

JACEK SNAMINA\*

## ANALIZA PROPAGACJI SPRZĘŻONYCH W LINACH O ZNACZNEJ DŁUGOŚCI

---

### ANALYSIS OF COUPLED WAVES PROPAGATION IN LONG CABLES

#### Streszczenie

W artykule przedstawiono zagadnienie propagacji sprzężonych fal mechanicznych wywołanych impulsem siły działającej w kierunku normalnym do osi liny znajdującej się w położeniu równowagi statycznej. Podstawą analizy są ogólne równania ruchu przewodu uwzględniające parametry linii statycznej równowagi ukształtowanej pod wpływem siły ciężkości. Równania te określają linę jako jednowymiarowy niejednorodny ośrodek falowy, w którym rozprzestrzeniają się fale powodujące ruch przewodu w kierunku stycznym, normalnym i binormalnym. Równania różniczkowe opisujące ruch liny rozwiązano za pomocą transformacji całkowitej Laplace'a.

*Słowa kluczowe: fale, liny, wymuszenie impulsowe*

#### Abstract

In the paper the analysis of coupled wave propagation due to impulsive load is considered. Impulse-type concentrated force is applied in normal direction to the cable standing at the equilibrium position. The base of analysis is linear equations of cable motion including parameters of the equilibrium configuration. Taking into account, that the tension and curvature in the equilibrium configuration depend on the arc co-ordinate, the coefficients of equations are variable. The equations of motion describe mechanical waves traveling along the cable. The equations were solved using the method of Laplace transform.

*Keywords: wave, cables, impulsive load*

---

\*Dr hab. inż. Jacek Snamina, Instytut Mechaniki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska.

## 1. Wstęp

Liny są elementami konstrukcji, w których stosunkowo łatwo można wywołać ruch w postaci rozprzestrzeniających się fal mechanicznych. Przyczyną powstawania fal są wymuszenia umiejscowione w dowolnym punkcie przewodu. Duża podatność, relatywnie mała masa i bardzo małe tłumienie wewnętrzne powodują, że nawet małe zaburzenia stanu równowagi są przenoszone wzdłuż lin na znaczne odległości. Fale rozprzestrzeniają się i wzajemnie oddziałują na siebie, powodując niebezpieczne dla konstrukcji obciążenia dynamiczne, które w dłuższym okresie prowadzą do uszkodzeń konstrukcji.

Współczesne prace z zakresu dynamiki lin koncentrują się głównie na analizie drgań wywołanych różnymi czynnikami oraz na metodach ich eliminacji. Omawiane są również problemy związane z propagacją fal biegnących. Zagadnienia dotyczące rozprzestrzeniania się fal są bardzo istotne w długich przewodach, w których czas rozchodzenia się fali pomiędzy podporami wynosi kilka sekund. W tego typu konstrukcjach obserwuje się przede wszystkim przemieszczające się wzdłuż przewodu fale. Ustalone drgania przęsła wymagałyby utrzymania tych samych warunków zewnętrznych przez długi czas, co w praktyce jest mało prawdopodobne.

Zjawisko propagacji fal jest przedmiotem prac Perkinsa i in. [4–6]. Dotyczą one liniowej analizy przemieszczania się fal w długich przewodach, przy założeniu małego zwisu i pominięciu zależności siły naciągu i krzywizny od współrzędnej łukowej. Autorzy rozważają zagadnienie sprzężenia fal podłużnych i poprzecznych. Zagadnienie propagacji fal w strunie podjęto również w pracy [2]. Asymptotyczne metody analizy propagacji fal przedstawiono w [1].

Zagadnieniom nieliniowym propagacji fal poświęcona jest praca [3]. Zaawansowaną pod względem matematycznym propozycję opisu nieliniowego oddziaływania fal na siebie zaproponowano w [8]. Pozycja ta nie zawiera wyników obliczeń numerycznych. Na podstawie wyprowadzonych wzorów przedstawiono w niej tylko wnioski natury jakościowej.

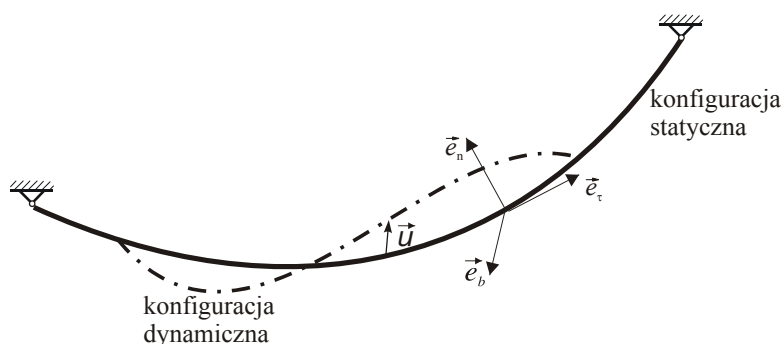
Celem niniejszego artykułu jest analiza ruchu spowodowanego impulsem siły działającej w kierunku normalnym do liny będącej w stanie równowagi statycznej. Założone wymuszenie wywołuje bezpośrednio przemieszczenie w kierunku normalnym oraz pośrednio, w związku z istniejącymi sprzężeniami, przemieszczenie w kierunku stycznym. Impuls jest jednym z podstawowych wymuszeń kontrolnych stosowanych przy analizie konstrukcji. Odpowiedź układu na impuls uzewnętrznia podstawowe cechy dynamiczne układu.

## 2. Równania ruchu liny w układzie naturalnym związanym z linią statycznej równowagi

Obserwując i badając ruch liny, intuicyjnie określamy przemieszczenia jej punktów względem ich położenia w stanie równowagi statycznej liny. W związku z tym wygodnie jest wprowadzić naturalny układ współrzędnych związany z linią statycznej równowagi (rys. 1).

Elementy liny są identyfikowane współrzędną łukową  $\eta$ , określającą położenie punktów liny w stanie równowagi statycznej. Osie układu są wyznaczone przez wektory: styczny  $\vec{e}_t$ , normalny  $\vec{e}_n$  i binormalny  $\vec{e}_b$ . W związku z naturalną symetrią konfiguracji

statycznej początek układu ( $\eta = 0$ ) przyjęto w najniższym punkcie liny. Równania statyki i dynamiki liny ulegają wówczas znacznemu uproszczeniu.



Rys. 1. Konfiguracja statyczna i dynamiczna przewodu  
Fig. 1. Static and dynamic configuration of the cable

Analiza stanu równowagi [7] pozwala m.in. na wyprowadzenie równań opisujących krzywiznę  $\kappa(\eta)$  oraz siłę naciągu  $N(\eta)$  liny w położeniu równowagi jako funkcje współrzędnej łukowej. Mają one następującą postać

$$\kappa = \frac{N_0 \mu g}{N_0^2 + (\mu g \eta)^2} \quad (1)$$

$$N = \sqrt{N_0^2 + (\mu g \eta)^2} \quad (2)$$

gdzie:

$N_0$  – składowa pozioma naciągu,

$\mu$  – gęstość liniowa,

$g$  – przyspieszenie ziemskie.

Przemieszczenie dynamiczne przewodu, opisane wektorem  $\vec{u}$ , ma w układzie naturalnym współrzędne  $[u_1(\eta, t), u_2(\eta, t), u_3(\eta, t)]$ . W ogólnym przypadku równania ruchu przewodu są nieliniowe [7]. Przy założeniu małych przemieszczeń wszystkich punktów przewodu w ogólnych równaniach można pominąć składniki nieliniowe, sprowadzając równania do równań liniowych. Tworząc ze współrzędnych przemieszczenia następującą macierz kolumnową  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$ , liniowe równania różniczkowe ruchu przewodu można zapisać w postaci

$$\mu \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{R} \mathbf{u} \quad (3)$$

gdzie  $\mathbf{R}$  jest operatorem

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} EA_0 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \kappa^2 N & -\kappa(EA_0 + N) \frac{\partial}{\partial \eta} - EA_0 \frac{d\kappa}{d\eta} & 0 \\ \kappa(EA_0 + N) \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{d(\kappa N)}{d\eta} & N \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{dN}{d\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} - \kappa^2 EA_0 & 0 \\ 0 & 0 & N \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{dN}{d\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Operator  $\mathbf{R}$  jest operatorem samosprężonym. W równaniach opisujących dynamikę przewodu występują wyznaczone podczas analizy statycznej dwie wielkości – krzywizna  $\kappa$  oraz siła naciągu  $N$ , a także ich pochodne względem współrzędnej łukowej.

### 3. Analiza propagacji sprzężonych fal wywołanych impulsem siły

Przyjęto, że fala powodująca wychylenie punktów liny w kierunku stycznym będzie nazywana falą styczną. Analogicznie wprowadzono określenia fali normalnej i fali binormalnej. Fale normalna i binormalna są falami poprzecznymi, a fala styczna jest falą wzdłużną. Z postaci równań (3) i (4) wynika, że fala binormalna nie jest sprzężona z pozostałymi falami.

W rozważanych zagadnieniach lina jest jednowymiarowym ośrodkiem falowym ze zmiennymi parametrami:  $N(\eta)$ ,  $\kappa(\eta)$ , które są funkcjami położenia  $\eta$  i nie zależą od czasu. Zmiany parametrów są ciągłe i znaczące dopiero dla odległości znacznie przekraczających długość rozpatrywanych fal. Z punktu widzenia teorii fal omawiane zagadnienie należy do zagadnień fal krótkich.

Założono, że istotne zmiany parametrów odbywają się na odległościach porównywalnych z długością przewodu  $L$ , natomiast fale biegnące, związane ze zjawiskami falowymi w przewodach, mają znacznie mniejszą długość.

Rozważanie fal o większej długości, porównywalnej z długością przęsła, w kategoriach fal biegnących, ma mniejsze znaczenie, gdyż wówczas większość zjawisk jest związana z falami stojącymi, których wzbudzenie w bardzo długich przęsłach jest w rzeczywistości mało prawdopodobne.

Obliczenia można uogólnić, wprowadzając abstrakcyjną linę o nieskończonej długości, w której składowa pozioma naciągu jest taka sama jak w linie wyjściowej, natomiast  $L$  jest umowną odległością związaną z istotnymi zmianami parametrów liny. Wykorzystując te założenia, można rozpatrywać ruch fal w nieograniczonej linie.

W rozważaniach przedstawionych w dalszej części artykułu nie będzie rozpatrywane zjawisko odbicia fal w punktach zamocowania liny. Obliczenia odnoszą się do przedziału czasu, w którym fala nie dochodzi jeszcze do punktu zamocowania.

Przedmiotem rozważań jest analiza ruchu liny wywołanego impulsem siły działającej w punkcie o współrzędnej  $\eta = 0$  i skierowanej wzdłuż osi normalnej. Tak działający impuls wywołuje ruch sprzężonych ze sobą fal: normalnej i stycznej. Impuls nie będzie natomiast powodował powstania fali binormalnej. W związku z tym do dalszej analizy przyjęto układ równań ruchu wynikający z równań (3) i (4), po pominięciu współrzędnej binormalnej  $u_3$  przemieszczenia. Po przekształceniach można układ równań zapisać w postaci

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = EA_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} - (N + EA_0) \kappa \frac{\partial u_2}{\partial \eta} - N \kappa^2 u_1 - EA_0 \frac{d\kappa}{d\eta} u_2 \\ \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = N \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2} + (N + EA_0) \kappa \frac{\partial u_1}{\partial \eta} + \frac{dN}{d\eta} \frac{\partial u_2}{\partial \eta} + \frac{d(N\kappa)}{d\eta} u_1 - EA_0 \kappa^2 u_2 \end{cases} \quad (5)$$

Do rozwiązania zagadnienia rozprzestrzeniania się fal zastosowano przekształcenie Laplace'a. Obliczając transformaty Laplace'a wyrażeń w równaniach (5), przy założeniu zerowych warunków początkowych, otrzymujemy następujący układ

$$\begin{cases} \mu s^2 U_1 = EA_0 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \eta^2} - (N + EA_0) \kappa \frac{\partial U_2}{\partial \eta} - N \kappa^2 U_1 - EA_0 \frac{d\kappa}{d\eta} U_2 \\ \mu s^2 U_2 = N \frac{\partial^2 U_2}{\partial \eta^2} + (N + EA_0) \kappa \frac{\partial U_1}{\partial \eta} + \frac{dN}{d\eta} \frac{\partial U_2}{\partial \eta} + \frac{d(N\kappa)}{d\eta} U_1 - EA_0 \kappa^2 U_2 \end{cases} \quad (6)$$

gdzie  $U_1(\eta, s)$ ,  $U_2(\eta, s)$  oznaczają transformaty Laplace'a przemieszczeń  $u_1(\eta, t)$ ,  $u_2(\eta, t)$ . Całkę szczególną układu równań (6) można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} U_1(\eta, s) &= A_1 e^{\alpha \eta} \\ U_2(\eta, s) &= A_2 e^{\alpha \eta} \end{aligned} \quad (7)$$

Współczynniki  $A_1$ ,  $A_2$  muszą spełniać równania wynikające z (6) po uwzględnieniu założonej postaci rozwiązań (7). Równania te stanowią liniowy, jednorodny układ równań

$$\begin{cases} A_1 \left( EA_0 \alpha^2 - N \kappa^2 - \mu s^2 \right) - A_2 \left( EA_0 \frac{d\kappa}{d\eta} + (N + EA_0) \kappa \alpha \right) = 0 \\ A_1 \left( \frac{d(N\kappa)}{d\eta} + (N + EA_0) \kappa \alpha \right) + A_2 \left( N \alpha^2 + \frac{dN}{d\eta} \alpha - EA_0 \kappa^2 - \mu s^2 \right) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Niezerowe rozwiązania istnieją tylko wówczas, gdy wyznacznik główny rozpatrywanego układu jest równy zero. Warunek ten sprowadza się do równania

$$\begin{aligned} EA_0 N \alpha^4 + EA_0 \frac{dN}{d\eta} \alpha^3 + \left[ 2NEA_0 \kappa^2 - (N + EA_0) \mu s^2 \right] \alpha^2 + \\ + \left[ \frac{dN}{d\eta} EA_0 \kappa^2 + (N + EA_0)^2 \kappa \frac{d\kappa}{d\eta} - \frac{dN}{d\eta} \mu s^2 \right] \alpha + \\ + EA_0 \frac{d(N\kappa)}{d\eta} \frac{d\kappa}{d\eta} + NEA_0 \kappa^4 + (N + EA_0) \kappa^2 \mu s^2 + \mu s^4 = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Równanie (9) powinno być rozwiązane analitycznie tak, aby otrzymać cztery wyrażenia określające  $\alpha$  jako funkcję  $s$ . Jest to możliwe tylko w przypadku pewnych uproszczeń sprowadzających się do pominięcia we wszystkich współczynnikach składników nieliniowych ze względu na krzywiznę  $\kappa$  i jej pochodną względem współrzędnej łukowej  $\eta$ . W rzeczywistych układach krzywizna linii statycznej równowagi jest na tyle mała, że zaproponowane uproszczenia są uzasadnione. Ostatecznie równanie (9) sprowadza się do postaci

$$EA_0 N \alpha^4 + EA_0 \frac{dN}{d\eta} \alpha^3 - (N + EA_0) \mu s^2 \alpha^2 - \frac{dN}{d\eta} \mu s^2 \alpha + \mu s^4 = 0 \quad (10)$$

Poszukiwane wyrażenia określające  $\alpha$  jako funkcję  $s$  otrzymane w wyniku rozwiązania równania (10) można zapisać w następujący sposób

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = -\sqrt{\frac{\mu}{EA_0}} s = -\frac{s}{v_t} \\ \alpha_2 = \sqrt{\frac{\mu}{EA_0}} s = \frac{s}{v_t} \\ \alpha_3 = \frac{1}{2N} \left[ -\frac{dN}{d\eta} - \sqrt{\left(\frac{dN}{d\eta}\right)^2 + 4\mu N s^2} \right] \cong -\sqrt{\frac{\mu}{N}} s - \frac{1}{2N} \frac{dN}{d\eta} = -\frac{s}{v_n} - \frac{1}{2N} \frac{dN}{d\eta} \\ \alpha_3 = \frac{1}{2N} \left[ -\frac{dN}{d\eta} + \sqrt{\left(\frac{dN}{d\eta}\right)^2 + 4\mu N s^2} \right] \cong \sqrt{\frac{\mu}{N}} s - \frac{1}{2N} \frac{dN}{d\eta} = \frac{s}{v_n} - \frac{1}{2N} \frac{dN}{d\eta} \end{array} \right. \quad (11)$$

gdzie:

$$v_t = \sqrt{\frac{EA_0}{\mu}} \quad \text{– prędkość fali stycznej,}$$

$$v_n = \sqrt{\frac{N}{\mu}} \quad \text{– prędkość fali normalnej.}$$

Wzory (11) podają ścisłe rozwiązania oraz rozwiązania przybliżone, w których wykorzystano następujące założenia:

- siła naciągu jest wolnozmienną funkcją współrzędnej łukowej, a więc pochodna siły  $N$  względem  $\eta$  jest małą wielkością,
- rozpatrywane fale są falami krótkimi, a więc istotne wartości transformant związane są ze stosunkowo dużymi wartościami zmiennej  $s$ .

Mając na uwadze postać równań (7), można przeprowadzić wstępną analizę rozwiązań, interpretując poszczególne wyrażenia występujące w transformatach. Łatwo można zauważyć, że dwa ostatnie pierwiastki zapisane w rozwiązaniach (11) są związane z ruchem falowym, w którym dominują fale normalne. Propagacja fal odbywa się w dwóch możliwych kierunkach (zgodnie z rosnącymi wartościami współrzędnej łukowej  $\eta$  i w stronę przeciwną). Ich amplituda maleje wykładniczo wraz z oddalaniem się od najniższego punktu liny ( $\eta = 0$ ). Dwa pozostałe pierwiastki są związane z ruchem falowym, w którym dominują fale styczne. Propagacja tych fal odbywa się również w dwóch możliwych kierunkach, a ich amplituda nie ulega zmianie.

Analizując układ równań (8), można wykazać, że wprowadzone założenia upraszczające powodują rozprzęgnięcie równań, a więc z punktu widzenia analizy sprzężeń między falami normalnymi i stycznymi uproszczenia są zbyt duże. Jak wynika z dotychczasowych rozważań, prędkość i amplituda fali normalnej zależą głównie od siły naciągu i jej pochodnej względem współrzędnej łukowej, natomiast współczynniki sprzężeń fal można wyznaczyć dopiero po uwzględnieniu krzywizny linii statycznej równowagi. Jako podstawę

do analizy sprzężeń pomiędzy falami przyjęto wobec tego ściśle równania zapisane jako układ równań (8), z równoczesnym zastosowaniem zależności przybliżonych (11). Współczynniki określające udział fali normalnej w parze fal z dominującą falą styczną po wykorzystaniu przybliżeń można wyrazić zależnością

$$\delta_{21}^+ = -\delta_{21}^- \cong \frac{v_n^2}{v_t} \kappa \frac{1}{s} \quad (12)$$

Analogicznie współczynniki określające udział fali stycznej w parze fal z dominującą falą normalną można, po zastosowaniu przybliżeń, zapisać następująco

$$\delta_{12}^+ = -\delta_{12}^- \cong -v_n \kappa \frac{1}{s} \quad (13)$$

Transformaty Laplace'a funkcji opisujących przemieszczające się fale mają wobec tego postać

$$\begin{aligned} U_1^+(\eta, s) &= A_1^+ e^{-\frac{s}{v_t}\eta} + \delta_{12}^+ A_2^+ e^{-\frac{s}{v_n}\eta - \frac{1}{2N} \frac{dN}{d\eta}\eta} \\ U_1^-(\eta, s) &= A_1^- e^{\frac{s}{v_t}\eta} + \delta_{12}^- A_2^- e^{\frac{s}{v_n}\eta - \frac{1}{2N} \frac{dN}{d\eta}\eta} \\ U_2^+(\eta, s) &= \delta_{21}^+ A_1^+ e^{-\frac{s}{v_t}\eta} + A_2^+ e^{-\frac{s}{v_n}\eta - \frac{1}{2N} \frac{dN}{d\eta}\eta} \\ U_2^-(\eta, s) &= \delta_{21}^- A_1^- e^{\frac{s}{v_t}\eta} + A_2^- e^{\frac{s}{v_n}\eta - \frac{1}{2N} \frac{dN}{d\eta}\eta} \end{aligned} \quad (14)$$

W wyrażeniach opisujących fale przemieszczające się zgodnie ze zwrotem przyjętej współrzędnej łukowej wprowadzono symbol (+), a w wyrażeniach opisujących fale przemieszczające się w stronę przeciwną wprowadzono symbol (-). Współczynniki  $A_1^+$   $A_1^-$   $A_2^+$   $A_2^-$  należy wyznaczyć z warunków zgodności przemieszczeń i warunków równowagi sił.

Przedmiotem obliczeń jest wyznaczenie fal biegnących wzdłuż liny w wyniku działania impulsu siły przyłożonej w najniższym punkcie liny ( $\eta = 0$ ), w kierunku normalnym do liny pozostającej w stanie statycznej równowagi. Oznaczając przez  $F_n$  siłę działającą na linę, równania wynikające z warunków równowagi sił mają następującą postać

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right|_{\eta=0^-} = \left. \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right|_{\eta=0^+} \\ F_n = N(0) \cdot \left( \left. \frac{\partial u_2}{\partial \eta} \right|_{\eta=0^-} - \left. \frac{\partial u_2}{\partial \eta} \right|_{\eta=0^+} \right) \end{cases} \quad (15)$$

Dodatkowo w punkcie przyłożenia siły spełnione są warunki zgodności przemieszczeń

$$\begin{cases} u_1^-(0, t) = u_1^+(0, t) \\ u_2^-(0, t) = u_2^+(0, t) \end{cases} \quad (16)$$

Dokonując przekształcenia Laplace'a równań (15) i (16) oraz wykorzystując wzory (14) opisujące transformaty Laplace'a przemieszczających się fal, otrzymujemy równania,

z których można wyznaczyć współczynniki  $A_1^+ A_1^- A_2^+ A_2^-$ . Rozwiązując ten układ równań i zachowując w rozwinięciach w szeregi potęgowe tylko składniki z najniższymi potęgami krzywizny  $\kappa$ , otrzymujemy

$$\begin{cases} A_1^+ = \frac{1}{2} \frac{\tilde{F}_n(s)}{N(0)} \frac{v_n^2(0)}{s^2} \kappa(0) \\ A_1^- = -\frac{1}{2} \frac{\tilde{F}_n(s)}{N(0)} \frac{v_n^2(0)}{s^2} \kappa(0) \\ A_2^+ = \frac{1}{2} \frac{\tilde{F}_n(s)}{N(0)} \frac{v_n(0)}{s} \\ A_2^- = \frac{1}{2} \frac{\tilde{F}_n(s)}{N(0)} \frac{v_n(0)}{s} \end{cases} \quad (17)$$

gdzie  $\tilde{F}_n(s)$  jest transformatą Laplace'a siły  $F_n(t)$ .

W rozważanym przypadku, gdy ruch liny jest wywołany impulsem, siłą  $F_n(t)$  można zapisać w postaci  $F_n(t) = S_n \delta(t)$ , gdzie  $S_n$  jest impulsem siły, a  $\delta(t)$  oznacza deltę Diraca. Wówczas transformata Laplace'a wymuszenia sprowadza się do prostego wyrażenia  $\tilde{F}_n(s) = S_n$ . Wykorzystując to w równaniach (17), można wyznaczyć współczynniki  $A_1^+ A_1^- A_2^+ A_2^-$ , które po podstawieniu do równań (14) umożliwiają wyznaczenie transformat funkcji opisujących rozchodzące się fale. Mają one postać

$$\begin{cases} U_1^+(\eta, s) = A_{11} \frac{1}{s^2} e^{-\frac{s}{v_t} \eta} - A_{12} e^{-\frac{1}{2N} \frac{dN}{d\eta} \eta} \frac{1}{s^2} e^{-\frac{s}{v_n} \eta} \\ U_2^+(\eta, s) = A_{21} \frac{1}{s^3} e^{-\frac{s}{v_t} \eta} + A_{22} e^{-\frac{1}{2N} \frac{dN}{d\eta} \eta} \frac{1}{s} e^{-\frac{s}{v_n} \eta} \end{cases} \quad \eta \geq 0 \quad (18)$$

$$\begin{cases} U_1^-(\eta, s) = -A_{11} \frac{1}{s^2} e^{-\frac{s}{v_t} \eta} + A_{12} e^{-\frac{1}{2N} \frac{dN}{d\eta} \eta} \frac{1}{s^2} e^{\frac{s}{v_n} \eta} \\ U_2^-(\eta, s) = A_{21} \frac{1}{s^3} e^{-\frac{s}{v_t} \eta} + A_{22} e^{-\frac{1}{2N} \frac{dN}{d\eta} \eta} \frac{1}{s} e^{\frac{s}{v_n} \eta} \end{cases} \quad \eta \leq 0$$

W równaniach (18) wprowadzono następujące oznaczenia współczynników charakterystycznych dla opisu przemieszczeń

$$\begin{aligned} A_{11} = A_{12} &= \frac{1}{2} \frac{S_n}{N(0)} v_n^2(0) \kappa(0) \\ A_{21} &= \frac{1}{2} \frac{S_n}{N(0)} \frac{v_n^4(0)}{v_t} \kappa^2(0) \\ A_{22} &= \frac{1}{2} \frac{S_n}{N(0)} v_n(0) \end{aligned} \quad (19)$$



Stosując odwrotne przekształcenie Laplace'a w równaniach (18), można wyznaczyć ostateczną postać wyrażeń opisujących przemieszczające się fale

$$\begin{cases} u_1^+(\eta, t) = A_{11} \cdot \left(t - \frac{\eta}{v_t}\right) \cdot H\left(t - \frac{\eta}{v_t}\right) - A_{12} \cdot e^{-\frac{1}{2N} \frac{dN}{d\eta} \eta} \cdot \left(t - \frac{\eta}{v_n}\right) \cdot H\left(t - \frac{\eta}{v_n}\right) \\ u_2^+(\eta, t) = A_{21} \cdot \left(t - \frac{\eta}{v_t}\right)^2 \cdot H\left(t - \frac{\eta}{v_t}\right) + A_{22} \cdot e^{-\frac{1}{2N} \frac{dN}{d\eta} \eta} \cdot H\left(t - \frac{\eta}{v_n}\right) \end{cases} \quad \eta \geq 0$$

$$\begin{cases} u_1^-(\eta, t) = -A_{11} \cdot \left(t + \frac{\eta}{v_t}\right) \cdot H\left(t + \frac{\eta}{v_t}\right) + A_{12} \cdot e^{-\frac{1}{2N} \frac{dN}{d\eta} \eta} \cdot \left(t + \frac{\eta}{v_n}\right) \cdot H\left(t + \frac{\eta}{v_n}\right) \\ u_2^-(\eta, t) = A_{21} \cdot \left(t + \frac{\eta}{v_t}\right)^2 \cdot H\left(t + \frac{\eta}{v_t}\right) + A_{22} \cdot e^{-\frac{1}{2N} \frac{dN}{d\eta} \eta} \cdot H\left(t - \frac{\eta}{v_n}\right) \end{cases} \quad \eta \leq 0$$

gdzie  $H(t)$  jest funkcją skoku jednostkowego.

Analizując otrzymane równania, zauważamy, że przemieszczenia w kierunku stycznym i w kierunku normalnym mają składowe rozchodzące się z dwoma prędkościami. Prędkość  $v_n$  jest charakterystyczna dla pary fal z dominującym przemieszczeniem normalnym (drugie składniki w równaniach). Para fal z dominującym przemieszczeniem stycznym (pierwsze składniki w równaniach) rozchodzą się z prędkością  $v_t$ . Sprężenia ruchu są wynikiem niezerowej krzywizny. Przemieszczenie normalne ma składnik opisany funkcją skoku jednostkowego. Funkcja ta wprowadza nieciągłość przemieszczenia. Z punktu widzenia interpretacji fizycznej tę niedogodność rozwiązania należy traktować w sensie przejścia granicznego, w którym przemieszczenie zmienia swoją wartość bardzo szybko w punktach, do których dochodzi fala poprzeczna. Postać rozwiązania jest nieodłącznie związana z przyjęciem modelu struny do opisu liny. Założony w rozważaniach skończony impuls jest równy zmianie pędu elementu liny. Element liny znajdujący się pod siłą skupioną ma masę dążącą do zera, stąd zmiana prędkości musi dążyć do nieskończoności. W obliczeniach prędkość jest opisana z zastosowaniem delty Diraca.

Zakładając krzywiznę równą zero i stałą siłę naciągu (ten przypadek jest związany z brakiem siły ciężkości), równania sprowadzają się do prostych równań wyrażających ruch tylko w kierunku normalnym. Ten ruch jest opisany przemieszczającym się skokiem przemieszczenia, a opis prędkości zawiera deltę Diraca obrazującą nagłe zmiany prędkości w punktach, do których dochodzi fala.

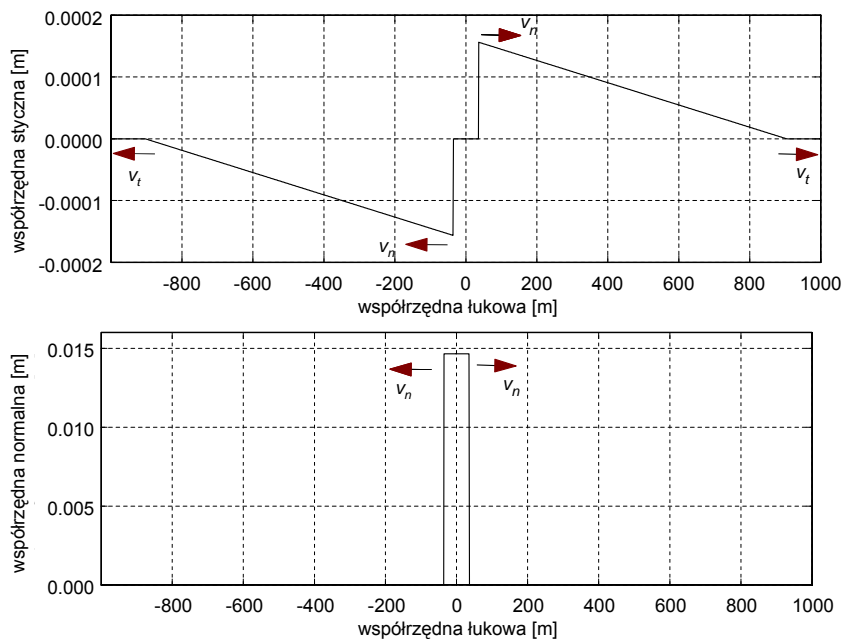
#### 4. Obliczenia numeryczne

Do obliczeń numerycznych przyjęto parametry często stosowanego w energetyce przewodu AFL-6-240: masa jednego metra liny  $\mu = 0,97$  kg/m, siła naciągu w najniższym punkcie przewodu  $N_0 = 30$  kN, uśredniona (uwzględniająca wpływ części stalowej i aluminiowej) wartość parametru związanego z rozciąganiem przewodu  $EA = 2 \cdot 10^7$ . Wartość impulsu siły przyjęto równą  $S_n = 5$  Ns (zakładając, że siła o wartości 1000 N działa w przedziale czasu 5 ms).

Dla przyjętych danych prędkość rozchodzenia się pary fal z dominującą falą normalną wynosi  $v_n = 176$  m/s (przy przechodzeniu przez najniższy punkt przewodu), prędkość rozchodzenia się pary fal z dominującą falą styczną wynosi  $v_t = 4541$  m/s. Charakterystyczne dla przemieszczeń współczynniki  $A_{11}$   $A_{12}$   $A_{21}$   $A_{22}$  określone wzorami (19) mają następujące wartości:

- para fal z dominującą falą normalną ma charakterystyczne współczynniki:  $A_{22} = 14,6 \cdot 10^{-3}$  m dla kierunku normalnego oraz  $A_{12} = 8,14 \cdot 10^{-4}$  m dla kierunku stycznego,
- para fal z dominującą falą styczną ma charakterystyczne współczynniki:  $A_{11} = 8,18 \cdot 10^{-4}$  m dla kierunku stycznego oraz  $A_{21} = 1,8 \cdot 10^{-6}$  m dla kierunku normalnego.

Na rysunku 2 przedstawiono wykresy obrazujące rozchodzące się fale, wywołane założonym impulsem siły. Prezentują one wartości współrzędnej stycznej i normalnej punktów liny w chwili  $t = 0,2$  s.



Rys. 2. Fale przemieszczające się wzdłuż liny  
Fig. 2. Traveling waves in cable

Ruch w kierunku stycznym ma dwie składowe. Składową związaną z falą rozchodzącą się z prędkością  $v_t = 4541$  m/s (w chwili przedstawionej na rysunku początek zaburzenia ma współrzędną ok.  $\pm 908$  m) oraz składową związaną z falą rozchodzącą się z prędkością  $v_n = 176$  m/s (w chwili przedstawionej na rysunku początek zaburzenia ma współrzędną ok.  $\pm 35$  m). Przemieszczenia wynikające z ruchu tych fal w dużej mierze znoszą się, w punkcie o współrzędnej  $\eta = 0$  przemieszczenie styczne jest równe zero w każdej chwili, dla  $\eta \neq 0$  przemieszczenie jest różne od zera i zmienia się z czasem.

Ruch w kierunku normalnym ma również dwie składowe. Jednak ze względu na bardzo małą wartość przemieszczenia (ok.  $10^{-6}$  m) związanego z „szybką składową” na rysunku widoczna jest tylko fala poruszająca się z mniejszą prędkością. Punkty liny, do których nie doszła żadna z fal, mają współrzędne równe zero.

## 5. Uwagi i wnioski końcowe

Analizowane w pracy impulsowe wymuszenie zaburza stan równowagi liny. Wygenerowane zostają fale rozprzestrzeniające się po obu stronach punktu działania impulsu. Fale nie mają charakteru oscylacyjnego, wzdłuż liny propagują się przemieszczenia w kierunkach normalnym i stycznym. Krzywizna linii statycznej równowagi liny jest parametrem odpowiadającym za sprzężenia pomiędzy ruchem w kierunku normalnym i stycznym. Prędkość rozchodzenia się pary fal z dominującą składową w kierunku normalnym zależy w sposób istotny od siły naciągu, która jest funkcją współrzędnej łukowej. Prędkość zmienia się wobec tego wraz z przemieszczaniem się pary fal. Przemieszczenia maleją wykładniczo, tym szybciej, im większa jest pochodna siły naciągu względem współrzędnej łukowej. Prędkość rozchodzenia się pary fal z dominującą składową w kierunku stycznym, w przyjętym przybliżeniu, jest stała.

Przedstawione obliczenia mają charakter przybliżony, wykorzystano w nich znajomość wpływu poszczególnych parametrów związanych ze statyczną równowagą liny na rozchodzące się fale. Założono, że rozpatrywane są fale o małych długościach w porównaniu z odległościami, na których zachodzą istotne zmiany krzywizny i siły naciągu. Po dokonaniu uproszczeń można wyznaczyć przybliżone wzory opisujące pierwiastki równania dyspersyjnego. Transformaty Laplace’a rozwiązań mają wówczas postacie, dla których uzyskuje się, na drodze analitycznej, transformatę odwrotną. Możliwe jest wobec tego analityczne rozwiązanie postawionego zagadnienia.

Wyniki obliczeń, przede wszystkim ze względu na swój przybliżony charakter, powinny być zweryfikowane doświadczalnie zanim będą w pełni zaakceptowane do inżynierskich obliczeń procesów przejściowych w linach. Wykonanie odpowiednich pomiarów jest jednak możliwe tylko na długich przesłach linii elektroenergetycznych, kolejek liniowych itp., tak aby można było zarejestrować sygnały przemieszczeń lub prędkości w przedziałach czasu, w których nie następuje odbicie fal w punktach zamocowania liny.

## Literatura

- [1] Burr K.P., Triantafyllou M.S., Yue D.K.P., *Asymptotic analysis of wave propagation along weakly non-uniform repetitive systems*, Journal of Sound and Vibrations 229, 2000, 21-64.
- [2] Lee S. Y., Mote C.D., *Travelling wave dynamics in a translating string coupled to stationary constrains: energy transfer and mode localization*, Journal of Sound and Vibrations 212, 1998, 1-22.
- [3] Naprstek J., *Propagation of geometrically non-linear waves in prestressed cables*, Proceedings International Symposium on Cable Dynamics, Liege 1995.

- [4] Perkins N.C., Behbahani-Nejad M., *Forced wave propagation in elastic cables with small curvature*, ASME, Design Engineering Technical Conferences, Vol. 3, Part B, 1995, 1457-1464.
- [5] Perkins N.C., Behbahani-Nejad M., *Free wave propagation characteristic of elastic cables*, Proceedings International Symposium on Cable Dynamics, Liege 1995.
- [6] Perkins N.C., Behbahani-Nejad M., *Freely propagating waves in elastic cables*, Journal of Sound and Vibration 2, 1996, 189-202.
- [7] S n a m i n a J., *Mechaniczne zjawiska falowe w przewodach elektroenergetycznych linii napowietrznych*, Monografia nr 287, Wyd. Politechniki Krakowskiej, 2003, 1-175.
- [8] Y o u n g R., *Wave interactions in nonlinear elastic strings*, Arch. Rational Mech. Anal. 161, 2002, 65-92.