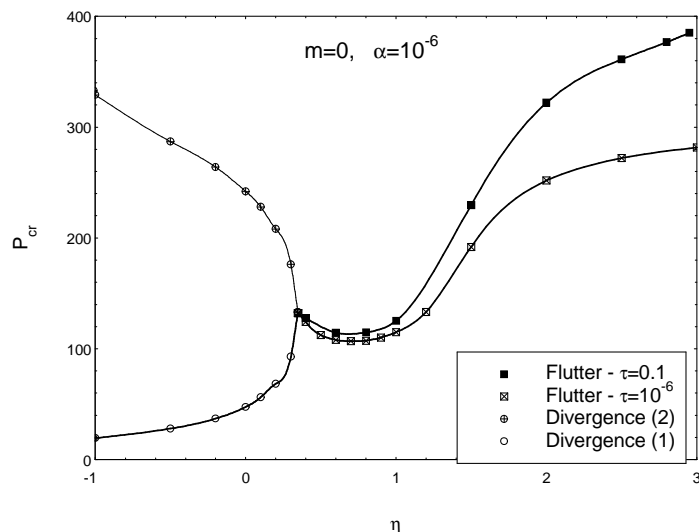
Rys. 10. Krzywe charakterystyczne ( $\omega_{1,2} - P$ ) w zależności od współczynnika śledzenia

Fig. 10. Characteristic curves ( $\omega_{1,2} - P$ ) versus the tangency coefficient



Rys. 11. Zależność części rzeczywistej pierwszej częstości drgań  $\delta_1$  od współczynnika śledzenia

Fig. 11. Real part of the first frequency versus the tangency coefficient



Rys. 12. Zależność obciążenia krytycznego od współczynnika śledzenia dla różnych wartości czasu krytycznego

Fig. 12. Critical loading versus the tangency coefficient for various values of the critical time

Porównanie wyników, otrzymanych dla czasów krytycznych  $\tau = 10^{-6}$  i  $\tau = 0,1$ , pokazano na rys. 12. Krzywe odpowiadają niższej wartości obciążenia krytycznego, otrzymanego z uwzględnieniem destabilizacji układu. Jak widać, zwiększenie czasu krytycznego  $\tau$  podnosi wartość obciążenia.

## 5. Wnioski końcowe

W artykule przedstawiono krzywe charakterystyczne w zależności od współczynnika śledzenia dla płyt pierścieniowych, obciążonych siłami niekonserwatywnymi, w warunkach nieliniowego pełzania. Podobnie jak dla materiału wykazującego liniowe własności reologiczne, opisywane modelem Voigta–Kelvina, stwierdzono pojawienie się efektu destabilizacji. Kształty krzywych zależności obciążenia krytycznego od współczynnika śledzenia są, do pewnego stopnia, podobne do analogicznych wykresów, otrzymanych dla ściskanych sprężystych kolumn (cf. [19]) oraz ściskanych prętów w warunkach pełzania (cf. [9]).

Podstawowe wyniki niniejszego artykułu zostały przedstawione na 5<sup>th</sup> Euromech Solid Mechanics Conference ESMC-5, August 17–22, 2003, Thessaloniki [12].

## Literatura

- [1] Beck M., *Die Knicklast des einseitig eingespannten tangential gedrückten Stabes*, ZAMM **3**, 1952, 225-228.
- [2] Błachut J., Gajewski A., *A unified approach to optimal design of columns*, Solid Mechanics Archives **5**(4), 1980, 363-413.

- [3] Bogacz R., Janiszewski R., *Analysis and synthesis of column under follower forces from the point of view of stability*, Adv. In Mechanics (Uspekhi mekhaniki) **8**(3), 1987, 3-52 (in Russian).
- [4] Claudon J.L., *Characteristic curves and optimum design of two structures subjected to circulatory loads*, Journal de Mecanique **14**(3), 1975, 531-543.
- [5] Davenport C.C., *Correlation of creep and relaxation properties of copper*, J. Appl. Mech. **5**(2), 1938, A56.
- [6] Elishakoff I., *Controversy Associated With the So-Called „Follower Forces”*, Critical Overview, Applied Mechanics Reviews **58**, 2005, 117-142.
- [7] Gajewski A., *On the destabilizing effect in a non-conservative system with slight internal and external damping*, Proceedings of Vibration Problems **13**(2), 1972, 187-198.
- [8] Gajewski A., *Optimization of a column compressed by non-conservative force in non-linear creep conditions*, [in:] W. Gutkowski, Z. Mróz (eds.), *Proc. Second World Congress of „Structural and Multidisciplinary Optimization”*, May 26–30 Zakopane 1997, 737-742.
- [9] Gajewski A., *Vibrations and stability of a non-conservatively compressed prismatic column under nonlinear creep conditions*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics **38**(2), 2000, 259-270.
- [10] Gajewski A., *Vibration and stability of a non-prismatic column compressed by non-conservative forces in non-linear creep conditions*, Journal of Sound and Vibration **248**(2), 2001, 315-327.
- [11] Gajewski A., *Vibration and stability of annular plates in non-linear creep conditions*, Journal of Sound and Vibration **249**(3), 2002, 447-463.
- [12] Gajewski A., *Certain stability problems of annular plates compressed by non-conservative forces*, The Fifth EUROMECH Solid Mechanics Conference, ESMC-5, Book of Abstracts, (Chairmen: E.C.Aifantis), Aristotle University of Thessaloniki, August 17–22, Thessaloniki 2003, Greece, 160-161.
- [13] Gajewski A., Cupiał P., *Optimal structural design of an annular plate compressed by non-conservative forces*, Int. J. Solids Structures **29**(10), 1992, 1283-1292.
- [14] Gajewski A., Życzkowski M., *Wpływ jednoczesnego niejednorodnego tarcia wewnętrznego i zewnętrznego na stateczność układów niekonserwatywnych*, Mech. Teor. i Stos. **10**(1), 1972, 121-136.
- [15] Gajewski A., Życzkowski M., *Optimal structural design under stability constraints*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1988.
- [16] Grinev V.B., Filippov A.P., *Optimal design of circular plates in stability problems*, Stroit. Mech. i Raschot Sooruzheniy **2**, 1977, 16-20 (in Russian).
- [17] Hanaoka M., Washizu K., *Optimum design of Beck's column*, Computers and Structures **11**(6), 1980, 473-480.
- [18] Irie T., Yamada G., Kaneko Y., *Vibration and stability of a non-uniform annular plate subjected to a follower force*, Journal of Sound and Vibration **73**(2), 1980, 261-269.
- [19] Kordas Z., Życzkowski M., *On the loss of stability of a rod under a super-tangential force*, Arch. Mech. Stos. **15**(1), 1963, 7-31.

- [20] Langthjem M.A., Sugiyama Y., *Optimum shape design against flutter of a cantilevered column with an end-mass of finite size subjected to a non-conservative load*, Journal of Sound and Vibration **226** (1), 1999, 1-23.
- [21] Langthjem M.A., Sugiyama Y., *Optimum design of cantilevered columns under the combined action of conservative and nonconservative loads. Part I: The undamped case*, Computers & Structures **74**, 2000, 385-398.
- [22] Langthjem M.A., Sugiyama Y., *Optimum design of cantilevered columns under the combined action of conservative and nonconservative loads. Part II: The damped case*, Computers & Structures **74**, 2000, 399-408.
- [23] Langthjem M.A., Sugiyama Y., Kobayashi M., Yutani H., *Experimental Verification of Optimization of Cantilevered Columns Subjected to a Rocket Thrust*, 4<sup>th</sup> EUROMECH Solid Mechanics Conference, June 26–30, 2000, Book of abstracts II, Metz, France, 662.
- [24] Nikolai E.L., *On the stability of equilibrium of a compressed and twisted column* (in Russian), Trudy Leningr. Politekhn. Inst. **31**, 1928, 201. Również [w:] *Trudy po mekhanike (Prace zebrane)*, Moskwa 1955, 357-387.
- [25] Przybylski J., *Drgania i stateczność dwuczłonowych układów prętowych wstępnie sprężonych przy obciążeniach niezachowawczych*, Monografia Nr 92, Politechnika Częstochowska, Częstochowa 2002.
- [26] Rabotnov Yu.N., *Creep of structural elements*, Nauka, Moskwa 1966 (in Russian).
- [27] Rabotnov Yu.N., Shesterikov S.A., *Creep stability of columns and plates*, Prikl. Mat. Mekh. **21**(3), 1957, 406-412 (Russian version), J. Mech. Phys. Solids **6**, 1957, 27-34 (English version).
- [28] Ringertz U.T., *On the design of Beck's column*, Structural Optimization **8**, 1994, 120-124.
- [29] Sugiyama Y., Katayama K., Kinoi S., *Flutter of cantilevered column under rocket thrust*, Journal of Aerospace Engineering, ASCE **8**, 1995, 9-15.
- [30] Sugiyama Y., Katayama K., Kiriyama K., Ryu B.-J., *Experimental verification of dynamic stability of vertical cantilevered columns subjected to a substantial force*, Journal of Sound and Vibration **236**(2), 2000, 193-207.
- [31] Sugiyama Y., Langthjem M.A., Ryu B.-J., *Realistic follower forces. Letters to the Editor*, Journal of Sound and Vibration **225**(4), 1999, 779-782.
- [32] Wróblewski A., *Optimal design of circular plates against creep buckling*, Eng. Optim. **20**, 1992, 111-128.
- [33] Wróblewski A., Życzkowski M., *On multimodal optimization of circular arches against plane and spatial creep buckling*, Structural Optimization **1**(4), 1989, 227-234.
- [34] Yagn Yu.I., Parshin L.K., *Experimental verification of stability of a column compressed by a follower force*, Doklady AN SSSR, **167**(1), 1966, 49-50 (in Russian).
- [35] Zhukov A.M., Rabotnov Yu.N., Churikov F.S., *Experimental verification of some theories of creep*, Inzh. Sbornik **17**, 1953, 163-170 (in Russian).
- [36] Zoriy L.M., Leonov Yu.Ya., *Influence of damping on the stability of non-conservative system*, Problems of Design and Strength in Machine Building **7**(7), 1961, 127-136 (in Russian).



- [37] Życzkowski M., *Optimal structural design under creep conditions*, Appl. Mech. Rev. **49**(9), 1996, 433-446.
- [38] Życzkowski M., Gajewski A., *Optimal structural design in non-conservative problems of elastic stability*, IUTAM Symposium on „Instability of Continuous Systems”, (Ed. H.H.E.Leipholz), Herrenalb 1969, Springer 1971, 295-301.
- [39] Życzkowski M., Kowalski A., *Nonconservative stability problems for columns subject to nonlinear creep*, Proc. EUROMECH Colloquium 190: „Dynamical Stability of Inelastic Structures”, Technische Universität Hamburg-Harburg Oct. 1-4, 1984, 109-111.