

JAN KURZYK, ZBIGNIEW PIEKARSKI, WŁODZIMIERZ WÓJCIK*

OKRESOWA OPTYMALIZACJA DRGAŃ PRĘTA
Z PUNKTOWYMI OGRANICZENIAM
ZMIENNYCH STANU

THE PERIODIC OPTIMIZATION OF THE VIBRATING
BAR WITH THE POINT CONSTRAINTS
OF THE VARIABLES OF STATE

Streszczenie

W artykule po raz pierwszy przebadano przykład z mechaniki technicznej optymalizacji z okresowym lub quasi-okresowym (okresowym w podprzedziałach o różnej długości) sterowaniem oraz z punktowymi ograniczeniami narzuconymi na nieokresowe zmienne stanu. Ograniczenia te zadane są w punktach styku podprzedziałów, w których sterowanie jest okresowe. Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla optymalizacji drgań podłużnych i sprężystych pręta wspornikowego, w środku którego (sterowanie okresowe) oraz w $\frac{3}{4}$ jego długości (sterowanie quasi-okresowe) została dołączona sprężyna. Jako sterowanie przyjęto przekrój poprzeczny pręta.

Słowa kluczowe: sterowanie okresowe, punktowe ograniczenia, optymalizacja, pręt wspornikowy

Abstract

In this paper the shape optimization of an elastic bar with respect to its longitudinal vibration is investigated. It is assumed that the optimal control fulfils some quasi-periodic or periodic constraints and additional jump constraints on the state variables. The results of numerical calculations have been presented in numerous figures.

Keywords: periodic control, points constraints, optimization, cantilever bar

*Dr Jan Kurzyk, dr hab. Zbigniew Piekarski, prof. dr hab. Włodzimierz Wójcik, Instytut Fizyki, Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki Stosowanej, Politechnika Krakowska.

1. Wstęp

W pracach [7, 8] rozpatrzono optymalizację okresową i quasi-okresową z uwzględnieniem ograniczeń narzuconych na zmienne stanu w punktach wewnętrznych przedziału optymalizacji. Teoretycznie rozważano jednowymiarowe problemy optymalizacji, w których skończony przedział zmiennej niezależnej podzielony był na podprzedziały zarówno o równych, jak i różnych długościach. W tych podprzedziałach wartości sterowania w odpowiednich punktach były takie same. Ponadto w punktach styku podprzedziałów na niektóre zmienne stanu narzucono ograniczenia typu skokowego. W niniejszym artykule po raz pierwszy zastosowano opracowaną poprzednio teorię do konkretnego układu. Przeanalizowano optymalizację z okresowym sterowaniem drgań podłużnych pręta z ograniczeniami w jego wewnętrznym punkcie. Zagadnienia optymalizacji z punktowymi ograniczeniami na zmienne stanu można zastosować do bardziej skomplikowanych problemów, np. takich, jakie były rozważane w pracach [1, 2, 4, 5].

2. Analiza teoretyczna problemu

Skończony przedział $[0, L]$ zmiennej niezależnej x

$$x \in [0, L] \quad (1)$$

dzielimy na N podprzedziałów zmiennych x_q

$$x_q = x \in [l_{q-1}, l_q], \quad q = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

gdzie

$$[0, L] = [l_0, l_1] \cup [l_1, l_2] \cup \dots \cup [l_{N-1}, l_N], \quad l_0 = 0, \quad l_N = L \quad (3)$$

Przyjmujemy, że długość każdego podprzedziału jest różna

$$\Delta l_q = l_q - l_{q-1}, \quad q = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

Każdą zmienną x_q przedstawiamy wzorem

$$x_q = A_q x_1 + l_{q-1}, \quad 0 \leq x_1 \leq l_1 \quad (5)$$

gdzie

$$A_q = \frac{\Delta l_q}{l_1} \quad (6)$$

Zakładamy, że funkcje sterujące $\bar{u}(x)$, które będą występować w rozważanych zadaniach, są dopuszczalne, tzn. są określone, odcinkami ciągłe, a punktów nieciągłości jest skończona liczba w $[0, L]$. Dodatkowo, tylko dla sterowania, wprowadzamy warunek okresowości (w skończonym przedziale)

$$\bar{u}(x_1) = \bar{u}(x_2) = \dots = \bar{u}(x_N) = \bar{a}(x_1) \quad (7)$$

Funkcję $\bar{a}(x_1)$ nazywamy sterowaniem podstawowym (nadkreślenie nad literą zawsze oznacza wektor).

Zajmować się będziemy obiektami, których stan opisany jest przez różniczkowe równania w postaci

$$\frac{d}{dx}y_k = \sum_{i=1}^n D_{ki}y_i \quad k, i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

Układ równań (8) jest liniowy tylko ze względu na zmienne stanu $y_k(x)$. Elementy macierzy D_{ki} są różniczkowalne względem funkcji sterujących, od których zależą. Do równań (8) należy dołączyć odpowiednie warunki brzegowe oraz w punktach styku podprzedziałów odpowiednie warunki skoku zmiennych stanu. W pracach [7, 8] rozważano skoki określone wzorami

$$y_k(l_p + 0) - y_k(l_p - 0) = h_k(\bar{y}(l_p - 0)), \quad p = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (9)$$

w których funkcje h_k są ciągłe razem z pierwszymi pochodnymi po wszystkich y_k .

Jeżeli chcemy badać problem optymalizacji obiektu fizycznego, to do równań stanu (8) musimy dołączyć funkcjonal celu, którego minimum będziemy szukać. W naszym przypadku przyjmujemy, że ma on postać całkową

$$J = \int_0^L f_0(\bar{u}(x)) dx = \min_u \quad (10)$$

Funkcja celu f_0 jest określona i ciągła ze względu na u . Po prostych przekształceniach i wykorzystaniu warunku okresowości (7) mamy

$$J = \frac{L}{l_1} \int_0^{l_1} f_0(\bar{a}(x_1)) dx_1 \quad (11)$$

W celu wyznaczenia minimalnej wartości funkcjonału (10), czyli (11) – przy quasi-okresowym sterowaniu, ale bez okresowości wektorowej zmiennej stanu – korzystać będziemy ze zmodyfikowanej zasady maksimum Pontriagina wprowadzonej i udowodnionej w pracy [6]. Zastosowanie tej zasady w mechanice technicznej po raz pierwszy przedstawiono w pracy [4]. W tej zmodyfikowanej zasadzie zmienia się warunek optymalności. Przy quasi-okresowym sterowaniu warunek ten ma formę

$$H_{\text{opt}}(x_1) = \max_{\bar{a} \in U} \sum_{q=1}^N H^q(x_1) \quad (12)$$

Hamiltoniany składowe H^q dane są wzorami

$$H^q = A_q \Psi_0 f_0(\bar{a}) + A_q \sum_{k=1}^n \left[\Psi_k^q(x_j) \sum_{i=1}^n D_{ki} y_i^q(x_1) \right] \quad (13)$$

gdzie współczynniki D_{ki} zależą od sterowania podstawowego $\bar{a}(x_1)$ oraz $\Psi_0 = \text{const} \leq 0$.

Występujące w (13) zmienne $y_i^q(x_1)$ otrzymujemy w następujący sposób. Na podstawie zależności (5) wprowadzamy oznaczenia

$$y_k(x_q) = y_k(x_q(x_1)) = y_k^q(x_1) \quad (14)$$

Wtedy równania stanu (8) zapisane w poszczególnych podprzedziałach są następujące

$$\frac{d}{dx_1} y_k^q = A_q \sum_{i=1}^n D_{ki} y_i^q(x_1) \quad (15)$$

Na podstawie równań (15) otrzymujemy hamiltoniany składowe w postaci (13).

Zmienne sprzężone $\Psi^q(x_1)$ spełniają równania, które wyznaczamy ze wzorów

$$\frac{d}{dx_1} \Psi_k^q(x_1) = -\frac{\partial H^q(x_1)}{\partial y_k^q(x_1)} \quad (16)$$

Warunki brzegowe dla zmiennych sprzężonych wyznaczamy z warunków transversalności

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \delta y_k(0) \Psi_k^1(0) &= 0 \\ \sum_{k=1}^n \delta y_k(L) \Psi_k^N(L) &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Ponieważ zmienne stanu zmieniają się skokowo (9), więc również zmienne sprzężone zmieniać się będą skokowo w tych samych punktach. Na podstawie teorii [7] skoki te określone są przez

$$\Psi_k(l_p + 0) - \Psi_k(l_p - 0) = -\sum_{i=1}^n \Psi_i(l_p + 0) \frac{\partial h_i}{\partial y_k(l_p - 0)} \quad (18)$$

Dla zmiennych, dla których zachodzi $h_i(\bar{y}(l_p - 0)) = 0$ mamy do czynienia z ciągłymi zmiennymi stanu i ciągłymi zmiennymi sprzężonymi.

Aby w rozważanym zadaniu znaleźć minimum (11), trzeba rozwiązać układy równań (8) i (16) z warunkami brzegowymi dla zmiennych stanu narzuconymi przez konkretny problem oraz wyznaczonych z warunków (17) dla zmiennych sprzężonych. Optymalne sterowanie musi być określone z warunku optymalności (12), w którym występuje suma hamiltonianów składowych. Z warunku tego wynika, że optymalne sterowanie zależy od wszystkich zmiennych stanu i sprzężonych obliczanych dla każdego podprzedziału osobno.

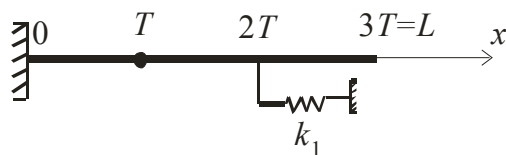
3. Opis badanego problemu

Rozpatrujemy drgania podłużne pręta opisane równaniem

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[EA(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \rho A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (19)$$

Cały pręt dzielimy na N odcinków. Przyjmujemy, że siła zewnętrzna $q(x, t)$ działająca na pręt składa się z szeregu sił skupionych działających w punktach styku podprzedziałów. Dla skupienia uwagi badamy działanie sił na pręt wspornikowy, np. taki jak pokazano na rysunku 1.

Rys. 1. Pręt wspornikowy z dwoma rodzajami sił punktowych
 Fig. 1. A cantilever bar with the two kinds of point forces



W punkcie styku $l_2 = 2T$ działa siła pochodząca od sprężyny o stałej k_1 . Warunki brzegowe i warunki skoku zmiennych stanu, które należy dołączyć do równania (19) są następujące:

1) warunki brzegowe

$$\begin{aligned} x = 0, & & x = L \\ u(0, t) = 0, & & EA(L) \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

2) warunki skoku w punktach l_p

$$EA(l_p + 0) \frac{\partial u(l_p + 0, t)}{\partial x} - EA(l_p - 0) \frac{\partial u(l_p - 0, t)}{\partial x} + S(l_p - 0) = 0 \quad (21)$$

Siła S w naszym przypadku jest siłą sprężystości

$$S = -k_1 u(l_p - 0, t) \quad (22)$$

Postać warunku (21) określać będą funkcje h_k w (9).

Przyjmujemy, że w przemieszczeniu $u(x, t)$ można rozdzielić zmienne

$$u(x, t) = U(x) \sin \omega t \quad (23)$$

Wtedy z (19) mamy

$$\frac{d}{dx} \left[EA(x) \frac{dU(x)}{dx} \right] + \omega^2 \rho A(x) U(x) = 0 \quad (24)$$

oraz siłę S w postaci

$$S = k_1 U(l_p - 0) \quad (25)$$

Warunki brzegowe przechodzą w

$$\begin{aligned} x = 0, & & x = L \\ U(0) = 0, & & EA(L) \frac{\partial U(L)}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Natomiast warunek skoku (21) w

$$EA(l_p + 0) \frac{\partial U(l_p + 0)}{\partial x} - EA(l_p - 0) \frac{\partial U(l_p - 0)}{\partial x} = S \quad (27)$$

gdzie S określone jest wzorem (25).

Zamiast rozwiązywać równanie (24) z warunkami brzegowymi (26) i siłą (25), można rozwiązywać, np. [9], równania postaci

$$\frac{d}{dx_q} \left[EA(x_q) \frac{dU(x_q)}{dx_q} \right] + \omega^2 \rho A(x_q) U(x_q) = 0 \quad (28)$$

gdzie x_q spełnia relację (2) z warunkami (26) oraz z warunkami skoku (27) i warunkami ciągłości przemieszczeń

$$U(l_p + 0) = U(l_p - 0), \quad p = 1, 2, \dots, (N - 1). \quad (29)$$

4. Problem optymalizacji

Szukać będziemy minimum objętości belki

$$J = \int_0^L A(x) dx = \sum_{q=1}^N \int_{l_{q-1}}^{l_q} A(x_q) dx_q \quad (30)$$

Z warunku okresowości (7) przy (5) mamy

$$A(x_1) = A(x_2) = \dots = A(x_N) = F(x_1) \quad (31)$$

Wtedy funkcjonal celu (10) zgodnie z (11) zmienia się w

$$J = \frac{L}{l_1} \int_0^{l_1} F(x_1) dx_1 \quad (32)$$

Oznaczenia (14) dają

$$U_k(x_q) = U_k(x_q(x_1)) = U_k^q(x_1), \quad k = 1, 2 \quad (33)$$

Równania stanu (28) po wykorzystaniu (33) sprowadzamy do układu równań

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_1} U_1^q &= \frac{A_q}{EF(x_1)} U_2^q \\ \frac{d}{dx_1} U_2^q &= -A_q \omega^2 \rho F(x_1) U_1^q \end{aligned} \quad (34)$$

Dołączamy do niego warunki brzegowe (26) w formie

$$U_1^1(0) = 0, \quad U_2^2(l_1) = 0 \quad (35)$$

oraz warunki skoku (29) i (27) przy (9) postaci

$$\begin{aligned} U_1^{p+1}(0) - U_1^p(l_1) &= h_1^p, & h_1^p &= 0 \\ U_2^{p+1}(0) - U_2^p(l_1) &= h_2^p, & h_2^p &= p(l_1) \end{aligned} \quad (36)$$

gdzie siły $p(l_1)$ określone są przez wzory (25).

Dla tak zapisanego problemu optymalizacji hamiltoniany składowe (13) mają postać

$$H^q(x_1) = A_q \Psi_0 F(x_1) + \frac{A_q}{EF(x_1)} U_2^q \Psi_1^q(x_1) - \omega^2 \rho F U_1^q \Psi_2^q \quad (37)$$

Za pomocą H^q znajdujemy równania sprzężone

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx_1} \Psi_1^q &= A_q \omega^2 \rho F(x_1) \Psi_2^q \\ \frac{d}{dx_1} \Psi_2^q &= -\frac{A_q}{EF(x_1)} \Psi_1^q\end{aligned}\quad (38)$$

Do równań (38) dołączamy warunki brzegowe obliczone z warunków transversalności

$$\Psi_2^1(0) = 0, \quad \Psi_1^2(l_1) = 0 \quad (39)$$

Warunki skoku zmiennych sprzężonych obliczamy z równości (18), które można zapisać jako

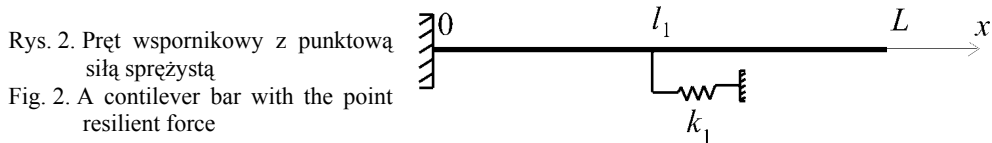
$$\Psi_k^{p+1}(0) - \Psi_k^p(l_1) = -\sum_{i=1}^n \Psi_i^{p+1}(0) \frac{\partial h_i(\bar{U}(l_1))}{\partial U_k^p(l_1)} \quad (40)$$

Po wykorzystaniu (36) w (40) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\Psi_1^2(0) - \Psi_1^1(l_1) &= a_2 \Psi_2^2(0) \\ \Psi_2^2(0) - \Psi_2^1(l_1) &= 0\end{aligned}\quad (41)$$

gdzie

$$a_2 = -k_1 \quad \text{dla} \quad (25) \quad (42)$$



Aby przeprowadzić badany proces optymalizacji, należy rozwiązać układy równań (34) i (38) z warunkami brzegowymi (35) i (39) oraz warunkami skoków (36) i (41). Występujące w równaniach sterowanie podstawowe wyznaczamy z warunku optymalności (12), w którym występuje suma hamiltonianów składowych.

5. Przykład

W przykładzie, który będzie numerycznie ilustrował otrzymane wyniki, rozpatrujemy optymalizację przy okresowym i quasi-okresowym sterowaniu drgań podłużnych pręta wspornikowego podzielonego na dwa odcinki, na styku których działać będzie punktowa siła sprężysta (patrz rys. 2).

Szukamy minimum funkcjonału celu (32)

$$J = \frac{L}{l_1} \int_0^L F(x_1) dx_1 = \min_F V_{\min} \quad (43)$$

przy $\omega = \text{const}$. Wprowadzamy wielkości bezwymiarowe

$$z = \frac{x_1}{L}, \quad a(z) = \frac{F(z)}{F_0}, \quad 0 \leq z \leq \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 = \frac{l_1}{L} \quad (44)$$

gdzie F_0 jest dowolnym, niezależnym od z przekrojem. Funkcjonał celu (43) zmienia się w

$$J = \frac{F_0 L}{\varepsilon_1} \int_0^{\varepsilon_1} a(z) dz \quad (44)$$

Jak wykazano np. w [3], do rozważań należy wprowadzić w funkcjonał celu (43) warunek normalizujący, który ma postać

$$\int_0^{\varepsilon_1} a(z) dz = \varepsilon_1 \quad (45)$$

Funkcjonał celu jest wtedy następujący

$$J = LF_0 = L \int_0^{\varepsilon_1} F_0 dz$$

Stałą F_0 dobieramy tak, aby funkcjonal J był minimalny. Warunek (45) staje się wtedy warunkiem izoperymetrycznym. Hamiltoniany składowe (13) po uwzględnieniu (34) przyjmują postać

$$H^q(x_1) = A_q \Psi_0 L F_0 + \frac{A_q}{EF} U_2^q \Psi_1^q - A_q \omega^2 \rho F U_1^q \Psi_2^q + \Lambda' a \left(\frac{x_1}{L} \right) \quad (46)$$

gdzie $\Psi_0 = \text{const} \leq 0$ oraz Λ' jest stałym współczynnikiem Lagrange'a, który uwzględnia istnienie warunku (45). We wzorze (46) wszystkie składniki mają wymiar [m^3].

Po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych

$$Y_1^q(z) = \frac{U_1^q(z)}{L}, \quad Y_2^q(z) = \frac{U_2^q}{EF_0} \quad (47)$$

równania stanu (34) dla $q = 1, 2$ mają wtedy postać

$$\frac{d}{dz} Y_1^q = \frac{A_q}{a(z)} Y_2^q, \quad \frac{d}{dz} Y_2^q = -\varphi A_q Y_1^q, \quad q = 1, 2 \quad (48)$$

gdzie bezwymiarowa stała φ jest równa

$$\varphi = \frac{\omega^2 \rho L^2}{E} \quad (49)$$

Warunki brzegowe (35) są równoważne warunkom

$$Y_1^1(0) = 0, \quad Y_2^2(\varepsilon_1) = 0 \quad (50)$$

natomiast warunki skoku (36) przy założeniu, że

$$h_1^1 = 0, \quad h_2^2 = k_1 U_1^1(\varepsilon_1) \quad (51)$$

można przedstawić w formie

$$\begin{aligned} Y_1^2(0) - Y_1^1(\varepsilon_1) &= 0 \\ Y_2^2(0) - Y_2^1(\varepsilon_1) &= k_2 Y_1^1(\varepsilon_1) \end{aligned} \quad (52)$$

gdzie stała k_2 jest bezwymiarowa i wynosi

$$k_2 = \frac{k_1 L}{EF_0} \quad (53)$$

Wyrażenia (46) dzielimy przez $F_0 L$. Otrzymujemy bezwymiarowe hamiltoniany

$$H^q(z) = A_q \Psi_0 + \frac{A_q}{a(z)} Y_2^2 \lambda_1^q - \varphi A_q a(z) Y_1^q \lambda_2^q + \Lambda a(z) \quad (54)$$

Zmienne λ_k^q są zmiennymi sprzężonymi określonymi przez zmienne Ψ_k^q wzorami

$$\lambda_1^q = \frac{1}{F_0 L}, \quad \lambda_2^q = \frac{E}{L^2} \Psi_2^q \quad (55)$$

Za pomocą hamiltonianów (54) możemy ze wzorów (16) wyznaczyć równania, które muszą spełniać zmienne λ_k^q . Warunki brzegowe dla λ_k są takie jak (39), natomiast warunki skoku – zgodne z (41), (53) i (55) – mają formę

$$\begin{aligned} \lambda_1^2(0) - \lambda_1^1(\varepsilon_1) &= -k_2 \lambda_2^2 \\ \lambda_2^2(0) - \lambda_2^1(\varepsilon_1) &= 0 \end{aligned} \quad (56)$$

Okazuje się, że rozpatrywany przykład jest samosprzężony. Mianowicie, podstawienie

$$\lambda_1^q = \kappa Y_2^q, \quad \lambda_2^q = -\kappa Y_1^q \quad (57)$$

gdzie κ jest dowolną bezwymiarową stałą, sprowadza równanie określające zmienne sprzężone do równań stanu (48), odpowiednie warunki brzegowe do warunków (5) oraz warunki skoku (56) do warunków (52). Tym samym hamiltoniany składowe (54) można wyrazić wzorami

$$H^q(z) = A_q \Psi_0 + \frac{\kappa A_q}{a(z)} [Y_2^q]^2 + \varphi A_q a(z) \kappa [Y_1^q]^2 + \Lambda a(z) \quad (58)$$

Z warunku optymalności (12) określamy optymalne sterowanie $a(z)$, czyli ekstremalny bezwymiarowy przekrój. W naszym przypadku warunek (12) ma następującą postać

$$\frac{\partial}{\partial a} \sum_{q=1}^2 H^q(z) = 0 \quad (59)$$

Z tego wzoru otrzymujemy

$$a(z) = \left(\frac{C_2(z)}{\lambda + \varphi C_1(z)} \right)^{1/2} \quad (60)$$

gdzie stała $\lambda = \Lambda / \kappa$ oraz

$$\begin{aligned} C_1(z) &= A_1 (Y_1^1)^2 + A_2 (Y_1^2)^2 \\ C_2(z) &= A_1 (Y_2^1)^2 + A_2 (Y_2^2)^2 \end{aligned} \quad (61)$$

Ostatecznie, aby rozwiązać postawiony problem optymalizacji, należy rozwiązać dwa układy równań (48) z warunkami brzegowymi (50) oraz warunkami skoku (52), wykorzystując przekrój (60) i warunek normalizacji (45). Problem można rozwiązać metodą kolejnych przybliżeń:

1. Jako zerowe przybliżenie przekroju przyjmujemy $a_0(z) = 1$. W tym przypadku warunek normalizacji (45) spełniony jest automatycznie. Rozwiązujemy dwa układy równań (48) o stałych współczynnikach. Po spełnieniu warunków brzegowych i skoku znajdujemy stałą φ_0 i funkcje Y_k^{q0} zerowego przybliżenia.
2. Tak otrzymane wielkości wstawiamy do (60) i otrzymujemy pierwsze przybliżenie przekroju, w którym stała λ_0 jest jeszcze nieokreślona

$$a_1(z) = \sqrt{\frac{C_2^0}{\lambda_0 + \varphi_0 C_1^0}} \quad (62)$$

Przekrój (62) wstawiamy do warunku (45) i dobieramy λ_0 tak, aby był on spełniony.

3. Otrzymany zmienny przekrój wstawiamy do równań (48), które mają zmienne współczynniki. Po rozwiązaniu dostajemy φ_1 i funkcje $Y_k^{q1}(z)$. Proces ten powtarzamy tak długo, aż λ i φ ustalą się zadaną dokładnością.

6. Obliczenia numeryczne

Rozważamy dwa przypadki optymalizacji przy różnych podziałach przedziału $[0, L]$ na dwa podprzedziały.

- 1) sterowanie okresowe przy założeniu

$$N = 2, \quad q = 1, 2$$

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = l_1 = \frac{1}{2}L$$

$$A_1 = A_2 = 1, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{2}$$

- 2) sterowanie quasi-okresowe przy założeniu

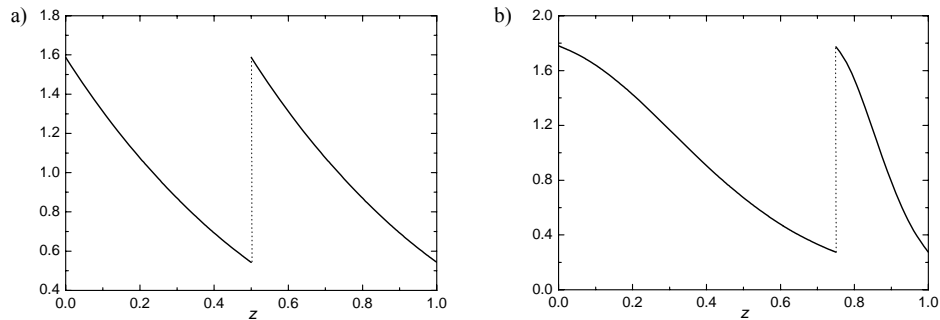
$$N = 2, \quad q = 1, 2$$

$$\Delta l_1 = l_1 = \frac{3}{4}L, \quad \Delta l_2 = \frac{1}{4}L$$

$$A_1 = 1, \quad A_2 = \frac{1}{3}, \quad \varepsilon_1 = \frac{3}{4}$$

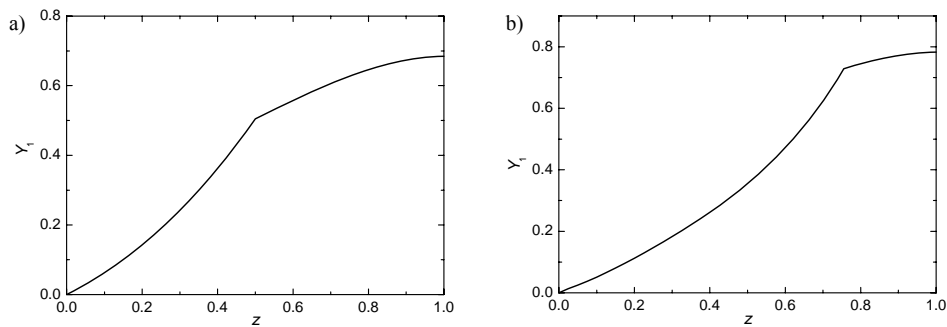
W obu przypadkach zakładamy, że stała sprężystości $k_2 = \frac{1}{2}$.

W pierwszym przypadku równania stanu (48) w obu podprzedziałach są takie same, w drugim przypadku są różne, gdyż $A_1 \neq A_2$. Różne stałe A_q musimy również uwzględnić w funkcjach (61).



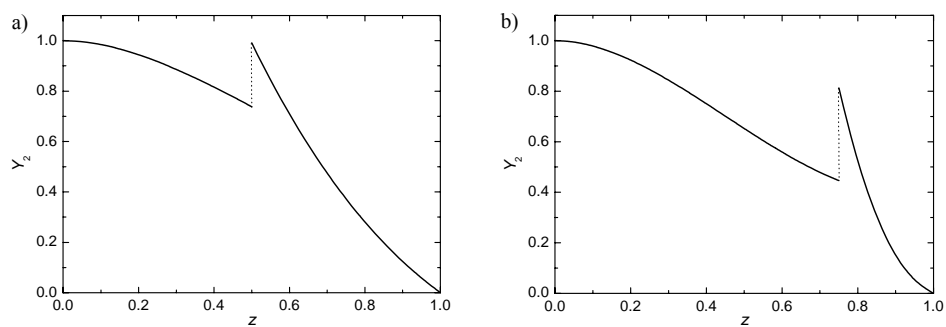
Rys. 3. Przebieg bezwymiarowego sterowania $a(z)$ w przypadku sterowania: a) okresowego i b) quasi-okresowego

Fig. 3. Course of non-dimensional control $a(z)$ for: a) periodical and b) quasi-periodical case



Rys. 4. Przemieszczenie Y_1 w funkcji z w przypadku sterowania: a) okresowego i b) quasi-okresowego

Fig. 4. Dependence of the displacement Y_1 as a function of z for: a) a periodical control and b) a quasi-periodical control



Rys. 5. Zależność siły Y_2 od z w przypadku sterowania: a) okresowego i b) quasi-okresowego

Fig. 5. Dependence for a longitudinal force Y_2 as a function of z for: a) a periodical control and b) a quasi-periodical control

Otrzymujemy następujące wyniki dla parametrów λ i φ :

$$\lambda = 0,1568, \quad \varphi = 4,298 \quad \text{dla pierwszego przypadku – sterowanie okresowe}$$

oraz

$$\lambda = 0,2659, \quad \varphi = 3,326 \quad \text{dla drugiego przypadku – sterowanie quasi-okresowe.}$$

Wykresy bezwymiarowego sterowania $a(z)$, zależności przemieszczenia Y_1 oraz siły Y_2 od z dla obu przypadków przedstawiono na rys. 3–5.

7. Wnioski

W niniejszym artykule przebadano teoretycznie i numerycznie problem optymalizacji drgań podłużnych pręta wspornikowego, w którego punkcie wewnętrznym zaczepiono sprężynę o stałej sprężystości k_1 . Dołączenie sprężyny powoduje w pręcie skok siły podłużnej, który w procesie optymalizacji traktowany jest jako ograniczenia punktowe [7]. Otrzymane wyniki wyznaczono metodą kolejnych przybliżeń z zastosowaniem systemu *Mathematica*. Przebiegi przemieszczeń Y_1^q i sił Y_2^q , $q = 1,2$ zaprezentowano na rys. 4 i 5. Wynika z nich, że przemieszczenie jest ciągle, natomiast siły zmieniają się skokowo w punktach styku podprzedziałów. W obu przypadkach przebieg krzywych wyraźnie różni się od przebiegu w przypadku optymalizacji bez okresowego sterowania. Choć w obu podprzedziałach równania stanu są takie same, to zmiany przebiegu przemieszczeń i sił w tych podprzedziałach są ilościowo różne, pomimo że problem jest autonomiczny. Widać również, że wartość skoku siły w sposób istotny zależy od punktu przyłożenia siły oraz od tego, czy sterowanie jest okresowe, czy quasi-okresowe. Wszystkie widoczne zmiany mają miejsce w podprzedziałach, w których przebieg sterowania (w naszym przypadku przekrój poprzeczny) jest taki sam. Z rysunku 3 wynika, że przebieg sterowania, jego kształt i wartość skoku bardzo mocno zależą od punktu przyłożenia dodatkowej siły, czyli od punktu zaczepienia sprężyny.

Literatura

- [1] Gajewski A., *A note on unimodal and bimodal design of vibrating compressed columns*, Int. J. Mech. Sci. **23**, 1, 1981, 11-16.
- [2] Gajewski A., *Bimodal optimization of a column in an elastic medium with respect to buckling or vibration*, Int. J. Mech. Sci. **27**, 1/2, 1985, 45-53.
- [3] Gajewski A., Życzkowski M., *Optimal structural design under stability constraints*, Kluwer, Dordrecht 1988.
- [4] Gajewski A., Piekarski Z., *Optimal structural design of vibrating beam with periodically varying cross-section*, Structural Optimization **7**, 1/2, 1994, 112-116.
- [5] Nizioł J., Piekarski Z., *The quasi-periodic optimization with various system functions*, Machine Dynamics Problems **1**, **31**, 2007, 60-71.
- [6] Piekarski Z., *Pewne problemy optymalizacji przy sterowaniu okresowym w skończonym przedziale*, Mech. Teor. i Stos. **2**, 30, 1992.

- [7] Piekarski Z., *Optimization with a periodic control and constraints on the state variables*, J. Theor. Appl. Mech. 32, 1994, 395-408.
- [8] Piekarski Z., *Pewne problemy sterowania okresowego*, Monografia 337, seria Mechanika, Politechnika Krakowska, Kraków 2006.
- [9] Solecki R., Szymkiewicz J., *Układy prętowe i powierzchniowe*, Arkady, Warszawa 1964.