

ARTUR GANCZARSKI, MARCIN CEGIELSKI*

ZASTOSOWANIE EFEKTU CIĄGŁEJ DEAKTYWACJI USZKODZENIA W MODELOWANIU ZNISZCZENIA NISKOCYKLOWEGO STOPU AL-2024

APPLICATION OF THE CONTINUOUS DAMAGE DEACTIVATION TO A MODELLING OF LOW CYCLE FATIGUE OF ALUMINUM ALLOY AL-2024

Streszczenie

Niniejszy artykuł dotyczy zastosowania efektu ciągłej deaktywacji uszkodzenia w modelowaniu zniszczenia niskocyklowego stopu Al-2024. W artykule zademonstrowano oraz porównano z wynikami eksperymentalnymi dwa przykłady oparte – kolejno – na nieciągłym oraz ciągłym efekcie deaktywacji uszkodzenia. Zarówno jakościowa, jak i ilościowa analiza otrzymanych wyników potwierdzają poprawność oraz potrzebę stosowania efektu ciągłej deaktywacji uszkodzenia.

Słowa kluczowe: efekt ciągłej deaktywacji uszkodzenia, zniszczenie niskocyklowe

Abstract

This paper deals with application of the continuous damage deactivation to a modelling of low cycle fatigue of aluminum alloy Al-2024. Two examples based on discontinuous and continuous damage deactivation are demonstrated and compared with experimental data. Detailed quantitative and qualitative analysis of obtained solutions confirms the necessity and correctness of an application of continuous damage deactivation.

Keywords: continuous damage deactivation, low cycle fatigue

*Dr hab. inż. Artur Ganczarski, prof. PK, mgr inż. Marcin Cegielski, Instytut Mechaniki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska.

Oznaczenia

b	– stała materiałowa związana z izotropowym wzmocnieniem plastycznym
D	– skalarna zmienna uszkodzenia
E	– moduł sprężystości
\tilde{E}	– efektywny moduł sprężystości uwzględniający wpływ uszkodzenia
f	– potencjał plastyczny Misesa
F	– potencjał dyssypacji
F_D	– potencjał uszkodzenia
h, h_c	– parametr deaktywacji uszkodzenia oraz jego krytyczna wartość
H	– funkcja Heaviside'a
P	– akumulowane odkształcenie plastyczne
p_D	– odkształcenie plastyczne progowe rozpoczynające proces uszkodzenia
r	– zmienna typu odkształceniowego stowarzyszona ze wzmocnieniem izotropowym
R, R_∞	– zmienna izotropowego wzmocnienia plastycznego oraz jej asymptotyczna wartość
S	– wytrzymałość materiału na pęknięcie
X, X_∞	– zmienna kinematycznego wzmocnienia plastycznego oraz jej asymptotyczna wartość
Y	– gęstość uwalnianej energii odkształcenia
α	– zmienna typu odkształceniowego stowarzyszona ze wzmocnieniem kinematycznym
γ	– stała materiałowa związana z kinematycznym wzmocnieniem plastycznym
$\varepsilon, \varepsilon_e, \varepsilon_p$	– odkształcenie, odkształcenie sprężyste, odkształcenie plastyczne
λ	– mnożnik plastyczny
ψ	– energia swobodna Helmholtza
ρ	– gęstość masy
σ, σ	– tensor naprężenia oraz naprężenie jednoosiowe
$\tilde{\sigma}$	– naprężenie efektywne uwzględniające wpływ uszkodzenia
σ_b, σ_e	– wartości naprężenia odpowiadające – kolejno – początkowi oraz końcowi procesowi deaktywacji uszkodzenia
σ_y	– granica plastyczności

1. Wstęp

Zjawisko unilateralnego uszkodzenia, zwane również deaktywacją uszkodzenia bądź efektem zamykania/otwierania mikrouszkodzeń, jest typowe dla sprężysto-plastycznych materiałów metalicznych poddanych naprzemiennym cyklom rozciągania-ściskania.

W najprostszym przypadku, gdy na próbkę wykonaną ze sprężysto-plastycznego materiału metalicznego działa jednoosiowe obciążenie cykliczne, mikropustki pozostają otwarte pod wpływem rozciągania oraz zamykają się częściowo lub całkowicie pod wpływem ściskania, powodując, że materiał uszkodzony zaczyna zachowywać się jak nieuszkodzony, odzyskując tym samym pierwotną sztywność. Jeśli dodatkowo proces cykliczny jest sterowany przemieszczeniem (odkształceniem), to uszkodzeniu towarzyszy silna

asymetria spadku amplitudy oraz wartości modułu sprężystości pomiędzy zakresem odpowiadającym rozciąganiu i ściskaniu.

Matematyczny opis unilateralnego uszkodzenia oparty na dekompozycji tensora naprężenia lub odkształcenia na dodatnie oraz ujemne projektory został podany przez Krajcinovica [12], Lemaitre'a [15], Mazarsa [17] oraz Murakami i Kamiya [18]. W cytowanych pracach odpowiednie definicje naprężenia lub odkształcenia efektywnego zawierają funkcję Heaviside'a zerującą ich ujemne wartości własne. Oznacza to, że ujemne wartości własne tensorów naprężenia bądź odkształcenia pozostają nieaktywne w procesie uszkodzenia tak długo, aż warunki obciążenia spowodują ich ponowną aktywację [17]. W bardziej ogólnym podejściu zarówno dodatnie, jak i częściowo ujemne wartości własne tensorów odkształcenia lub naprężenia mają wpływ na ewolucję uszkodzenia [9, 14]. Dodatnie części tensorów odkształcenia lub naprężenia są wyrażone przez dodatnie operatory tensorowe czwartego rzędu określone na ich wektorach własnych [8, 12]. Ograniczenia związane z konsystencją unilateralnego uszkodzenia w świetle kontynualnej mechaniki uszkodzeń zostały szczegółowo przedyskutowane przez Chaboche'a i in. [2–4]. Autorzy wykazali, że istniejące teorie rozwinięte w pracach Ju [11], Krajcinovica i Fonseki [13], Ramtani [20] prowadzą w przypadku ogólnych wieloosiowych i nieproporcjonalnych ścieżek obciążenia do utraty symetrii przez tensor sztywności bądź do nieuzasadnionych nieciągłości pojawiających się na krzywej naprężenie-odkształcenie. Łatwo wykazać, że jeśli warunki unilateralne wpływają zarówno na diagonalne, jak i pozadiagonalne składowe tensorów sztywności lub podatności, to nieciągłość naprężenia pojawia się w momencie, gdy choćby jedna z wartości własnych tensora odkształcenia zmienia znak, podczas gdy pozostałe pozostają ustalone [21]. W modelu zaproponowanym przez Chaboche'a [3] tylko diagonalne składowe odpowiadające ujemnym składowym normalnym odkształcenia są zastępowane przez początkowe (nieuszkodzone) wartości. Konsystentny opis efektu unilateralnego został podany przez Halma i Dragona [6, 7]. Wprowadzając nowy tensor uszkodzenia czwartego rzędu określony na wektorach własnych tensora uszkodzenia drugiego rzędu, autorzy uzyskali efekt zamykania/otwierania mikroszczelin zgodny z ogólnymi warunkami ciągłości narzuconymi na odpowiedź rejestrowaną na krzywej naprężenie-odkształcenie.

2. Efekt ciągłej deaktywacji uszkodzenia

W przypadku jednoosiowego naprężenia rozciągającego σ oraz uszkodzenia typu skalarnego D naprężenie efektywne $\tilde{\sigma}$ i odpowiedni efektywny moduł sprężystości \tilde{E} zdefiniowane są w następujący sposób

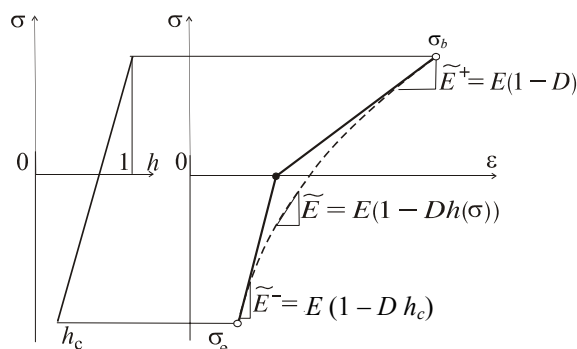
$$\tilde{\sigma} = \sigma / (1 - D) \quad \tilde{E} = E(1 - D) \quad (1)$$

Powyższe zależności zachowują swoją ważność również w przypadku, gdy mikro-uszkodzenia pozostają otwarte pod działaniem jednoosiowego naprężenia ściskającego. Jednak dla pewnej klasy materiałów oraz obciążeń mikrouszkodzenia mogą ulegać zamknięciu przy ściskaniu. Ponieważ mikrouszkodzenia występujące w rzeczywistym materiale posiadają zwykle skomplikowany kształt, niepozwalający im na całkowite zamknięcie, do warunków obowiązujących dla ściskania wprowadza się dodatkowy parametr zamknięcia

mikropustek h ($0 \leq h \leq 1$) i w konsekwencji odpowiednie warunki do rozciągania oraz ściskania przyjmują następującą postać

$$\tilde{\sigma} = \begin{cases} \sigma/(1-D) & \tilde{E} = \begin{cases} E(1-D) & \text{gdy } \sigma > 0 \\ E(1-Dh) & \text{gdy } \sigma < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (2)$$

Zastosowanie takiego modelu do opisu ścieżki odciążenia prowadzi do liniowej zależności pomiędzy spadkiem naprężenia oraz spadkiem odkształcenia, scharakteryzowanej modulem \tilde{E}^+ . Przejście do zakresu ściskania powoduje przeskok na drugą gałąź ścieżki odciążenie-obciążenie scharakteryzowanej modulem \tilde{E}^- . Ponieważ rzeczywisty materiał nie wykazuje takiej biliniowej charakterystyki, Hansen i Schreyer [8] zaproponowali koncepcję ciągłej deaktywacji mikropustek pozwalającą na wyeliminowanie przeskoku pomiędzy \tilde{E}^+ i \tilde{E}^- oraz na uwzględnienie efektu umocnienia towarzyszącego stopniowemu zamykaniu uszkodzeń. Koncepcja polega na zastąpieniu parametru h funkcją $h(\sigma)$, liniowo zależną od naprężenia w najprostszym przypadku (rys. 1).



Rys. 1. Koncepcja ciągłej deaktywacji uszkodzenia
Fig. 1. Concept of the continuous damage deactivation

$$h(\sigma) = h_c + (1 - h_c)(\sigma - \sigma_e) / (\sigma_b - \sigma_e) \quad (3)$$

Według powyższej zależności funkcja $h(\sigma)$ przyjmuje wartości od 1, gdy $\sigma = \sigma_b$ do h_c , gdy $\sigma = \sigma_e$, oznacza to, że mikropustki nie ulegają całkowitemu zamknięciu, lecz osiągają stan częściowego domknięcia określony krytyczną wartością parametru h_c . W większości przypadków krytyczna wartość parametru deaktywacji uszkodzenia zależy zarówno od materiału, jak i typu obciążenia, w praktyce jednak h_c uznawane jest za stałą w celu uproszczenia obliczeń. Przykładowo Lemaitre [15] zaleca posługiwanie się wartością $h_c = 0,2$ jako uniwersalną dla szerokiej klasy materiałów.

3. Próba zmęczenia niskocyklowego próbkę ze stopu Al-2024

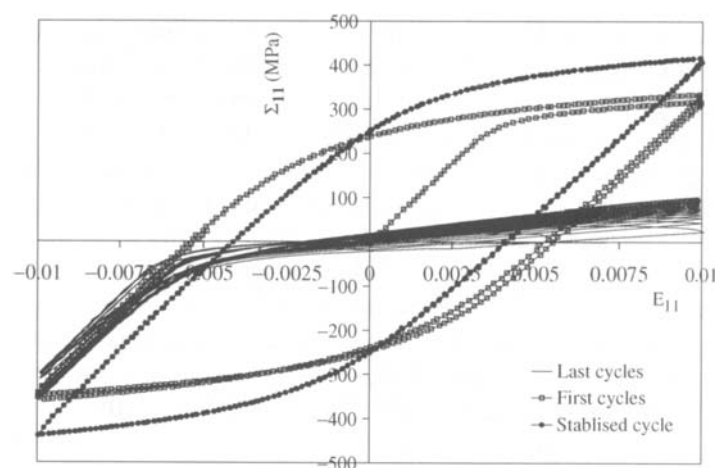
Opis próby zmęczenia niskocyklowego wykonanej przez Abdul-Latifa i Chadli na próbkach ze stopu aluminium opublikowano w pracy [1]. Do eksperymentu użyto stopu aluminium o handlowym symbolu Al-2024 i składzie chemicznym podanym w tabeli 1.

Skład chemiczny stopu aluminium Al-2024

Udział wagowy [%]	Si	Fe	Cu	Mn	Mg	Cr	Ni	Zn	Ti	Zr	Pb
	0,11	0,28	4,33	0,75	1,31	0,01	0,01	0,10	0,03	0,14	0,0021

Testy zmęczenia niskocyklowego przeprowadzono w temperaturze pokojowej na maszynie INSTRON typ 1340, używając cienkościennych próbek walcowych o wymiarach: średnica wewnętrzna 15 mm, średnica zewnętrzna 18 mm, wyciętych z okrągłego pręta o średnicy 42 mm. Proces obróbki wykańczającej próbek obejmował polerowanie ich powierzchni, a następnie obróbkę termiczną polegającą na starzeniu w temperaturze 495°C i hartowaniu w kąpeli wodnej.

Próbki testowano, poddając je różnym programom obciążenia przy różnych poziomach wymuszenia typu odkształceniowego. Najciekawsze i jednocześnie najbardziej reprezentatywne rezultaty uzyskano w przypadku zastosowania programu jednoosiowego rozciągania/ściskania o amplitudzie $\Delta\varepsilon_{11} = \pm 1\%$. Test prowadzono do momentu zerwania próbki po 291 cyklach, a jego wyniki zaprezentowano na rys. 2.



Rys. 2. Próba zmęczenia niskocyklowego Abdul-Latifa i Chadli [1] dla próbek stopu Al-2024 poddanych cyklicznemu rozciąganiu i ściskaniu

Fig. 2. Test of low cycle fatigue by Abdul-Latif and Chadli [1] for specimen of aluminum Alloy Al-2024 subjected to cyclic tension-compression

Szczegółowa analiza kolejnych pętli histerezy potwierdza sprężysto-plastyczne zachowanie materiału z bardzo silnym wpływem uszkodzenia o unilateralnym charakterze. W początkowych cyklach materiał wykazuje wzmocnienie plastyczne prowadzące do osiągnięcia cyklu ustabilizowanego, by następnie w miarę narastania uszkodzenia zacząć ujawniać coraz silniejszą asymetrię spadku amplitudy oraz wartości modułu sprężystości pomiędzy zakresem odpowiadającym rozciąganiu i ściskaniu. Procesowi temu towarzyszy stopniowe zawężanie pola ograniczonego kolejnymi pętłami histerezy, związane ze zmianą charakteru dolnej gałęzi histerezy z wypukłej na wklęsłą, czemu w konsekwencji odpowiada zmniejszanie się zdolności materiału do dyssypacji energii.

4. Modelowanie procesu plastycznego płynięcia z efektami uszkodzenia

Opis plastycznego płynięcia z degradacją własności materiałowych wywołaną uszkodzeniem, zdolny modelować eksperyment, oparty jest na teorii kinetycznej zaproponowanej przez Lemaitre'a-Chaboche'a [15, 16] i wyprowadzonej z potencjału dyssypacji

$$F = f(\boldsymbol{\sigma}, R, \mathbf{X}, D) + F_D(Y, D) \quad (4)$$

będącego sumą dwóch części, nawiązujących bezpośrednio do potencjału plastyczności Misesa f oraz potencjału uszkodzenia F_D , związanego z kinetyczną teorią ewolucji uszkodzenia.

W przypadku jednoosiowego naprężenia zarówno potencjał plastyczności, jak i potencjał uszkodzenia przyjmują uproszczoną postać

$$f = |\tilde{\sigma} - X| - R - \sigma_y + 0,75X^2 / X_\infty, \quad F_D = Y^2 H(p - p_D) / 2S(1 - Dh) \quad (5)$$

gdzie potencjał uszkodzenia jest funkcją akumulowanego odkształcenia plastycznego p aktywowaną dopiero po osiągnięciu pewnej wartości progowej p_D , natomiast gęstość uwalnianej energii odkształcenia wynosi odpowiednio

$$Y = \tilde{\sigma}^2 h / (2E) \quad (6)$$

Zastosowanie formalizmu stowarzyszonej plastyczności prowadzi do następujących równań dla odkształcenia plastycznego, akumulowanego odkształcenia plastycznego, zmiennych odkształceniowych stowarzyszonych z wzmocnieniem izotropowym i kinematycznym oraz uszkodzeniem

$$\begin{aligned} d\varepsilon_p &= \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\lambda} = \text{sign}(\tilde{\sigma} - X) \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{1 - Dh} \\ dp &= |d\varepsilon_p| = \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{1 - Dh} & d\alpha &= -\frac{\partial F}{\partial X} d\boldsymbol{\lambda} = (1 - Dh)d\varepsilon_p - \frac{3X}{2X_\infty} d\boldsymbol{\lambda} \\ dr &= -\frac{\partial F}{\partial R} d\boldsymbol{\lambda} = (1 - Dh)dp & dD &= \frac{\partial F_D}{\partial Y} d\boldsymbol{\lambda} = \frac{Y}{S} H(p - p_D) dp \end{aligned} \quad (7)$$

Znając wartości powyższych zmiennych wewnętrznych typu odkształceniowego oraz postać potencjału stanu Helmholtza

$$\psi = 1/\rho \{ 0,5E\varepsilon_e^2(1 - Dh) + R_\infty[r + \exp(-br)/b] + X_\infty\gamma\alpha^2/3 \} \quad (8)$$

łatwo przechodzimy na stowarzyszone z nimi zmienne wewnętrzne typu naprężeniowego

$$\begin{aligned} \sigma &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_e} = E\varepsilon_e(1 - Dh) & X &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = \frac{2}{3} X_\infty\gamma\alpha \\ R &= \rho \frac{\partial \psi}{\partial r} = R_\infty[1 - \exp(-br)] & Y &= -\rho \frac{\partial \psi}{\partial D} = \frac{1}{2} E\varepsilon_e^2 h \end{aligned} \quad (9)$$

Uwzględniając następnie zależności (7) w równaniach (9) oraz zapisując te ostatnie w dogodniejszej z punktu widzenia obliczeń numerycznych formie przyrostowej, dochodzimy do równań Lemaitre'a i Chaboche'a [16]

zakres sprężysty zakres plastyczny

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\varepsilon} = E(1 - Dh) \quad \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dp} = (1 - Dh)^2 \left\{ [X_\infty\gamma + b(R_\infty - R)] \text{sign}(\tilde{\sigma} - X) - \gamma X \right\} - \frac{\tilde{\sigma}^3}{2ES} H(p - p_D)$$

$$\begin{aligned}
 dR / dp &= b(R_\infty - R)(1 - Dh) \\
 dX / dp &= \gamma[X_\infty \text{sign}(d\varepsilon_p) - X](1 - Dh) \\
 dD / dp &= \frac{\sigma^2}{2ES(1 - Dh)^2} H(p - p_D)
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

zawierających efekt ciągłej deaktywacji uszkodzenia [5] ograniczony dodatkowym założeniem, że wartość naprężenia odpowiadająca początkowi procesu deaktywacji uszkodzenia wynosi $\sigma_b = 0$

$$h(\sigma) = h_c - (1 - h_c)(\sigma - \sigma_e) / \sigma_e \tag{11}$$

Ostatnie z równań (10) definiuje ewolucję uszkodzenia w stopach aluminium, w ogólnym przypadku zależną od drugiego niezmiennika naprężenia (zgodnie z obserwacjami Hayhursta [10]), a więc generowaną zarówno przez strefy plastycznego rozciągania, jak i ściskania, lecz w przypadku tej ostatniej – zmodyfikowaną wygaszającym wpływem ciągłej deaktywacji uszkodzenia.

5. Wyniki

Przedstawiony układ czterech równań różniczkowych (10) jest numerycznie całkowany dla amplitudy odkształcenia zmieniającego się w zakresie $\pm 1\%$ za pomocą procedury odeint.for wykorzystującej schemat Runge-Kutty IV powiązany z adaptacyjnie sterowaną długością kroku [19].

Identyfikacja stałych materiałowych występujących w modelu (10) została wykonana częściowo na podstawie wyników doświadczalnych oraz częściowo na drodze numerycznej. Wielkości stałych materiałowych sprężystości oraz plastyczności E , σ_y zostały podane przez Abdul-Latifa i Chadli w pracy [1]. Wartości stałych materiałowych opisujące umocnienie plastyczne typu mieszanego b , R_∞ , γ , X_∞ zostały dobrane w taki sposób, aby zminimalizować różnice pomiędzy początkowymi pętlami histerezy (do osiągnięcia cyklu ustabilizowanego) otrzymanymi z eksperymentu oraz z symulacji numerycznej. Identyfikacja parametrów materiałowych opisujących kinetyczne prawo ewolucji uszkodzenia h_c , S , p_D oparta jest na procedurze zaproponowanej przez Lemaitre'a [15]. Wartość naprężenia odpowiadająca końcowi procesu deaktywacji uszkodzenia wynosi σ_e i przyjęto ją jako równą aktualnej granicy plastyczności po stronie ściskania. Wartości wszystkich stałych materiałowych występujących w modelu podano w tab. 2.

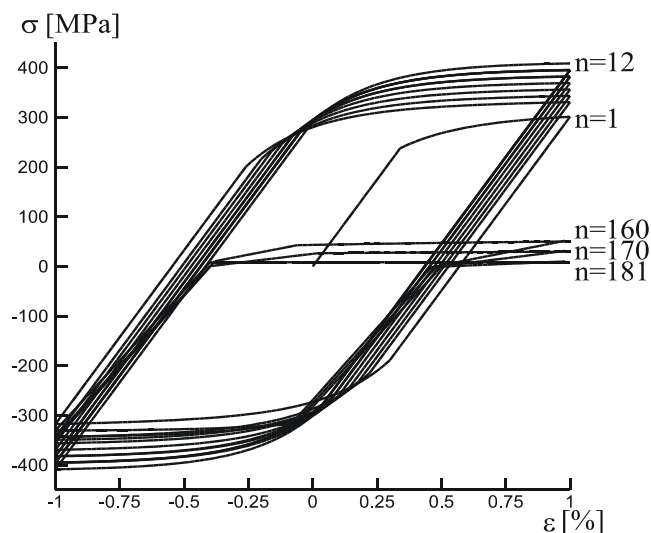
Tabela 2

Wartości stałych materiałowych dla stopu Al-2024

E [GPa]	σ_y [MPa]	b	R_∞ [MPa]	γ	X_∞ [MPa]	h_c	S [MPa]	p_D
70	230	0,1	120	4,0	60	0,2	3500	0,248

Wyniki otrzymane w oparciu o klasyczny nieciągły model deaktywacji uszkodzenia ($h = h_c$) dają jedynie ilościowo dobrą zgodność z wynikami eksperymentu (rys. 3). Rozpatrywany model materiałowy poprawnie odwzorowuje unilateralny charakter osłabienia towarzyszącego uszkodzeniu w takim sensie, że rzędne amplitud naprężenia w kolejnych

pętach histerezy korespondują z odpowiednimi punktami na krzywych eksperymentalnych. Jednak nieciągłość $\partial\sigma/\partial\varepsilon$ w punkcie $\sigma = 0$, szczególnie silnie zaznaczona w końcowych cyklach ($n \geq 160$), prowadzi do drastycznej niezgodności z wynikami eksperymentalnymi.



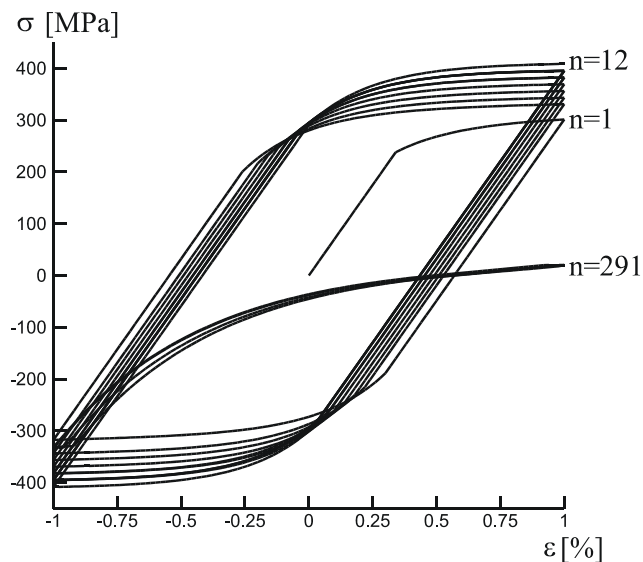
Rys. 3. Numeryczna symulacja procesu zniszczenia niskocyklowego dla stopu Al-2024 z nieciągłym efektem deaktywacji uszkodzenia

Fig. 3. Numerical simulation of low cycle fatigue for aluminum alloy Al-2024 with model of discontinuous damage deactivation

W przeciwieństwie do powyższego modelu wyniki otrzymane na podstawie zastosowanego modelu z ciągłym efektem deaktywacji uszkodzenia ($h(\sigma)$ określone wzorem (11)) wykazują bardzo dobrą ilościową oraz jakościową zgodność z wynikami doświadczalnymi (rys. 4). Istotny defekt modelu klasycznego, polegający na niegładkiej, biliniowej charakterystyce oddzielającej zakres rozciągania od ściskania, został skutecznie wyeliminowany. Udało się również doskonale odwzorować stopniowe zawężanie pola ograniczonego kolejnymi pętami histerezy wraz z towarzyszącą mu zmianą wypukłości dolnej gałęzi histerezy.

6. Wnioski

- Model oparty na teorii kinetycznej ewolucji uszkodzenia Lemaitre’a–Chaboche’a i nieciągłym efekcie deaktywacji uszkodzenia ujawnia nieuzasadnione fizycznie nieciągłości modułu sprężystości, prowadząc w efekcie do wyników dających słabe pod względem jakościowym oraz ilościowym odwzorowanie wyników eksperymentu zniszczenia niskocyklowego (rys. 3).
- Zastosowanie ciągłej deaktywacji uszkodzenia pozwala osiągnąć bardzo dobrą zgodność zarówno jakościową, jak i ilościową z wynikami eksperymentalnymi (rys. 4), potwierdzając tym samym konieczność stosowania tego typu podejścia w modelowaniu zniszczenia niskocyklowego stopu Al-2024.



Rys. 4. Numeryczna symulacja procesu zniszczenia niskocyklowego dla stopu Al-2024 z ciągłym efektem deaktywacji uszkodzenia

Fig. 4. Numerical simulation of low cycle fatigue for aluminum alloy Al-2024 with model of continuous damage deactivation

Literatura

- [1] Abdul-Latif A., Chadli M., *Modeling of the heterogeneous damage evolution at the granular scale in polycrystals under complex cyclic loadings*, Int. J. Damage Mech. 16(2), 2007, 133-158.
- [2] Chaboche J.-L., *Damage induced anisotropy: On the difficulties associated with the active/passive unilateral condition*, Int. J. Damage Mech. 1(2), 1992, 148-171.
- [3] Chaboche J.-L., *Development of continuum damage mechanics for elastic solids sustaining anisotropic and unilateral damage*, Int. J. Damage Mech. 2, 1993, 311-329.
- [4] Chaboche J.-L. i in., *Continuum damage mechanics, anisotropy and damage deactivation for brittle materials like concrete and ceramic composites*, Int. J. Damage Mech. 4, 5-21, 1995.
- [5] Ganczarski A., Cegielski M., *Efekt ciągłej deaktywacji uszkodzenia*, Acta Mechanica et Automatica 1(1), 2007, 35-38.
- [6] Halm D., Dragon A., *A model of anisotropic damage by mesocrack growth; unilateral effect*, Int. J. Damage Mechanics 5, 1996, 384-402.
- [7] Halm D., Dragon A., *An anisotropic model of damage and frictional sliding for brittle materials*, Eur. J. Mech. A/Solids 17, 3, 1998, 439-460.
- [8] Hansen N.R., Schreyer H.L., *Damage deactivation*, Trans. ASME 62, 1995, 450-458.
- [9] Hayakawa K., Murakami S., *Space of damage conjugate force and damage potential of elastic-plastic-damage materials*, [in:] G.Z. Voyiadjis et al. (eds.), *Damage Mechanics in Engineering Materials*, Elsevier, Amsterdam 1998, 27-44.

- [10] Hayhurst D.R., *Data bases and mechanisms-based constitutive equations for use in design*, CISM Course 187, Udine, 7–11 September, [in:] H. Altenbach, J. Skrzypek (eds.), *Creep and Damage in Materials and Structures*, Springer, Vienna 1998, 167-208.
- [11] Ju J.W., *On energy based coupled elastoplastic damage theories: constitutive modeling and computational aspects*, Int. J. Solids and Structures 25(7), 1989, 803-833.
- [12] Krajcinovic D., *Damage Mechanics*, Elsevier, Amsterdam 1996.
- [13] Krajcinovic D., Fonseka G.U., *The continuous damage theory of brittle materials*, part I and II, J. Appl. Mech. 18, ASME, 1981, 809-824.
- [14] Ladeveze P., *On an anisotropic damage theory, Failure criteria of structural media*, CNRS Int. Coll., No. 351, Villard-de-Lans, ed. Boehler, Balkema, Rotterdam 1983.
- [15] Lemaitre J., *A course on damage mechanics*, Springer Verlag, Berlin 1992.
- [16] Lemaitre J., Chaboche J.-L., *Mécanique des Matériaux Solides*, Dunod Publ., Paris 1985.
- [17] Mazars J., *A model of unilateral elastic damageable material and its application to concrete*, [in:] F.H. Wittmann (ed.), *Energy Toughness and Fracture Energy of Concrete*, Elsevier Sci. Publ., Amsterdam 1986, 61-71.
- [18] Murakami S., Kamiya K., *Constitutive and damage evolution equations of elastic-brittle materials based on irreversible thermodynamics*, Int. J. Solids Struct. 39, 4, 1997, 473-486.
- [19] Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P., *Numerical recipes in fortran*, Cambridge Press, 1993.
- [20] Ramtani S., *Contribution à la Modélisation du Comportement Multiaxial du Béton Endommagé avec Description du Caractère Unilatéral*, PhD Thesis, Univ. Paris VI, 1990.
- [21] Skrzypek J.J., Kuna-Ciskał H., *Anisotropic elastic-brittle-damage and fracture models based on irreversible thermodynamic*, [in:] J.J. Skrzypek, A. Ganczarski (eds.), *Anisotropic Behaviour of Damaged Materials*, Springer Verlag, Berlin–Heidelberg 2003, 143-184.