

RAFAŁ PALEJ, RENATA FILIPOWSKA*

**METODA STRZAŁÓW W ZASTOSOWANIU
DO ZAGADNIENIA BRZEGOWEGO
Z NADMIAROWĄ LICZBĄ WARUNKÓW BRZEGOWYCH**

**APPLICATION OF THE SHOOTING METHOD
TO A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH
AN EXCESSIVE NUMBER OF BOUNDARY CONDITIONS**

Streszczenie

W artykule przedstawiono sposób zastosowania metody strzałów do rozwiązywania nieliniowego zagadnienia brzegowego z nadmiarową liczbą warunków brzegowych. W tego typu zagadnieniach metoda strzałów wymaga wyznaczenia wielomianów interpolacyjnych, których liczba rośnie wykładniczo wraz ze wzrostem liczby nadwyżkowych warunków brzegowych. Ogólnie można stwierdzić, że metoda strzałów zastosowana do zagadnienia brzegowego z nadmiarową liczbą warunków brzegowych polega na sukcesywnym obniżaniu liczby parametrów podlegających wyznaczeniu.

Słowa kluczowe: nieliniowe zagadnienie brzegowe, metoda strzałów

Abstract

The paper deals with the application of the shooting method to a nonlinear boundary value problem with an excessive number of boundary conditions. The shooting method applied to such a problem requires the establishing of interpolation polynomials, the number of which is exponentially dependent on the number of excessive boundary conditions. In general, the application of the shooting method to a nonlinear boundary value problem with an excessive number of boundary conditions depends on successive lowering of the number of unknown parameters.

Keywords: nonlinear boundary value problem, shooting method

*Dr hab. inż. Rafał Palej, prof. PK, mgr inż. Renata Filipowska, Instytut Informatyki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska.

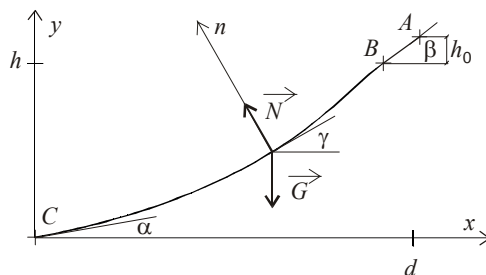
1. Wstęp

Idea metody strzałów polega na zastąpieniu zagadnienia brzegowego zagadnieniem początkowym (o nieznanym parametrze) i kilkakrotnym rozwiązaniu go w celu ustalenia takiej wartości tego parametru, dla której rozwiązanie zagadnienia początkowe będzie odpowiadać rozwiązaniu zagadnienia brzegowego. Zagadnienie początkowe można rozwiązywać w sposób iteracyjny, zbliżając się do poszukiwanej wartości parametru za pomocą równań wariacyjnych opisujących wrażliwość rozwiązania na wartość wprowadzonego parametru [1]. Można też „ostrzelać” pożądany wynik metodą prób i błędów, by wyznaczyć poszukiwaną wartość wprowadzonego parametru po wcześniejszym wyznaczeniu wielomianu interpolacyjnego, opierając się na uzyskanych wynikach [2, 3].

Metodę strzałów można stosować zarówno do liniowych, jak i nieliniowych zagadnień brzegowych. Z reguły liczba warunków brzegowych odpowiada rzędowi równania różniczkowego. W artykule przedstawiono sposób zastosowania metody strzałów do rozwiązania nieliniowego zagadnienia brzegowego w przypadku, gdy liczba warunków brzegowych jest większa od rzędu równania różniczkowego.

2. Sformułowanie zagadnienia

Problem dotyczy zagadnienia punktu materialnego poruszającego się po gładkiej krzywej w jednorodnym polu grawitacyjnym w próżni (rys. 1).



Rys. 1. Graficzna ilustracja zagadnienia
Fig. 1. A graphic illustration of the problem

Zagadnienie brzegowe składa się z nieliniowego równania różniczkowego opisującego związek pomiędzy zarysem krzywej płaskiej a jej reakcją normalną oraz różnymi zestawami warunków brzegowych. Równanie różniczkowe, o którym mowa, wyprowadza się na podstawie drugiego prawa Newtona, zasady zachowania energii, wyrażenia opisującego promień krzywizny oraz związku wynikającego z geometrycznej interpretacji pochodnej.

Reakcja normalna N (rys. 1) występująca podczas ruchu punktu materialnego po krzywej o równaniu $y(x)$ związana jest z zarysem tej krzywej i jej pochodnymi następującym związkiem [4]

$$N(x) = G \frac{1}{\{1+[y'(x)]^2\}^{\frac{1}{2}}} + 2G \frac{h+h_0-y(x)}{\{1+[y'(x)]^2\}^{\frac{3}{2}}} y''(x) \quad (1)$$

Wprowadzając wielkości bezwymiarowe, równanie to przyjmie postać

$$v(\xi) = \frac{1}{\{1 + [\psi'(\xi)]^2\}^{\frac{1}{2}}} + 2 \frac{\eta + \eta_0 - \psi(\xi)}{\{1 + [\psi'(\xi)]^2\}^{\frac{3}{2}}} \psi''(\xi) \quad (2)$$

gdzie:

$$v = \frac{N}{G} \quad \text{– bezwymiarowa reakcja normalna,}$$

$$\eta = \frac{h}{d} \quad \text{– bezwymiarowa wysokość punktu } B,$$

$$\eta_0 = \frac{h_0}{d} \quad \text{– bezwymiarowa wysokość punktu } A \text{ nad punktem } B,$$

$$\xi = \frac{x}{d} \quad \text{– bezwymiarowa współrzędna niezależna,}$$

$$\psi = \frac{y}{d} \quad \text{– bezwymiarowa współrzędna zależna.}$$

Eliminując z równania (2) $\psi''(\xi)$, otrzymamy nieliniowe równanie różniczkowe ze względu na poszukiwany zarys krzywej $\psi(\xi)$

$$\psi''(\xi) = \frac{v(\xi) \{1 + [\psi'(\xi)]^2\}^{\frac{3}{2}} - [\psi'(\xi)]^2 - 1}{2[\eta + \eta_0 - \psi(\xi)]} \quad (3)$$

W równaniu tym reakcja normalna $v(\xi)$ nie ma sprecyzowanego zapisu. Jej postać związana jest z liczbą warunków brzegowych, jakie można sformułować dla omawianego zagadnienia. Poniżej przedstawione zostaną różne warianty zagadnienia brzegowego, począwszy od klasycznego – zawierającego dwa warunki brzegowe, a skończywszy na zagadnieniu zawierającym pięć warunków brzegowych. Każdy z omawianych wariantów będzie rozwiązany metodą strzałów.

3. Zagadnienie brzegowe z dwoma warunkami brzegowymi

Aby poszukiwane rozwiązanie równania (3) przechodziło przez punkty B i C , muszą być spełnione następujące warunki brzegowe

$$\begin{cases} \psi(0) = 0 \\ \psi(1) = \eta \end{cases} \quad (4)$$

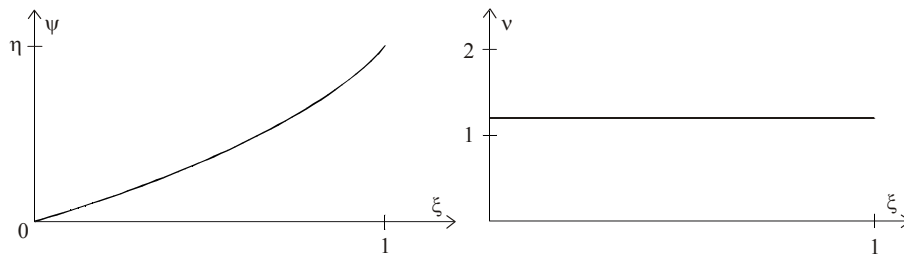
Mamy zatem do czynienia z klasycznym zagadnieniem brzegowym, w którym liczba warunków brzegowych odpowiada rzędowi równania różniczkowego. Zagadnienie to da się rozwiązać przy założeniu, że funkcja $v(\xi)$ ma zadaną postać. W metodzie strzałów zastępujemy zestaw warunków brzegowych (4) zestawem warunków początkowych w postaci

$$\begin{cases} \psi(0) = 0 \\ \psi'(0) = p \end{cases} \quad (5)$$

gdzie p jest nieznanym parametrem.

Rozwiązując kilkakrotnie zagadnienie początkowe dla takich wartości p_i , by rozwiązanie na prawym brzegu $\psi_i(1) = P_i$ przyjmowało wartości bliskie $\bar{P} = \eta$, można sporządzić wielomian interpolacyjny $P(p)$, opierając się na uzyskanych wynikach. Rozwiązując odwrotne zagadnienie interpolacji, polegające na znalezieniu pierwiastka równania $P(p) = \bar{P}$, można wyznaczyć poszukiwaną wartość p^* , dla której $\psi(1) = \eta$.

Przyjęcie $v(\xi) = \text{const}$ oznacza, że poszukiwana krzywa cechować się będzie stałą reakcją normalną podczas ruchu punktu materialnego. Dla danych liczbowych: $\eta = 0,517677569826$, $\eta_0 = 0,114298857$ i $v(\xi) = 1,2$ poszukiwana wartość p^* wynosi $0,3057204$. Wykres rozwiązania zagadnienia brzegowego oraz reakcji normalnej zamieszczono na rys. 2.



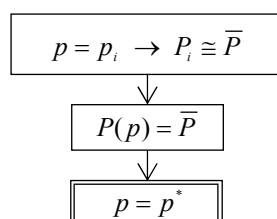
Rys. 2. Wykres rozwiązania zagadnienia brzegowego i reakcji normalnej
Fig. 2. The solution of boundary value problem and the normal reaction force

4. Zagadnienie brzegowe z trzema warunkami brzegowymi

Aby rozwiązanie równania (3) przechodziło przez punkty B i C , a dodatkowo styczna do wykresu była nachylona do osi ξ w punkcie C pod kątem α , muszą być spełnione następujące warunki brzegowe

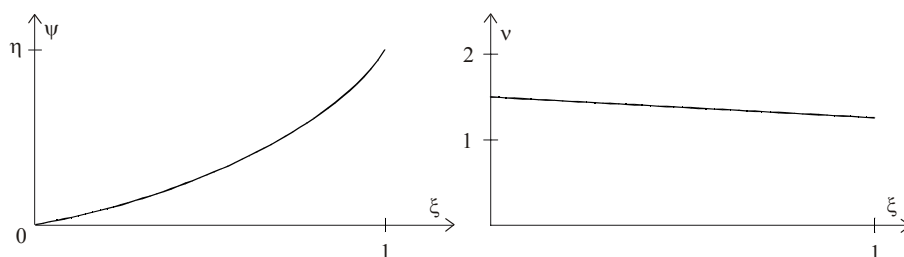
$$\begin{cases} \psi(0) = 0 \\ \psi'(0) = \text{tg } \alpha \\ \psi(1) = \eta \end{cases} \quad (6)$$

Mamy teraz do czynienia z zagadnieniem brzegowym, w którym liczba warunków brzegowych jest o 1 większa od rzędu równania różniczkowego. Zagadnienie to da się rozwiązać w przypadku, gdy funkcja $v(\xi)$ jest określona z dokładnością do jednego parametru oznaczonego podobnie jak poprzednio symbolem p . W metodzie strzałów można wykorzystać dwa pierwsze warunki brzegowe (6) – formułujące zagadnienie początkowe i rozwiązać kilkakrotnie równanie (3) dla takich wartości p_i , by rozwiązanie na prawym brzegu $\psi_i(1) = P_i$ przyjmowało wartości bliskie $\bar{P} = \eta$. Na podstawie uzyskanych wyników można, podobnie jak poprzednio, sporządzić wielomian interpolacyjny $P(p)$. Rozwiązanie równania $P(p) = \bar{P}$ wyznacza poszukiwaną wartość p^* . Sposób wyznaczania wartości parametru p przedstawia poniższy schemat obliczeniowy.



Rys. 3. Sposób wyznaczania wartości parametru p
 Fig. 3. A block diagram presenting the way of computing parameter p

Przyjęcie $v(\xi) = 1,5 - p\xi$ oznacza, że poszukiwana krzywa cechować się będzie linio-zmienną reakcją normalną toru podczas ruchu punktu materialnego. Dla danych liczbowych: η i η_0 takich samych jak w punkcie 3 oraz $\alpha = 10,5^\circ$ poszukiwana wartość p^* wynosi 0,22012874. Wykres rozwiązania zagadnienia brzegowego oraz reakcji normalnej zamieszczony jest na rys. 4.



Rys. 4. Wykres rozwiązania zagadnienia brzegowego i reakcji normalnej
 Fig. 4. The solution of boundary value problem and the normal reaction force

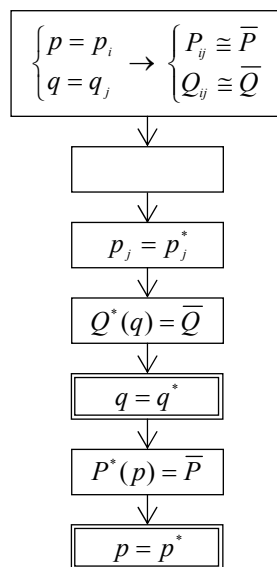
5. Zagadnienie brzegowe z czterema warunkami brzegowymi

Aby rozwiązanie równania (3) przechodziło przez punkty B i C , a dodatkowo styczna do wykresu była nachylona do osi ξ w punktach C i B odpowiednio pod kątem α i β , muszą być spełnione następujące warunki brzegowe

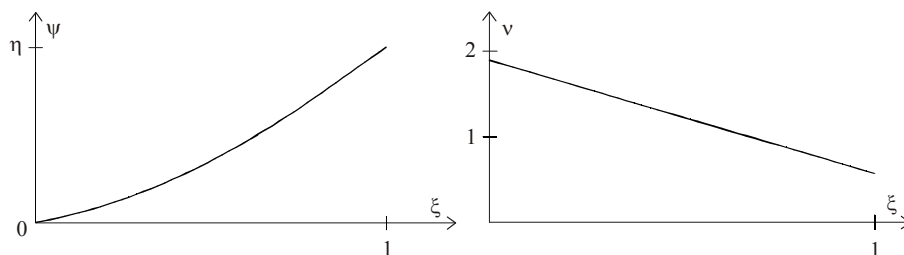
$$\begin{cases} \psi(0) = 0 \\ \psi'(0) = \operatorname{tg} \alpha \\ \psi(1) = \eta \\ \psi'(1) = \operatorname{tg} \beta \end{cases} \quad (7)$$

Mamy zatem do czynienia z zagadnieniem brzegowym, w którym liczba warunków brzegowych jest o 2 większa od rzędu równania różniczkowego. Zagadnienie to można rozwiązać w przypadku, gdy funkcja $v(\xi)$ jest określona z dokładnością do dwóch parametrów: p i q . W metodzie strzałów można wykorzystać dwa pierwsze warunki brzegowe (7), które tworzą wraz z równaniem (3) nieliniowe zagadnienie początkowe. Problem sprowadza się do wyznaczenia takich wartości p^* i q^* , dla których rozwiązanie równania (3)

spełniać będzie pozostałe warunki brzegowe (7). Rozwiązując wielokrotnie zagadnienie początkowe dla takich wartości parametrów $p = p_i$ i $q = q_j$, by rozwiązanie na prawym brzegu $\psi_{ij}(1) = P_{ij}$ przyjmowało wartości bliskie $\bar{P} = \eta$ oraz $\psi'_{ij}(1) = Q_{ij}$ przyjmowało wartości bliskie $\bar{Q} = \text{tg}\beta$, można sporządzić wielomiany interpolacyjne, np. $P_j(p)$. Rozwiązania równań $P_j(p) = \bar{P}$ wyznaczają wartości $p_j = p_j^*$ zapewniające spełnienie trzeciego warunku brzegowego dla każdej wartości q_j . Rozwiązując z kolei równanie $Q^*(q) = \bar{Q}$, gdzie gwiazdka oznacza, że parametr p jest już odpowiednio dobrany dla poszczególnych wartości q_j , otrzymamy poszukiwaną wartość q^* . Rozwiązując na koniec równanie $P^*(p) = \bar{P}$, gdzie gwiazdka oznacza, że wartość parametru q jest już wyznaczona, otrzymamy poszukiwaną wartość p^* . Sposób wyznaczania wartości obu parametrów przedstawia schemat obliczeniowy zamieszczony na rys. 5.



Rys. 5. Sposób wyznaczania wartości parametrów: p i q
Fig. 5. A block diagram presenting the way of computing parameters: p and q



Rys. 6. Wykres rozwiązania zagadnienia brzegowego i reakcji normalnej
Fig. 6. The solution of boundary value problem and the normal reaction force

Przyjęcie $v(\xi) = p - q\xi$ oznacza, że poszukiwana krzywa cechować się będzie liniowo-zmienną reakcją normalną podczas ruchu punktu materialnego. Dla danych liczbowych: η , η_0 i α , takich samych jak w punkcie 4 oraz $\beta = 35^\circ$, poszukiwane wartości p^* i q^* wynoszą odpowiednio 1,8914733 i 1,2006304. Wykres rozwiązania zagadnienia brzegowego oraz reakcji normalnej zamieszczono na rys. 6.

6. Zagadnienie brzegowe z pięcioma warunkami brzegowymi

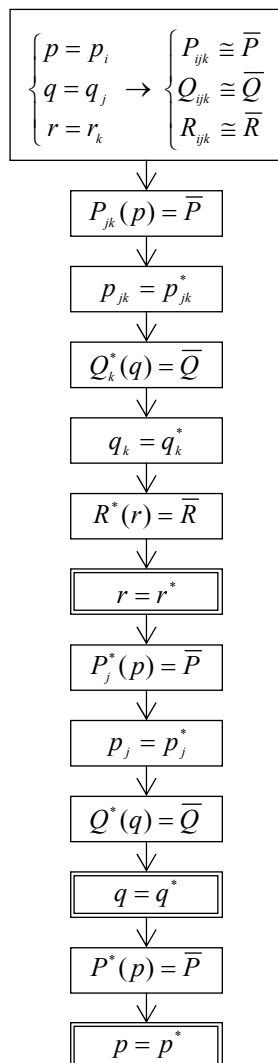
W poprzednim punkcie na rozwiązanie równania różniczkowego (3) nałożone były cztery geometryczne warunki brzegowe narzucające wartości poszukiwanej funkcji i jej pochodnej na obu końcach przedziału. Poszukując rozwiązań tak sformułowanego zagadnienia brzegowego dla $v(\xi) = p - q\xi^i, i = 2, 3, \dots$, można zauważyć, że wraz ze wzrostem wykładnika i maleje wartość reakcji normalnej na prawym końcu przedziału. Dla $i = 8$ reakcja normalna przyjmuje wartość ujemną w tym punkcie, co oznacza, że w przypadku więzów jednostronnych poruszający się punkt straci kontakt z podłożem. Aby nie dopuścić do tego, należałoby dodać piąty, fizyczny warunek brzegowy, odnoszący się do wartości reakcji normalnej na prawym końcu przedziału. Aby zatem rozwiązanie równania (3) przechodziło przez punkty B i C , a dodatkowo styczna do wykresu była nachylona do osi ξ w punktach C i B odpowiednio pod kątem α i β oraz by reakcja normalna przyjmowała wartości dodatnie, muszą być spełnione następujące warunki brzegowe

$$\begin{cases} \psi(0) = 0 \\ \psi'(0) = \operatorname{tg} \alpha \\ \psi(1) = \eta \\ \psi'(1) = \operatorname{tg} \beta \\ v(1) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Mamy tym razem do czynienia z zagadnieniem brzegowym, w którym liczba warunków brzegowych jest o 3 większa od rzędu równania różniczkowego. Zagadnienie to można rozwiązać w przypadku, gdy funkcja $v(\xi)$ będzie określona z dokładnością do trzech parametrów: p , q i r . Podobnie jak poprzednio, można wykorzystać dwa pierwsze warunki brzegowe (8), które tworzą wraz z równaniem (3) nieliniowe zagadnienie początkowe. Problem sprowadza się do wyznaczenia takich wartości p^* , q^* i r^* , dla których rozwiązanie równania (3) spełniać będzie pozostałe warunki brzegowe (8).

Rozwiązując wielokrotnie zagadnienie początkowe dla takich wartości parametrów $p = p_i, q = q_j$ i $r = r_k$, by rozwiązanie na prawym brzegu $\psi_{ijk}(1) = P_{ijk}$ przyjmowało wartości bliskie $\bar{P} = \eta$, $\psi'_{ijk}(1) = Q_{ijk}$ – wartości bliskie $\bar{Q} = \operatorname{tg} \beta$ oraz $v_{ijk}(1) = R_{ijk}$ – wartości bliskie $\bar{R} = 0$, można sporządzić odpowiednie wielomiany interpolacyjne, służące do wyznaczenia poszukiwanych parametrów. Budowanie wielomianów można rozpocząć np. od $P_{jk}(p)$ określających zależność $\psi_{jk}(1)$ dla ustalonych j i k . Rozwiązania równań $P_{jk}(p) = \bar{P}$ wyznaczają wartości $p_{jk} = p_{jk}^*$ zapewniające spełnienie trzeciego warunku

brzegowego dla każdej pary q_j i r_k . Rozwiązując z kolei równania $Q_k^*(q) = \bar{Q}$, gdzie gwiazdka oznacza, że parametr p jest już odpowiednio dobrany, otrzymamy wartości q_k^* zapewniające spełnienie czwartego warunku brzegowego dla poszczególnych wartości r_k .



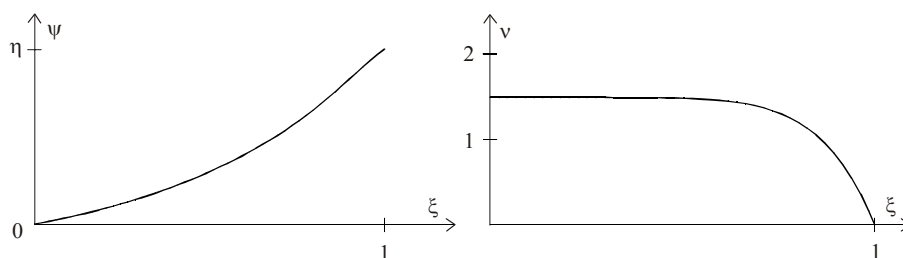
Rys. 7. Sposób wyznaczania wartości parametrów: p , q i r
 Fig. 7. A block diagram presenting the way of computing parameters: p , q and r

Rozwiązując następnie równanie $R^*(r) = \bar{R}$, gdzie gwiazdka oznacza, że wartość parametrów p i q są tak wyznaczone, by spełniony był trzeci i czwarty warunek brzegowy,

otrzymamy poszukiwaną wartość r^* gwarantującą spełnienie piątego warunku. Po określeniu wartości r^* należy wyznaczyć następane wielomiany służące do wyznaczenia wartości kolejnego parametru. Mogą to być wielomiany $P_j^*(p)$, gdzie gwiazdka oznacza fakt dysponowania wskazaną wcześniej wartością parametru r^* . Rozwiązania równań $P_j^*(p) = \bar{P}$ wyznaczają wartości $p_j = p_j^*$ zapewniające spełnienie trzeciego warunku brzegowego dla każdej wartości q_j i wyznaczonej wartości r^* .

Rozwiązując z kolei równanie $Q^*(q) = \bar{Q}$, gdzie gwiazdka oznacza, że wartości pozostałych parametrów gwarantują spełnienie trzeciego i piątego warunku, otrzymamy poszukiwaną wartość q^* . Aby określić wartość p^* , należy wyznaczyć wielomian $P^*(p)$, gdzie gwiazdka oznacza tym razem znajomość pozostałych wartości parametrów. Rozwiązując na koniec równanie $P^*(p) = \bar{P}$, otrzymamy poszukiwaną wartość p^* . Sposób wyznaczania wartości wszystkich parametrów przedstawia schemat obliczeniowy zamieszczony na rys. 7.

Przyjęcie $v(\xi) = p - q\xi^7 - r\xi^8$ oznacza, że poszukiwaną krzywą cechować będzie wielomianowy charakter zmienności reakcji normalnej podczas ruchu punktu materialnego. Dla danych liczbowych: η , η_0 , α i β , takich samych jak w punkcie 5, poszukiwane wartości p^* , q^* i r^* wynoszą odpowiednio 1,4892062588, 0,9003537183 i 0,5888525372. Wykres rozwiązania zagadnienia brzegowego oraz reakcji normalnej zamieszczono na rys. 8.



Rys. 8. Wykres rozwiązania zagadnienia brzegowego i reakcji normalnej
Fig. 8. The solution of boundary value problem and the normal reaction force

7. Wnioski końcowe

Sposób zastosowania metody strzałów w przypadku nadwyżki jednego warunku brzegowego jest taki sam jak w przypadku klasycznym. Nadwyżka dwóch warunków brzegowych wymaga wyznaczenia wielu wielomianów interpolacyjnych pozwalających na wyliczenie pośrednich wartości jednego z parametrów, by – w konsekwencji – wyznaczyć poszukiwane wartości obu parametrów. Problem komplikuje się w przypadku, gdy liczba nadwyżkowych warunków brzegowych jest większa od dwóch. Liczbę niezbędnych wielomianów można wyznaczyć ze wzoru rekurencyjnego

$$w_i = w_{i-1} + \sum_{k=0}^{i-1} m^k, \quad w_0 = 0$$

gdzie i oznacza liczbę nadwyżkowych warunków brzegowych, a m liczbę punktów wyznaczających wielomiany interpolacyjne. Jak widać, liczba wielomianów interpolacyjnych rośnie w sposób wykładniczy wraz ze wzrostem liczby nadwyżkowych warunków brzegowych. Przyjmując $m = 5$, liczba wielomianów dla $i = 1, 2, 3$ wynosi odpowiednio: 1, 7, 38, a liczba niezbędnych do rozwiązania zagadnień początkowych wynosi odpowiednio: 5, 35, 190. W przypadku nadwyżki czterech warunków brzegowych należałoby wyznaczyć 194 wielomiany, po wcześniejszym rozwiązaniu 970 zagadnień początkowych.

Omówiony w artykule przypadek nadwyżki trzech warunków brzegowych ma znaczenie praktyczne. Rozpatrując profil najazdu skoczni narciarskiej pomiędzy częścią startową i progiem, można wyznaczyć zarys spełniający narzucone warunki geometryczne, dla którego reakcja normalna toru będzie przyjmowała najmniejszą możliwą wartość w bezpośrednim sąsiedztwie z progiem. Wartości liczbowe η i η_0 zostały wyliczone dla Wielkiej Krokwi, dla której w wyniku modyfikacji profilu najazdu siła bezwładności działająca na skoczka może zostać obniżona o ponad 26% w stosunku do profilu istniejącego.

Literatura

- [1] Rao S.S., *Applied Numerical Methods for Engineers and Scientists*, Prentice Hall, New Jersey 2002.
- [2] Epperson J.F., *An Introduction to Numerical Methods and Analysis*, John Wiley & Sons Inc., New York 2002.
- [3] Kincaid D., Cheney W., *Analiza numeryczna*, WNT, Warszawa 2006.
- [4] Filipowska R., *Zagadnienie krzywej płaskiej o sterowanej reakcji toru*, I Kongres Mechaniki Polskiej, Warszawa 2007.