CZASOPISMO TECHNICZNE M
WYDAWNICTWO POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

z. 4-M/2008
ISSN 0011-4561
ISSN 1897-6328

TERESA WINIARSKA*

RÓWNANIA EWOLUCYJNE Z OPERATOREM TŁUMIENIA

EVOLUTION EQUATIONS WITH A DAMPING OPERATOR

S t r e s z c z e n i e

W artykule rozważa się problem ewolucyjny z operatorem tłumienia. Jest on ściśle związany z pewnym problemem z mechaniki. Występujące w tym zagadnieniu operatory powinny spełniać odpowiednie założenia i w zależności od tych założeń rozważa się cztery różne sytuacje. W każdej z nich podaje się twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania.

Słowa kluczowe: *przestrzeń Banacha*, *przestrzeń ekstrapolacyjna*, *istnienie i jednoznaczność*, *problem ewolucyjny*

A b s t r a c t

In the paper an evolution problem with a damping operator is considered. The issue is closely related to some problems of mechanics. Operators appearing in the problem should satisfy some conditions. Depending on these conditions four different cases are considered. In each of the cases a theorem on existence and uniqueness of solutions is presented.

Keywords: *Banach space*, *extrapolation space*, *existence and uniqueness*, *evolution problem*

*Dr hab. Teresa Winiarska, prof. PK, Instytut Matematyki, Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki Stosowanej, Politechnika Krakowska.

Niech X będzie przestrzenią Banacha i niech $(A(t))_{t\in[0,T]}$ i $(B(t))_{t\in[0,T]}$ będą rodzinami domkniętych operatorów liniowych określonych w przestrzeni X o dziedzinach odpowiednio równych $D(A(t)) = D_A(t)$, $D(B(t)) = D_B(t)$.

Rozważać będziemy następujący problem Cauchy'ego

$$\frac{d^2u}{dt^2} = B(t)\frac{du}{dt} + A(t)u + f(t, u(t), u'(t)),\ t \in [0,T], \tag{1}$$

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ \dfrac{du}{dt}(0) = u_1, \quad u_0, u_1 \in X. \end{cases} \tag{2}$$

Problem (1)–(2) nazywa się problemem ewolucyjnym drugiego rzędu z operatorem tłumienia (operator $B\ (t)$). Problemy ewolucyjne należą do ważnych ze względu na liczne zastosowania. Podamy dla przykładu pewien problem z mechaniki i sprowadzimy go do problemu (1)–(2). Problem ten był rozważany w pracy [4] i dotyczył stateczności pręta wykonanego z materiału lepkosprężystego typu Kelvina–Voigta, na który działa siła zewnętrzna $P = P(t)$ i siła wewnętrzna pochodząca od materiału.

Równanie różniczkowe ruchu ma postać (por. [4])

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda I(x)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t}\right] + P(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma r(x)\frac{\partial w}{\partial t} + \rho A(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \tag{3}$$

gdzie:

$w\ (\cdot,\cdot)$	– ugięcie przekroju w punkcie x w chwili t,
$l(x)$, $A(x)$ i $r(x)$	– odpowiednio, moment bezwładności, pole powierzchni i promień przekroju,
E	– moduł Younga,
λ i γ	– odpowiednio, współczynniki tłumienia wewnętrznego i zewnętrznego,
ρ	– gęstość materiału.

Do równania należy dołączyć warunki brzegowe dla $x = 0$, $x = l$, gdzie l jest długością pręta, oraz warunki początkowe

$$\begin{cases} w(x,0) = \Phi(x), \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}(x,0) = \Phi_1(x). \end{cases} \tag{4}$$

Równanie (3) można przekształcić do postaci

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = &-\frac{1}{\rho A(x)}\left[\gamma r(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\lambda I(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\right]\frac{\partial w}{\partial t} - \\ &-\frac{1}{\rho A(x)}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) + P(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]w \end{aligned} \tag{5}$$

Jeżeli przyjmiemy oznaczenia

$$B := -\frac{1}{\rho A(x)}\left[\gamma r(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\lambda I(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\right]$$

$$A(t) := -\frac{1}{\rho A(x)}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) + P(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right],$$

to równanie (5) z warunkami początkowymi (4) można zapisać w postaci problemu Cauchy'ego

$$\frac{d^2u}{dt^2} = B\frac{du}{dt} + A(t)u, \quad \text{gdzie} \quad u(t) = w(\cdot, t) \tag{6}$$

$$\begin{cases} u(0) = u_0 \\ \dfrac{du}{dt}(0) = u_1, \end{cases} \tag{7}$$

Problem Cauchy'ego (6)–(7) jest problemem ewolucyjnym drugiego rzędu postaci (1)–(2) z operatorem tłumienia. Oznacza to, że problem (1)–(2) ma ścisły związek z konkretnymi zagadnieniami z mechaniki. Powstaje więc pytanie, przy jakich założeniach, o rodzinach $(A(t))_{t\in[0,T]}$ i $(B(t))_{t\in[0,T]}$ oraz o funkcji *f*, problem (1)–(2) ma dokładnie jedno rozwiązanie?

Wyróżnia się następujące przypadki tego problemu:

I. Operatory $A(t) = A$, $B(t) = B$ nie zależą od zmiennej czasowej *t* oraz ich dziedziny są gęste w przestrzeni Banacha *X*, tzn. $\overline{D(A)} = \overline{D_A} = X$ *i* $\overline{D(B)} = \overline{D_B} = X$. Problem ten, przy założeniu, że $f \equiv 0$, jest omówiony w [3] i w związku z tym nie będziemy się nim zajmować.

II. Operatory $A(t) = A, B(t) = B$ nie zależą od zmiennej czasowej *t*, ale ich dziedziny nie są gęste w przestrzeni *X*. O operatorach *A* i *B* przyjmujemy założenie, że operator *A* jest *B* ograniczony, tzn.
$D_A \supset D_B, \exists a, b \in \mathbb{R}_+ : \forall x \in D_B \|Ax\| \le a\|Bx\| + b\|x\|.$

III. Rodziny $(A(t))_{t\in[0,T]}$ i $(B(t))_{t\in[0,T]}$ są zależne od zmiennej czasowej *t*, $\forall t \in [0,T]$ $A(t)$ jest $B(t)$ ograniczony jednostajnie w [0, *T*], dziedzina $D(B(t)) = D_B$ nie zależy od zmiennej czasowej *t* i $\overline{D_B} = X$.

IV. Rodziny $(A(t))_{t\in[0,T]}$ i $(B(t))_{t\in[0,T]}$ są zależne od zmiennej czasowej *t* i dziedziny $D(A(t)) = D_t^A$, $D(B(t)) = D_t^B$ są również zależne od zmiennej czasowej *t* oraz $D_t^A \subset D_t^B$, $t \in [0,T]$.

Aby podać twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności dla przypadku II przyjmuje się następujące założenia:

(Z_1) $B\colon X \supset D_B \to X$ jest operatorem liniowym, domkniętym, niegęsto określonym, tzn. $\overline{D_B} \subsetneq X$,

(Z_2) $A\colon X \supset D_A \to X$ jest operatorem liniowym, domkniętym, $D_B \subset D_A$ i A jest B ograniczony,

(Z_3) $0 \in \rho(A) \cap \rho(B)$, gdzie $\rho(A)$ i $\rho(B)$ są zbiorami rezolwenty odpowiednio operatorów A i B,

(Z_4) B jest operatorem Hille–Yosidy typu (M, ω), tzn.
$\exists \mathrm{M} \geq 1$ i $\omega \in \mathbb{R}$, $(\omega, +\infty) \subset \rho\,(B)$ takie, że

$$\left\| R(\lambda, B)^n \right\| \leq \frac{\mathrm{M}}{(\lambda - \omega)^n}, \quad \lambda > \omega, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Uwaga. Ponieważ dziedzina operatora B nie jest gęsta w X, więc założenie (Z_4) nie zapewnia generowania półgrupy przez operator B.

Definicja 1. Funkcję $u : [0,T] \to X$ nazywa się klasycznym rozwiązaniem problemu (1)–(2), jeżeli

(i) $u \in C^2([0,T], X)$,

(ii) $\forall t \in [0,T]$ $u(t) \in D_A$ i odwzorowanie $[0, T] \ni t \to Au(t)$ jest ciągłe,

(iii) $\forall t \in [0,T]$ $u'(t) \in D_B$ i odwzorowanie $[0, T] \ni t \to Bu'(t)$ jest ciągłe,

(iv) u spełnia (1)–(2).

Problem (1)–(2) w standartowy sposób sprowadza się do, rozważanego w odpowiedniej przestrzeni, problemu macierzowego pierwszego rzędu

$$\frac{dU}{dt} = AU + F(t,U) \tag{8}$$

$$U(0) = U_0, \tag{9}$$

gdzie

$$\mathcal{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \quad \mathcal{X} = \mathrm{X}_1^B \times \mathrm{X},\ \mathrm{X}_1^B = \left(D_B, \|\cdot\|_1^B\right),$$

$$\|x\|_1^B = \|Bx\|,\ U(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix},\ F(t,U) = \begin{bmatrix} 0 \\ f\left(t, u(t), v(t)\right) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A & B \end{bmatrix}, \qquad D(\mathcal{A}) = D_B \times D_B, \quad \overline{D(\mathcal{A})} := \mathcal{X}_0 \neq \mathcal{X}.$$

Oznaczając przez $\mathcal{X}_{-1}^{\mathcal{A}}$ przestrzeń ekstrapolacyjną do przestrzeni $\mathcal{X}$ względem operatora $\mathcal{A}$, problem (8)–(9) zastępujemy problemem

$$\frac{dU}{dt} = \mathcal{A}_{-1} U + F(t,U),\ t \in [0,T], \tag{10}$$

$$U(0) = U_0, \tag{11}$$

rozważanym w przestrzeni $\mathcal{X}_{-1}^{\mathcal{A}}$, gdzie operator $\mathcal{A}_{-1} : \mathcal{X}_{-1}^{\mathcal{A}} \to \mathcal{X}_{-1}^{\mathcal{A}}$ jest operatorem domkniętym, gęsto określonym o dziedzinie $\mathcal{X}_0$.

Prawdziwe jest następujące

Twierdzenie 1. ([8], tw. 4.3.13, s. 82). Jeżeli $F:[0,T]\times\mathcal{X}_0\to\mathcal{X}$ jest klasy C^1 i istnieje stała $L>0$ taka, że

$$\left\|F(t,U_1)-F(t,U_2)\right\|_{\mathcal{X}}\le L\left\|U_1-U_2\right\|_{\mathcal{X}},$$

to problem (10)–(11) ma dokładnie jedno klasyczne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$U_0\in D(\mathcal{A})\quad \text{i}\quad \mathcal{A}U_0+F(0,U_0)\in\mathcal{X}_0$$

i jest to jedyne rozwiązanie następującego równania całkowego

$$U(t)=\tilde{T}(t)U_0+\int_0^t T_{-1}(t-s)F(s,U(s))ds, \tag{12}$$

gdzie $T_{-1}(t)=(\tilde{T}(t))_{-1}$, natomiast $\tilde{T}(t)$ jest półgrupą generowaną przez część operatora $\mathcal{A}$ w przestrzeni $\mathcal{X}_0$.

Natychmiastową konsekwencją tego twierdzenia jest następujące twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania problemu (1)–(2) w przypadku II.

Twierdzenie 2. Jeżeli założenia (Z_1)–(Z_4) są spełnione i

(i) $u_0,u_1\in D(B)$ i $Au_0+Bu_1+f(0,u_0,u_1)\in X_0=\overline{D(B)}$,

(ii) $f:[0,T]\times X_0\times X_0\to X$ jest klasy C^1,

(iii) istnieje stała $L>0$ taka, że

$$\left\|f(t,x_1,y_1)-f(t,x_2,y_2)\right\|\le L\left(\left\|x_1-x_2\right\|+\left\|y_1-y_2\right\|\right)\quad \text{dla}\quad t\in[0,T]\quad \text{i}\quad x_1,x_2,y_1,y_2\in X_0,$$

to w przypadku II problem (1)–(2) ma dokładnie jedno klasyczne rozwiązanie (por. [12]).

Zajmiemy się teraz przypadkiem III i w tym celu przyjmiemy następujące założenia:

(Z_1') dziedzina $D(B(t))=D_B$ i jest niezależna od t, jest gęsta w przestrzeni X i $\forall t\in[0,T]\ D_B\subset D(A(t))$,

(Z_2') operatory $A(t)$ są jednostajnie $B(t)$ ograniczone, tzn. istnieją stałe a, b takie, że

$$\left\|A(t)x\right\|\le a\left\|B(t)x\right\|+b\left\|x\right\|\quad \text{dla}\quad t\in[0,T],x\in D_B,$$

(Z_3') $0\in\rho(A(t))\cap\rho(B(t))$ dla $t\in[0,T]$,

(Z_4') rodzina $(B(t))_{t\in[0,T]}$ jest stabilną rodziną generatorów C_0-półgrup, tzn. istnieje $\mathrm{M}>0$ i $\omega\in\mathbb{R}$ takie, że

a) $(\omega,+\infty)\subset\rho(B(t))$ dla $t\in[0,T]$,

b) $$\left\|\prod_{j=1}^{k}R(\lambda,B(t_j))\right\|\le\frac{\mathrm{M}}{(\lambda-\omega)^k}\quad \text{dla}\quad k=1,2,\ldots,\ \lambda>\omega,\ 0\le t_1\le\ldots\le t_k=T.$$

Analogicznie jak poprzednio problem (1)–(2) sprowadza się do problemu macierzowego pierwszego rzędu (13)

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = \mathcal{A}(t)U(t) + F\big(t, U(t)\big) & (13) \\ U(0) = U_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix}, & (14) \end{cases}$$

gdzie:

$$\mathcal{A}(t) : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X},\ \ \mathfrak{X} = X_1^B \times X \text{ z } \ B = B(0)$$

$$U(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix},\ \mathcal{A}(t)\begin{bmatrix} 0 & I \\ A(t) & B(t) \end{bmatrix},\ D(\mathcal{A}(t)) = D_B \times D_B \subset \mathfrak{X}$$

$$F(t, U(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t, u(t)),\ v(t) \end{bmatrix},\ v(t) = u'(t).$$

Dla każdego $t \in [0,T]$ operator $\mathcal{A}(t)$ zapisujemy w postaci

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_0(t) + \mathcal{B}_1(t) + \mathcal{B}_2(t),$$

gdzie

$$\mathcal{A}_0(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B(t) \end{bmatrix},\ \mathcal{B}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathcal{B}_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A(t) & 0 \end{bmatrix}$$

Można wykazać następujący lemat:

Lemat 1. Jeżeli dla dowolnego $x \in D_B$ odwzorowanie $[0,T] \ni t \to B(t)\,x \in X$ jest klasy C^1 i założenia (Z_1'), (Z_3'), (Z_4') są spełnione, to:

(i) dla każdego $t \in [0,T]$ $\mathcal{A}_0(t)$ jest generatorem C_0 półgrupy na $\mathfrak{X}$,

(ii) rodzina $(\mathcal{A}_0(t))_{t\in[0,T]}$ jest stabilna w $\mathfrak{X}$,

(iii) odwzorowanie

$$[0,T] \ni t \to \mathcal{A}_0(t)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathfrak{X}$$

jest klasy C^1 dla $x, y \in D_B$.

Dowód tego lematu można znaleźć w [12].

Lemat 2. Jeżeli założenia lematu 1 są spełnione, to

(i) operator $\mathcal{A}_0(t) + \mathcal{B}_1(t)$ jest generatorem C_0 półgrupy na $\mathfrak{X}$, dla każdego $t \in [0,T]$,

(ii) rodzina $(\mathcal{A}_0(t) + \mathcal{B}_1(t))_{t\in[0,T]}$ jest stabilna w $\mathfrak{X}_1^{A_0}$, gdzie $\mathfrak{X}_1^{A_0} := \mathfrak{X}_1^{A_0(0)} = X_1^B \times X_1^B$ jest przestrzenią interpolacyjną względem operatora $\mathcal{A}_0(0)$.

Lemat 3. Jeżeli założenia lematu 1 są spełnione i odwzorowanie $[0,T] \ni t \to A(t)\,x \in X$ jest klasy C^1 dla $x \in D_B$, to:

(i) dla każdego $t \in [0,T]$ $\mathcal{A}(t)$ jest generatorem C_0 półgrupy na $\mathfrak{X}$,

(ii) rodzina $(\mathcal{A}(t))_{t\in[0,T]}$ jest stabilna w $\mathfrak{X}$,

(iii) dla dowolnego $(x, y) \in D(\mathcal{A}(t))$ odwzorowanie $[0,T] \ni t \to (\mathcal{A}(t)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathfrak{X}$ jest klasy C^1.

Z powyższych lematów wynika, że przy założeniach występujących w tych lematach spełnione są wszystkie założenia twierdzenia ([9], tw. 4.8 s. 145), z którego wynika, że istnieje rozwiązanie podstawowe problemu (13)–(14)

$$V(t,s) = \begin{bmatrix} v_1(t,s), v_2(t,s) \\ v_3(t,s), v_4(t,s) \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Stąd

$$U(t) = V(t,0)U_0 \tag{16}$$

jest rozwiązaniem problemu jednorodnego odpowiadającego problemowi (13)–(14).

Załóżmy teraz, że X jest refleksyjną przestrzenią Banacha. Wtedy przestrzenie interpolacyjne X_1^B oraz $\mathfrak{X} = X_1^B \times X$ są także przestrzeniami refleksyjnymi (zob. [1], tw. 1.4.9 str. 272 i [6] str. 164). Wówczas można wykazać następujące:

Twierdzenie 3. Jeśli

a) założenia $(Z_1') - (Z_4')$ są spełnione,

b) dla dowolnego $x \in D_B$ odwzorowania $[0,T] \ni t \to A(t)x$, $[0,T] \ni t \to B(t)x$ są klasy C^1,

c) $u_0, u_1 \in D_B$,

d) odwzorowanie $f : [0,T] \times X \times X \to X$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L > 0$, to problem (13)–(14) ma dokładnie jedno klasyczne rozwiązanie.

Dowód tego twierdzenia opiera się na twierdzeniu 4 z pracy [2], z którego wynika istnienie dokładnie jednego rozwiązania problemu (13)–(14), które jest jedynym rozwiązaniem następującego równania całkowego

$$U(t) = V(t,0)U_0 + \int_0^t V(t,s)F(s,U(s))ds \tag{17}$$

Zatem równanie

$$u(t) = v_1(t,0)u_0 + v_2(t,0) + \int_0^t v_2(t,s)f(s,u(s),u'(s))ds \tag{18}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie i jest ono jedynym klasycznym rozwiązaniem problemu (1)–(2).

Pozostał nam do rozważenia przypadek IV.

Definicja 2. (zob. Def. 1). Funkcję u nazywa się klasycznym rozwiązaniem problemu (1)–(2), jeżeli:

(i) $u \in C^2([0,T], X)$,

(ii) $u(t) \in D_t^A$ dla $t \in [0,T]$ i odwzorowanie $[0,T] \ni t \to A(t)u(t) \in X$ jest ciągłe,

(iii) $u'(t) \in D_t^B$ dla $t \in [0,T]$ i odwzorowanie $[0,T] \ni t \to B(t)u'(t) \in X$ jest ciągłe,

(iv) u spełnia (1)–(2).

W rozważanym przypadku problem (1)–(2) nie posiada klasycznego rozwiązania w sensie Definicji 2. Zatem w dalszym ciągu ograniczymy nasze rozważania do poszukiwania rozwiązania uogólnionego problemu (1)–(2). W tym celu przyjmujemy następujące założenia:

(Z_1) dziedzina $D(B(t)) = D_t^B$, $D(A(t)) = D_t^A$ są zależne od t i $D_t^B \subseteq D_t^A$ dla $t \in [0,T]$,

(Z_2) podprzestrzenie $Y_B := \overline{D_t^B}$ i $Y_A := \overline{D_t^A}$ są niezależne od t,

(Z_3) zbiory rezolwent operatorów $A(t)$ i $B(t)$ są niezależne od t, tzn. $\rho(A(t)) = \rho(A)$, $\rho(B(t)) = \rho(B)$ i $0 \in \rho(A) \cap \rho(B)$,

(Z_4) dla $t \in [0,T]$ operator $A^{-1}(t)B(t)$ jest ograniczony oraz rodzina $(B^{-1}(t)A(t))_{t\in[0,T]}$ jest jednostajnie ograniczona i odwzorowania $[0,T] \ni t \to B^{-1}(t)A(t)x \in X$ dla $x \in Y_A$, $[0,T] \ni t \to B^{-1}(t)x \in X$ dla $x \in X$, są klasy C^1,

(Z_5) rodzina $(B(t))_{t\in[0,T]}$ jest rodziną operatorów Hille'a Yosidy,

(Z_6) dla każdych $t, s \in [0,T]$ operator $B^{-1}(t)B(s)$ jest domykalny i odwzorowanie $[0,T] \ni t \to \overline{B^{-1}(t)B(s)} \in Aut(Y_B)$, dla $s \in [0,T]$, jest ciągłe.

Uwaga. Z założenia (Z_6) wynika, że mamy

$$X \ni x \to |x|_t := \left\| B^{-1}(t)x \right\|$$

odpowiadające $t \in [0,T]$ są równoważne (por. [5], tw. 1.47).
Przyjmujemy

$$|x|_0 := \left\| B^{-1}(0)x \right\| \quad \text{dla} \quad x \in X.$$

Ponieważ $(X, |\cdot|_0)$ nie jest przestrzenią zupełną, więc uzupełnianie jej do przestrzeni zupełnej oznaczać będziemy przez X_{-1}^B i nazywać przestrzenią ekstrapolacyjną do przestrzeni X względem operatora $B(0)$ (por. [8], prop. 3.1.7). Przestrzeń Y_B zdefiniowana w (Z_2) jest gęsta w X_{-1}^B (por. [8], tw. 3.1.10). Operator

$$B(t) : Y_B \supset D_t^B \to X_{-1}^B$$

jest ograniczony. Możemy go rozszerzyć na $\overline{D_t^B} = Y_B$ i jego rozszerzenie oznaczamy $B_{-1}(t)$.

W ten sposób otrzymaliśmy rodzinę operatorów liniowych $(B_{-1}(t))_{t\in[0,T]}$ o wspólnej dziedzinie Y_B gęstej w przestrzeni X_{-1}^B.

Zauważmy, że dla każdego $t \in [0,T]$ operator $A(t): X \supset D_t^A \to X_{-1}^B$ jest ograniczony. Istotnie

$$\left|A(t)x\right|_0 = \left\|B^{-1}(0)A(t)x\right\| = \left\|B^{-1}(0)B(t)B^{-1}(t)A(t)x\right\| \leq$$
$$\leq \left\|B^{-1}(0)B(t)\right\|\left\|B^{-1}(t)A(t)x\right\| \leq C\left\|x\right\|$$

Zatem domknięcie $\overline{A(t)}$ operatora $A(t)$ jest operatorem domkniętym na Y_A. Oznaczając przez $A_{-1}(t): X_{-1}^B \supset Y_A \to X_{-1}^B$ domknięcie operatora $A(t)$ z dziedziną Y_A jako podprzestrzenią X_{-1}^B, otrzymaliśmy rodzinę operatorów liniowych $(A_{-1}(t))_{t\in[0,T]}$ domkniętych o wspólnej dziedzinie Y_A gęstej w przestrzeni X_{-1}^B. Można łatwo wykazać następujący

Lemat 4. Jeżeli założenia (Z_1)–(Z_6) są spełnione, to operatory $A_{-1}(t)$ dla $t \in [0,T]$ są jednostajnie $B^{-1}(t)$ ograniczone.

Rozważmy teraz nowy problem w przestrzeni X_{-1}^B jako rozszerzenie problemu (1)–(2).

$$\frac{d^2u}{dt^2} = B_{-1}(t)\frac{du}{dt} + A_{-1}(t)u + f\left(t, u, \frac{du}{dt}\right) \tag{19}$$

$$\begin{cases} u(0) = u_0 \\ \dfrac{du}{dt}(0) = u_1;\ u_0, u_1 \in X_{-1}^B \end{cases} \tag{20}$$

Definicja 3. Rozwiązaniem uogólnionym problemu (1)–(2) nazywamy rozwiązanie klasyczne problemu (19)–(20) w przestrzeni X_{-1}^B.

Rodziny $(A_{-1}(t))_{t\in[0,T]}$ i $(B_{-1}(t))_{t\in[0,T]}$ występujące w problemie (19)–(20) mają następujące własności:

(i) $\forall t \in [0,T]$ dziedzina $D(B_{-1}(t)) = Y_B$ jest stała niezależna od t i gęsta X_{-1}^B,

(ii) $\forall t \in [0,T]$ $Y_B \subset Y_A = \overline{D(A_{-1}(t)}$,

(iii) $\forall t \in [0,T]$, operator $A_{-1}(t)$ jest $B_{-1}(t)$ ograniczony w przestrzeni X_{-1}^B,

(iv) $\forall t \in [0,T]$ operator $B_{-1}(t)$ jest generatorem C_0 półgrupy (por. [8], tw. 3.1.11),

(v) rodzina $(B_{-1}(t))_{t\in[0,T]}$ jest stabilną rodziną generatorów półgrup (zob. [10], tw. 5).

Do problemu (19)–(20) zastosujemy twierdzenie 3. W tym celu należy pokazać, że odwzorowania

$$[0,T] \ni t \to A_{-1}(t)x \in X_{-1}^B \quad \text{dla} \quad x \in Y_A, \tag{21}$$

$$[0,T] \ni t \to B_{-1}(t)x \in X_{-1}^B \quad \text{dla} \quad x \in Y_B \tag{22}$$

są klasy C^1. Z założenia (Z_4) wynika klasa C^1 odwzorowania (22). Aby wykazać, że odwzorowanie (21) jest klasy C^1 udowadniamy następujący:

Lemat 5. Jeżeli założenia (Z_1)–(Z_6) są spełnione, to dla dowolnego $x \in Y_A$ odwzorowanie (21) jest klasy C^1.

Dowód. Niech $x \in Y_A$. Z założenia (Z_4) odwzorowanie

$$[0,T] \ni t \to B^{-1}(t)A(t)x \quad \text{dla} \quad x \in Y_A \tag{23}$$

jest ciągłe. Zatem odwzorowanie

$$[0,T] \ni t \to \overline{B^{-1}(0)A(t)x} \quad \text{dla} \quad x \in Y_A \tag{24}$$

jest również ciągłe. Istotnie, ponieważ

$$\overline{B^{-1}(0)A(t)x} = \overline{B^{-1}(0)B(t)B^{-1}(t)A(t)x}$$

i odwzorowanie

$$[0,T] \ni t \to \overline{B^{-1}(0)B(t)} \tag{25}$$

jest ciągłe (zob. [5], wniosek 1.46 (17)), więc odwzorowanie (24) jest ciągłe. Zatem

$$\left|A_{-1}(t)x - A_{-1}(t_0)x\right|_0 = \left\|B^{-1}(0)[A(t)x - A(t_0)x]\right\| = \left\|B^{-1}(0)A(t)x - B^{-1}(0)A(t_0)x\right\| \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$$

a to oznacza ciągłość odwzorowania (21). Analogicznie dowodzi się klasę C^1 tego odwzorowania.

Twierdzenie 4. Jeżeli X jest przestrzenią refleksyjną, $u_0 \in Y_A$ i $u_1 \in Y_B$ oraz założenia (Z_1)–(Z_6) są spełnione i funkcja $f:[0,T]\times X \times X \to X$ spełnia warunek Lipschitza, tzn. $\exists L > 0 \forall t_1,\ t_2 \in [0,T],\ x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$

$$\left\|f(t_1,x_1,y_1) - f(t_2,x_2,y_2)\right\| \le L(\left|t_1 - t_2\right| + \left|x_1 - x_2\right|_0 + \left|y_1 - y_2\right|_0)$$

to istnieje dokładnie jedno klasyczne rozwiązanie problemu (19)–(20) w przestrzeni X_{-1}^B i rozwiązanie to jest klasy $C^1([0,T];X)$.

Dowód. Z założeń wynika, że

$$\begin{aligned}\left|f(t_1,x_1,y_1) - f(t_2,x_2,y_2)\right|_0 &= \left\|B^{-1}(0)\left[f(t_1,x_1,y) - f(t_2,x_2,y_2)\right]\right\| \le \\ &\le C\left\|f(t_1,x_1,y_1) - f(t_2,x_2,y_2)\right\|\end{aligned}$$

Stąd f jako odwzorowanie z $[0,T]\times X_{-1}^B \times X_{-1}^B$ do X_{-1}^B spełnia warunek Lipschitza.

Z twierdzenia 3 wynika, że istnieje dokładnie jedno klasyczne rozwiązanie problemu (19)–(20). Zatem zgodnie z definicją 1

(i) $u \in C^2([0,T], X_{-1}^B)$,

(ii) $u(t) \in D(A_{-1}(t))$ dla $t \in [0,T]$ i odwzorowanie $[0,T] \ni t \to A_{-1}(t)u(t) \in X_{-1}^B$ jest ciągłe,

(iii) $u'(t) \in D(B_{-1}(t))$ i odwzorowanie $[0,T] \ni t \to B_{-1}(t)u'(t) \in X_{-1}^B$ jest ciągłe,

(iv) u spełnia (19)–(20).

Ale

$$u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s)ds$$

Z tego, że $u(0) \in Y_B$ i $u'(t) \in Y_B$ oraz (iii) wynika, że odwzorowanie

$$[0,T] \ni t \to B_{-1}(0)u'(t) \in X_B$$

jest ciągłe.
Stąd

$$B_{-1}(0)\int_0^t u'(s)ds = \int_0^t B_{-1}(0)u'(s)ds \in Y_B,$$

a więc

$$B_{-1}(0)u(t) = B_{-1}u(0) + \int_0^t B_{-1}(0)u'(s)ds.$$

Ale $(B_{-1}(0)u(t))' = B_{-1}(0)u'(t)$ i

$$\left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} - u'(t) \right\| = \left| B_{-1}(0)\left[\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - u'(t) \right] \right| =$$
$$= \left| \frac{B_{-1}(0)u(t+h) - B_{-1}(0)u(t)}{h} - B_{-1}(0)u'(t) \right| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Z ciągłości (iii) mamy

$$\left| B_{-1}(t)u'(t) - B_{-1}(t_0)u'(t_0) \right| \xrightarrow[t\to t_0]{} 0.$$

Zatem

$$\left\| u'(t) - u'(t_0) \right\| = \left| B_{-1}(0)[u'(t) - u'(t_0)] \right| = \left| B_{-1}(0)B_{-1}^{-1}(t)B_{-1}(t)[u'(t) - u'(t_0)] \right| =$$
$$= \left| B_{-1}(0)B_{-1}^{-1}(t)[B_{-1}(t)u'(t) - B_{-1}(t_0)u'(t_0) + B_{-1}(t_0)u'(t_0) - B_{-1}(t)u'(t_0)] \right| \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$$

Stąd $u \in C^1([0,T], X)$, co kończy dowód.

Literatura

[1] Amann H., *Linear and Quasilinear Parabolic Problems*, Birkhäuser, 1995.

[2] Bochenek J., *An abstract semilinear first order differential equation in the hyperbolic case*, Ann. Polon. Math. **61.1**, 1995, 13-23.

[3] Engel K.-J., Nagel R., *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer, 2000.

[4] Foryś A., Gajewski A., *Parametryczna optymalizacja pręta lepkosprężystego ze względu na stateczność dynamiczną*, Rozpr. Inż. **35,2**, 1987, 297-308.

[5] J u ż y n i e c M., *Dependence on parameter of weak solutions of differential equations in Banach spaces* (in Polish), Kraków 2001, PhD thesis.
[6] K a t o T., *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, 1980.
[7] K r e i n S.G., *Linear Differential Equations in Banach Spaces*, Amer. Math. Soc., 1972.
[8] van N e e r v e n J., *The Adjoint of a Semigroup of Linear Operators*, Springer, 1992.
[9] P a z y A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer Verlag, 1983.
[10] W i n i a r s k a T., *Extrapolation Banach spaces and abstract semilinear second order differential equations*, Int. Journ. of Diff. Equations and Applications., **Vol. 6**, No. 4, 2002, 449-465.
[11] W i n i a r s k a T., *Quasilinear evolution equations with operators dependent on t*, Mathematychni Studdi, **Vol. 21**, No. 2, 2004, 170-178.
[12] W i n i a r s k a T., *Second order Cauchy problem with a damping operator*, Univ. Iag. Acta Math, Fasc. XLIII, 2005, 11-20.
[13] W i n i a r s k a T., W i n i a r s k i T., *Regularity of domains of parametrized families of closed linear operators*, Ann. Polon. Math. **80**, 2003, 231-241.