

KRZYSZTOF SZUWALSKI*

PRÓBA OPTYMALIZACJI TARCZ WIRUJĄCYCH ZE WZGLĘDU NA NOŚNOŚĆ ROZDZIELCZĄ

AN ATTEMPT OF OPTIMIZATION OF ROTATING DISKS WITH RESPECT TO DECOHESIVE CARRYING CAPACITY

Streszczenie

Przeprowadzona analiza wykazała, że dla zagadnienia nośności rozdzielczej nie da się sformułować problemu optymalizacji. Kresem górnym, a zarazem najlepszym możliwym rozwiązaniem jest zawsze dojście do układu, w którym nośność rozdzielcza nie wystąpi. Przedstawione w artykule propozycje to próba melioracji, ulepszenia układu. Jedynie dołożenie dodatkowego obciążenia w formie ciśnienia zewnętrznego stwarza szansę całkowitego wyeliminowania nośności rozdzielczej.

Słowa kluczowe: nośność rozdzielcza, tarcza wirująca, skokowa niejednorodność

Abstract

Analysis pointed out, that formulation of the optimization problem of decohesive carrying capacity is impossible. The upper bound and simultaneously the best possible solution is to avoid decohesive carrying capacity. Presented in paper proposals in fact are attempts of structure improvements. Only additional loading in form of external pressure makes it possible to eliminate the effect of decohesion.

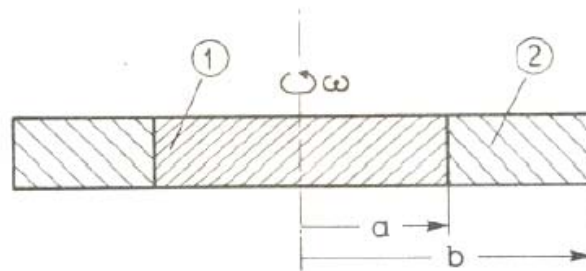
Keywords: decohesive carrying capacity, rotating disk, jump-like nonhomogeneity

*Prof. dr hab. inż. Krzysztof Szuwalski, Instytut Mechaniki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Krakowska.

1. Wstęp

Klasyczna teoria plastyczności przyjmuje, że kres pracy układu idealnie sprężysto-plastycznego jest związany z wyczerpaniem jego nośności granicznej. Dochodzi do niego w chwili wystąpienia mechanizmu zniszczenia plastycznego, w wyniku czego przemieszczenia przynajmniej części układu stają się dowolnie wielkie. Życzkowski i Szuwalski (1973) wykazali, że dla pewnych układów idealnie sprężysto-plastycznych niemożliwe jest zbudowanie ciągłego rozwiązania, aż do chwili pojawienia się mechanizmu zniszczenia plastycznego. Wcześniej – przy pewnym obciążeniu zwanym nośnością rozdzielczą układu – wystąpi kres rozwiązania ciągłego związany w pojawieniem się nieciągłości niedopuszczalnych z punktu widzenia mechaniki ośrodka ciągłego. Najczęściej są to nieciągłości pola przemieszczeń, a w przypadku teorii skończonych odkształceń – nieciągłości pola naprężeń. Szczegółowe omówienia zjawiska nośności rozdzielczej można znaleźć w monografiach [2, 5].

Na inną przyczynę zakończenia procesu odkształceń sprężysto-plastycznych przed wyczerpaniem nośności granicznej wskazał Szuwalski [4, 5]. Analizując pracę niejednorodnej tarczy wirującej (rys. 1), wykazał, że dla pewnych parametrów tarczy rozwiązanie kończy się z chwilą pełnego uplastycznienia części zewnętrznej i dla większych prędkości kątowych nie da się go już rozbudować.



Rys. 1. Niejednorodna tarcza wirująca
Fig. 1. Nonhomogenous rotating disk

W niniejszym artykule podjęta zostanie próba poszerzenia zakresu ciągłego rozwiązania w wyniku pojawienia się dodatkowego obciążenia lub zmiany geometrii tarczy.

2. Nośność rozdzielcza niejednorodnej tarczy wirującej

W celu uzyskania w formie zamkniętej rozwiązania problemu nośności granicznej dla płaskich tarcz wirujących stosuje się warunek Treski–Guesta.

$$\sigma_I - \sigma_{III} = \sigma_0 \quad (1)$$

Wymaga on uszeregowania naprężeń głównych ($\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z \equiv 0$) od największego σ_I do najmniejszego σ_{III} . Warunek H-M-H wprowadza nieliniowość do niejednorodnego równania równowagi i powoduje, że rozwiązanie można znaleźć jedynie w sposób przybliżony,

drogą numerycznego całkowania. Najczęściej zakłada się, że uszeregowanie naprężeń będzie takie jak w swobodnej, wirującej tarczy sprężystej

$$\sigma_{\theta} \geq \sigma_r \geq \sigma_z = 0 \quad (2)$$

i dla pewnych parametrów tarczy będzie ono rzeczywiście zachowane (rys. 2a)). Parametry te będą określone liczbami bezwymiarowymi

$$\rho = \frac{r}{b}; \quad \beta = \frac{a}{b}; \quad Z = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}; \quad Y = \frac{\sigma_{01}}{\sigma_{02}} \quad (3)$$

gdzie:

a, b – promienie na rys. 1,

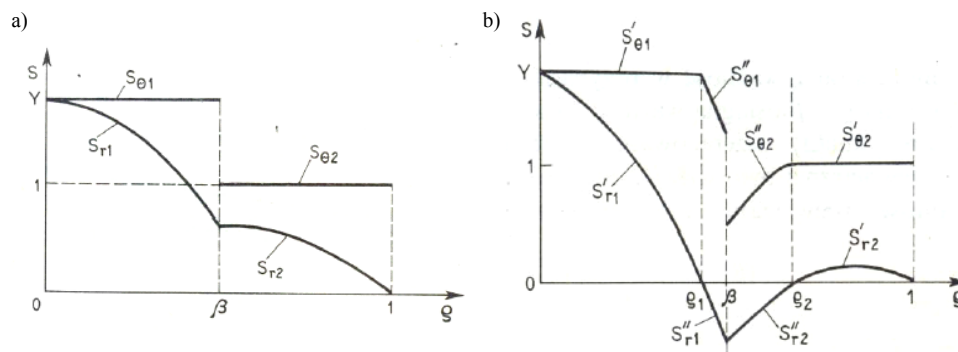
E – moduł Younga,

γ – ciężar właściwy,

σ_0 – granica plastyczności, przy czym indeks 1 oznacza wartość dla wewnętrznego dysku, a indeks 2 dla zewnętrznego pierścienia.

Konsekwentnie wprowadzone zostaną bezwymiarowe naprężenia oznaczone literą s z odpowiednimi indeksami oznaczającymi kierunek i część tarczy, w której występują – odnoszone do granicy plastyczności części zewnętrznej σ_{02} .

Przy sztywnym zewnętrznym pierścieniu naprężenie promieniowe może w pobliżu $\rho = \beta$ przejść na wartości ujemne (rys. 2b)), ale i wtedy możliwe jest pełne uplastycznienie.



Rys. 2. Rozkłady naprężeń w tarczach całkowicie uplastycznionych
Fig. 2. Distributions of stresses in totally plastified disks

Zasadnicza różnica pojawia się dla tarcz o wyraźnie niższej granicy plastyczności części zewnętrznej w stosunku do wewnętrznej (duże wartości Y). Pierwsze uplastycznienie pojawia się w części zewnętrznej na promieniu β ($s_{\theta 2} = 1$). W miarę wzrostu prędkości kątowej charakteryzowanym bezwymiarowym parametrem

$$w = \frac{\omega^2 b^2 \gamma_2}{8g\sigma_{02}} \quad (4)$$

naprężenie promieniowe s_{r_2} w tym miejscu rośnie, ale nie może przekroczyć wartości 1, gdyż wtedy to ono stałoby się największe i warunek plastyczności przyjąłby formę $s_{r_2} = 1$, co po podstawieniu do warunku równowagi wewnętrznej

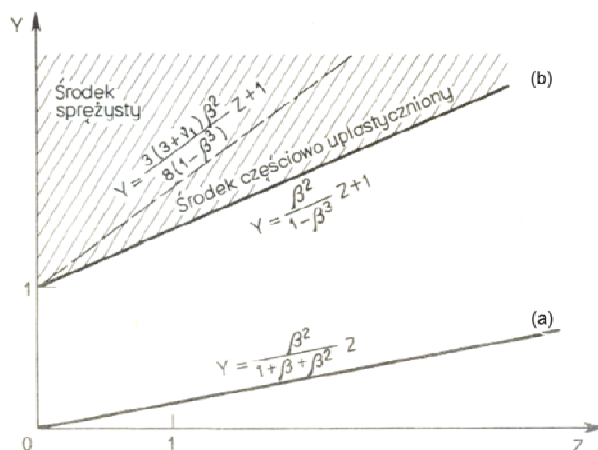
$$\rho \frac{ds_r}{d\rho} + \rho_r - s_\theta + w\rho^2 = 0 \quad (5)$$

dałoby wynik $s_{\theta_2} = 1 + w\rho^2 > s_{r_2}$. Otrzymaliśmy rezultat sprzeczny z założonym uszeregowaniem, wykazując, że nigdy naprężenie promieniowe nie może się stać większe niż obwodowe. Wzrost prędkości kątowej będzie mógł jedynie powodować powiększenie się strefy uplastycznionej, aż dojdzie ona do brzegu zewnętrznego przy wartości

$$\hat{w} = \frac{3}{1-\beta^3} \quad (6)$$

Jest to największa wartość prędkości kątowej, dla której można uzyskać rozwiązanie, gdyż jej zwiększenie spowodowałoby przedstawioną powyżej niezgodność uszeregowania naprężeń, będzie to zatem nośność rozdzielcza układu.

Na rysunku 3 przedstawiono zakresy stosowalności przytoczonych rozwiązań.



Rys. 3. Zakresy występowania nośności granicznej i rozdzielczej
Fig. 3. Domains of existence for limit and decohesion carrying capacities

Dla ustalonego β linie graniczne są liniami prostymi. Część niezakreskowana odpowiada nośności granicznej – w części dolnej dla rozkładu naprężeń z rys. 2b) i w części środkowej dla rozkładu z rys. 2a).

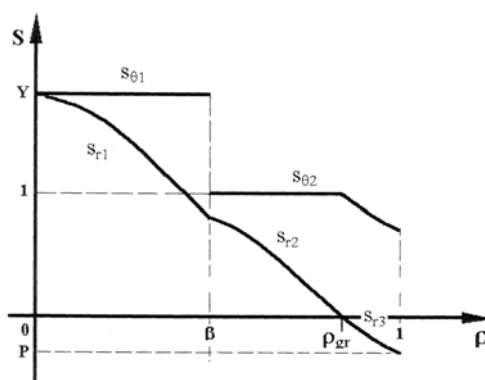
Część zakreskowana oznacza obszar, w którym kres rozwiązania stanowi nośność rozdzielcza (5), przy czym podzielono go na część, w której środkowy dysk pozostanie całkowicie sprężysty i część gdzie ulegnie on częściowemu uplastycznieniu.

Celem niniejszego artykułu będzie próba zminimalizowania obszaru, w którym występuje nośność rozdzielcza.

3. Tarcza obciążona ciśnieniem zewnętrznym

Aby podwyższyć prędkość kątową, dla której można zbudować rozwiązanie sprężysto-plastyczne, należałoby obniżyć wartość naprężenia promieniowego w pierścieniu zewnętrznym na promieniu β . Pierwszym możliwym sposobem będzie przyłożenie na brzegu zewnętrznym dodatkowego ciśnienia ściskającego p (bezwymiarowego odniesionego do σ_{0_2}).

W takim przypadku w pobliżu promienia zewnętrznego naprężenie promieniowe, które przejdzie na wartości ujemne, stanie się najmniejsze (rys. 4).



Rys. 4. Rozkład naprężeń w całkowicie uplastycznionej tarczy z ciśnieniem zewnętrznym p

Fig. 4. Distribution of stresses in totally plastified disk with external pressure p

Jak poprzednio, tak i tu mamy do czynienia z problemem statycznie wyznaczalnym. Przy wyznaczaniu z warunku równowagi i warunku plastyczności rozkładu naprężeń w trzech przedziałach: dysk wewnętrzny, część zewnętrzna do promienia ρ_{gr} gdzie $s_{r_2} = 0$ i część zewnętrzna dla $1 \geq \rho \geq \rho_{gr}$, otrzymujemy trzy stałe całkowania (po jednej w każdym przedziale). Do ich wyznaczenia posłużą następujące warunki ciągłości i brzegowe

$$\begin{aligned} s_{r_1}(0) = 0; \quad s_{r_1}(\beta) = s'_{r_2}(\beta) \\ s''_{r_1}(1) = -p; \quad s'_{r_2}(\rho_{gr}) = s''_{r_2}(\rho_{gr}) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Jak można zauważyć, dysponujemy pięcioma warunkami, z których oprócz stałych całkowania można wyznaczyć promień graniczny jako pierwiastek równania przestępnego

$$\frac{1}{2} w(1 - \rho_{gr}^2) + \ln(\rho_{gr}) - p = 0 \quad (8)$$

oraz odpowiednią nośność graniczną

$$\bar{w} = 3 \frac{\beta(Y-1) + \rho_{gr}}{\beta^3(Z-1) + \rho_{gr}^3} \quad (9)$$

Warto zwrócić uwagę, że dla $\rho_{gr} \rightarrow 1$ otrzymujemy przejście do rozwiązania dla rozkładu naprężeń z rys. 2a). Oczywiście, wtedy z równania (8) $p = 0$. Ograniczeniem stosowności tego rozwiązania będzie żądanie, aby

$$s_{r_2}(\beta) \leq 1 \quad (10)$$

Prowadzi to do równania linii ograniczającej

$$Y = \frac{\rho_{gr} \beta^2}{\rho_{gr}^3 - \beta^3} Z + 1 \quad (11)$$

która przy $\rho_{gr} \rightarrow 1$ przechodzi w linię (b) z rys. 3.

Dla Y większych od prawej strony (11) niemożliwe jest zbudowanie rozwiązań dla prędkości kątowych większych niż nośność rozdzielcza

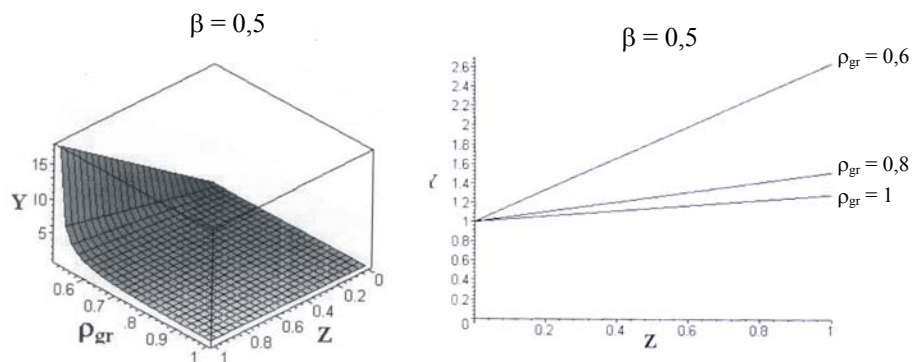
$$\hat{w} = 3 \frac{\rho_{gr}}{\rho_{gr} - \beta^3} \quad (12)$$

Porównując ten wynik z otrzymanym wcześniej dla tarczy swobodnej (6), stwierdzamy, że wartość nośności rozdzielczej będzie tym razem wyższa, gdyż $\rho_{gr} < 1$.

Z równania (11) wynika, że obszar występowania nośności rozdzielczej zniknie całkowicie, jeśli $\rho_{gr} \rightarrow \beta$.

Analiza innych możliwości przebiegów naprężenia promieniowego (może ono nawet parokrotnie zmieniać znak w obrębie zwłaszcza pierścienia zewnętrznego) nie wnosi żadnych istotnych zmian. Oczywiście, jeżeli naprężenia promieniowe zmieniają znak już w części środkowej tarczy, zawsze możliwe jest osiągnięcie pełnego uplastycznienia, a nośność rozdzielcza nie występuje.

Na przykładzie tarczy dla $\beta = 0,5$ pokazano wpływ parametrów tarczy na granicę obszarów występowania nośności granicznej i rozdzielczej (rys. 5).



Rys. 5. Wpływ parametrów tarczy na granicę obszarów nośności sprężystej i rozdzielczej
Fig. 5. Influence of disk parameters on boundary of domains of limit and cohesive carrying capacities

Jak widać, przy $\rho_{gr} \rightarrow \beta$ linia graniczna przebiega pionowo – całkowicie znika obszar występowania nośności rozdzielczej. Tarcza zawsze osiąga swoją nośność graniczną.

4. Tarcza o skokowo zmiennej grubości

Innym sposobem obniżenia naprężeń promieniowych w zewnętrznym pierścieniu na promieniu β jest zwiększenie grubości zewnętrznego pierścienia w stosunku do środkowego dysku. Tym razem jest to rzeczywiście kształtowanie tarczy, a nie zmiana obciążenia. Jeżeli ta zmiana grubości nie jest zbyt wielka, warunek ciągłości siły promieniowej w miejscu połączenia obu części tarczy prowadzi do

$$\chi s_{r_1}(\beta) = s_{r_2}(\beta) \quad (13)$$

gdzie $\chi = \frac{h_1}{h_2}$ określa zmianę grubości tarczy.

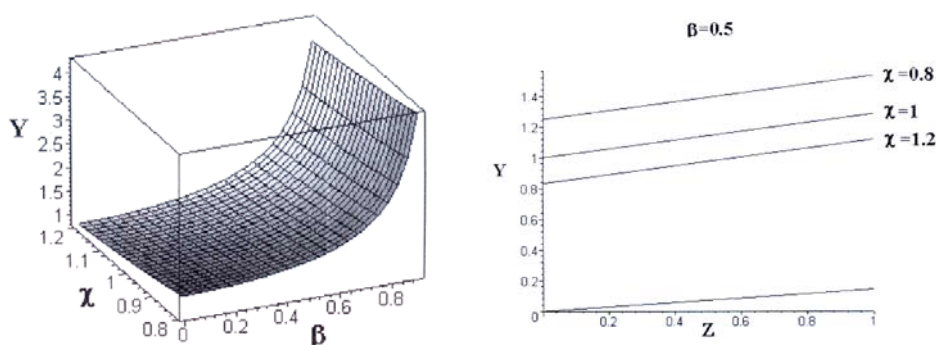
Dla $\chi < 1$ nastąpi zatem obniżenie $s_{r_2}(\beta)$, co pozwoli na szybsze obroty tarczy. Nośność graniczną określa wzór

$$\bar{w} = 3 \frac{1 + \beta(Y\chi - 1)}{1 + \beta^3(Z\chi - 1)} \quad (14)$$

Wzór ten można stosować pod warunkiem spełnienia ograniczenia (11), co pozwala określić granicę jego stosowalności

$$Y = \frac{\beta^2}{1 - \beta^3} Z + \frac{1}{\chi} \quad (15)$$

Powyżej tej granicy nie istnieje rozwiązanie problemu nośności granicznej, gdyż wcześniej wystąpi nośność rozdzielcza określona wzorem (6).



Rys. 6. Granica występowanie nośności granicznej w tarczy o skokowo zmiennej grubości

Fig. 6. Boundary of limit carrying capacity for disks with jump like-change of thickness

Na rysunku 6 pokazano jedynie wartości χ nieznacznie odbiegające od 1 (dla tego przypadku obowiązuje ograniczenie z rys. 3), gdyż tylko wtedy uzasadnione jest korzystanie z warunku (13). Dla χ mniejszego od 1 poszerza się zakres rozwiązania nośności granicznej, przy czym linie graniczne są prostymi równoległymi.

Literatura

- [1] Orzechowski D., *Praca przejściowa*, (rękopis), 2003.
- [2] Skrzypek J., Szuwalski K., Życzkowski M., *Nośność rozdzielcza w teorii plastyczności*, Kraków 1998.
- [3] Szuwalski K., *Nośność graniczna i rozdzielcza skokowo niejednorodnych tarcz wirujących*, Arch. Bud. Maszyn **32** (1-2), 1985, 53-56.
- [4] Szuwalski K., *Elastic, limitand decohesive carrying capacity of a rotating disc with jump-like nonhomogeneity*, Bull. Ac. Pol. Sci. Techn. **34** (11-12), 1986, 665-674.
- [2] Szuwalski K., *Nośność rozdzielcza w płaskich problemach teorii plastyczności*, Wyd. Politechniki Krakowskiej, Kraków 2005.