CZASOPISMO TECHNICZNE M
WYDAWNICTWO POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

z. 2-M/2008
ISSN 0011-4561
ISSN 1897-6328

ЛЕОНИД ХОЛПАНОВ*

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ И МАССОПЕРЕНОСА

MATH MODELLING OF NONLINEAR DYNAMICS AND MASS TRANSFER

Аннотация

В статье рассмотрены методы решения нелинейных уравнений переноса в различных технологических и теплофизических процессах. В качестве объектов теоретического исследования использована система нелинейных уравнений переноса сохранения количества движения, вещества и энергии. Автор изучил эффект линей зависимости фазы в распределенных и нераспределенных системах от амплитуды возмущения. Указанные закономерности нашли применение при рассмотрении ряда теоретических вопросов, связанных с процессами кристаллизации, биогидродинамикой животных, с волоконной оптики, которые могут быть использованы для управления явлениями самоорганизацией и турбулентностью (хаосом)..

Ключевые слова: нелинейные уравнения, уравнения переноса сохранения количества движения, вещества, энергии

Abstract

In the message the methods of the decision of nonlinear dynamics and mass transfer are presented. The methods are illustrated on examples of a wave liquid films flow, mass transfer in a wave films, and mass transfer involving the inlet portion in different regimes. The laws of occurrence of self-organizing and chaos are submitted.

Keywords: the nonlinear equations, the equations of carry of preservation of quantity of movement, substance, energy

* Д. т. н. прфессор Леонид Холпанов,
Институт Проблем Химической Физики РАН. Г. Черноголовка.

В статье рассмотрены методы решения нелинейных уравнений переноса применительно к различным технологическим и теплофизическим процессам. В качестве объектов теоретического исследования использована система нелинейных уравнений переноса сохранения количества движения, вещества и энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{V}) + \rho(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} = \rho \mathbf{f} + \nabla \Pi_{ij} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{V}) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla c = (\nabla \cdot D\nabla c) \tag{3}$$

$$\frac{\partial(\rho \cdot C_p \cdot T)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho \cdot C_p \cdot u_i \cdot T - k\cdot\frac{\partial T}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial P}{\partial t} + u_i \cdot \frac{\partial P}{\partial x_i} + \Phi_g \tag{4}$$

где

$$\Pi_{i,j} = -P\cdot\delta_{i,j} + \mu\cdot\left(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i\right) - (2/3)\cdot\delta_{i,j}\cdot\left(\partial u_k/\partial x_k\right); \quad i,j,k = 1-3$$

где:Φ_g – функция диссипации, которая равна тепловому эквиваленту механической мощности, затрачиваемой вследствие вязкости при деформации жидкости, **f** – объемная сила.

Система уравнений (1)–(4) является предметом исследований различных процессов переноса. В статье представлены результаты решения и анализа этих уравнений применительно к различным процессам.

1. Нелинейная волновая пленка

Изучение волновых течений тонких слоев вязкой жидкости связано в значительной мере с техническими приложениями. Образование волн приводит к существенному изменению интенсивности ряда физических процессов, протекающих в пленке жидкости, и в частности к усилению конвективной диффузии [1]. Эта задача представляет также и определенный теоретический интерес как удобная модель для демонстрации некоторых общих представлений теории гидродинамической устойчивости.

Математическая сложность решения задач, связанных с течением волновой пленки состоит не только в том, что такие задачи нелинейные, но и в том, что волновая поверхность пленки является искомой величиной.

Предположим, что на поверхности жидкости отсутствуют вязкие напряжения (случай влияния газового потока на волновое течение пленки жидкости рассмотрен [1]) и действуют только постоянное давление и сила поверхностного натяжения при условиях $n^2 << 1$, $\frac{n}{\mathrm{Re}} << 1$, $\frac{n}{\mathrm{Ga}} \le (3\cdot\gamma)^{-1/2}\mathrm{Ga}^{-1/6}$. Такое условие справедливо во всей области существования решения. При этих условиях система уравнений (1)–(4) преобразуется к виду

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+g\\
&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0,\quad p=p_0-\sigma\frac{\partial^2 h}{\partial x^2},\quad Q=\int_0^h u\,dy
\end{aligned}
\right\}
\tag{5}
$$

с граничными условиями

$$
u=0\,,\ \ \upsilon=0 \ \ \text{при} \ \ y=0\,;\ \ \frac{\partial u}{\partial y}=0 \ \ \text{при} \ \ y=h(x,t) \tag{6}
$$

Рассмотрим регулярное волновое течение. Уравнение неразрывности будем интегрировать, используя функцию тока

$$
u=\frac{\partial \psi}{\partial y}\,,\quad \upsilon=-\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{7}
$$

Введем безразмерные независимые переменные

$$
\xi=\frac{n}{h_0}\cdot(x-U_0\cdot z\cdot t)\,,\quad \eta=\frac{y}{h\cdot h_0} \tag{8}
$$

и искомые функции $\psi(\xi,\eta)$ и $h(\xi)$. Тогда задачу (5), (6) можно привести к следующему виду

$$
\begin{aligned}
E\cdot\frac{\partial^3\psi}{\partial\eta^3}=&-\left(G\cdot\frac{\partial^3 h}{\partial\xi^3}+H\right)\cdot h^3+\frac{\partial h}{\partial\xi}\cdot\left[z\cdot h\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\eta}+z\cdot h\cdot\eta\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}-\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)^2\right]-\\
&-h\cdot\left(z\cdot h\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}\right)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$
\psi=0\,,\quad \frac{\partial\psi}{\partial\eta}=0 \ \ \text{при} \ \ \eta=0 \tag{10}
$$

$$
\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}=0\,,\quad \frac{\partial}{\partial\xi}(\psi-z\cdot h)=0 \ \ \text{при} \ \ \eta=1
$$

где

$$
\begin{aligned}
&E=3/(\mathrm{Re}\cdot n);\quad G=9\cdot n^2\cdot\gamma\cdot\mathrm{Ga}^{1/3}/\mathrm{Re}^2;\quad n=2\cdot\pi\cdot h_0/\lambda\\
&\mathrm{Re}=3\cdot u_0\cdot h_0/\nu;\qquad H=9\cdot\mathrm{Ga}/(\mathrm{Re}^2\cdot n)\\
&\gamma=\sigma\cdot\rho^{-1}\cdot(g\cdot\nu^4)^{-1/3};\quad \omega=z\cdot u_0;\quad \mathrm{Ga}=g\cdot h_0^{\,3}/\nu^2
\end{aligned}
\tag{11}
$$

В основу решения уравнения (9) положен метод решения нелинейных динамических систем, предложенной в работе [2] и его численная реализация [3]. В результате численного решения уравнения (9) с граничными условиями (10) получена полная динамическая картина течения волновой пленки жидкости [1, 4]. Для практического расчета рекомендованы следующие соотношения

$$
\alpha=0{,}094(\mathrm{Re}/\gamma^{3/11})^{1{,}74};\qquad \mathrm{Re}/\gamma^{3/11}\le 1{,}26
$$

$$
\alpha=(\mathrm{Re}/\gamma^{3/11})/(1{,}44\,\mathrm{Re}/\gamma^{3/11}+5);\quad 1{,}26<\mathrm{Re}/\gamma^{3/11}
$$

$$\alpha = 0,505 + 2,05 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Re}/\ \gamma^{3/11}; \qquad \mathrm{Re}/\ \gamma^{3/11} > 11$$

где $\alpha = (h_{\max} - h_{\min})/(h_{\max} + h_{\min})$ – относительная амплитуда, h – толщина пленки. Сопоставление численных результатов решения этой задачи с опытными данными работ [5, 6] показало удовлетворительное согласие.

2. Массообмен в волновую пленку

Рассмотрим массообмен в волновую пленку при условии, что сопротивление массообмена сосредоточено в ней. В этом случае распределение компонента в пленке определяется уравнением конвективной диффузии (3)

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \upsilon_x \frac{\partial c}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial c}{\partial y} = D \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \tag{12}$$

с граничными условиями

$$c = c \quad \text{при} \quad y = y = a = a[1 + \alpha \cdot \varphi(n(x - \omega \cdot t))] \tag{13}$$

$$c = 0 \quad \text{при} \quad y \to 0 \quad \text{(вдали от поверхности раздела)}$$

где $\varphi(n(x - \omega \cdot t))$ – функция, которая характеризует отклонение волновой поверхности от средней толщины пленки, α – амплитуда волны, $n = 2 \cdot \pi/\lambda$ – волновое число, $\omega = u_0 \cdot z$ – фазовая скорость. Следует обратить внимание, что концентрация распределенного вещества (2) задается на искомой волновой поверхности пленки.

Рассмотрим поведение скорости, например, записанной как параболической

$$\upsilon = 3 \cdot \overline{\upsilon} \cdot \left(\frac{y}{a} - \frac{y}{2 \cdot a} \right) \tag{14}$$

$$\overline{\upsilon} = \omega + \frac{u - \omega}{1 + \alpha \cdot \varphi(n(x - \omega \cdot t))}, \quad a = a[1 + \alpha \cdot \varphi(n(x - \omega \cdot t))]$$

где $\overline{\upsilon}$ и u_0 скорости течения пленки жидкости в локальном и среднем сечениях.

Разделим члены формулы (14) на возмущение волны $a \cdot \alpha \cdot \varphi \cdot (n \cdot (x - \omega \cdot t)$.

В результате получим формулу, составленной из суммы скоростей для гладкой пленки и возмущения скорости из-за наличия волн на поверхности пленки.

$$\upsilon = 3 \cdot u \cdot \left(\frac{y}{h} - \frac{y}{2 \cdot h} \right) + 3 \cdot (\omega - u) \cdot \alpha \cdot \varphi(\xi) \cdot [1 - \alpha \cdot \varphi(\xi)] \cdot \left(\frac{y}{h} - \frac{y}{2 \cdot h} \right) = \upsilon + \upsilon'$$

Наличие возмущения в распределении скорости указывает на особенность поведения решения уравнения (12) с условиями (13). При волновом течении пленки жидкости и массообмене в ней формально соблюдаются основные внешние признаки турбулентности – добавка к осредненной скорости пульсационного движения, как это имеет место при турбулентном движении. Однако эти добавки не носят случайный характер. Об этом также свидетельствует наличие периодической составляющей в зависимости корреляционной функции от частоты. Спектральная плотность для этого случая показывает наличие доминирующей частоты. Показатели Ляпунова имеют отрицательные значения

Все это указывает на вероятность проявления эргодичности движения в фазовом пространстве. Поскольку для эргодичности безразлично, является траектория системы случайной или периодической, то наличие в распределении скоростей двух составляющих (средней и пульсационной) не противоречит проявлению когерентных структур при пленочном волновом течении.

Процедура решения уравнение (12) состоит в следующем. Сначала перейдем к новым переменным $\eta = y - y$, $\xi = n \cdot (x - \omega \cdot t)$, $x = x$. В этих переменных уравнение (12) примет вид

$$(1+\alpha \cdot \sin\xi) \cdot \kappa \cdot \frac{\partial c}{\partial \eta} - \frac{\partial c}{\partial \xi}(d + e \cdot \sin\xi) - \frac{\partial c}{\partial x}(g + h \cdot \sin\xi) = 0$$

где $\kappa = D / \upsilon \cdot n$, $e = 0,5 \cdot z \cdot \alpha$, $d = 1,5 - z$, $g = 1,5 / n$, $h = 1,5 \cdot z \cdot \alpha / n$

Будем искать решение уравнения (15) в вид ряда с условием синфазности [1, 7].

$$c = c(\eta, x) + c(\eta, x) \cdot \sin\xi + c(\eta, x) \cdot \cos\xi + c(\eta, x) \cdot \sin 2\xi + c(\eta, x) \cdot \cos 2\xi + \ldots \qquad (15)$$

Представим решение уравнения (12) формально в форме ряда Фурье (15), но с некоторой особенностью. Особенность состоит в том, что коэффициенты этого ряда зависят от малого параметра при старшей производной. Для этого коэффициенты ряда Фурье представлялись в виде полиномов. Такое представление решения уравнения (12) в форме (15) расширяет возможность применения ряда Фурье для решения уравнений с малым параметром при старшей производной. После того, как подставим ряд (15) в (12) и соберем члены при одинаковых членах разложения, получится система обыкновенных нелинейных уравнений. Эта система решена численно.

На основе аппроксимации численного решения получены коэффициенты массоотдачи для двух случаев

а) По механизму непрерывного роста диффузионного слоя по длине

$$\beta_{нрдс} = \frac{1,96}{\sqrt{1,6 - \alpha^2}} \cdot \left[1 + \frac{5}{4} \cdot (a_0 \cdot \alpha \cdot n)^2\right] \cdot \sqrt{\frac{D \cdot u_0}{L}} \qquad (16)$$

б) По механизму перемешивания на длине волны (когерентный механизм переноса)

$$\beta_{\lambda} = 1,673 \cdot \alpha^{0.7} \cdot \sqrt{\frac{D \cdot u_0}{\lambda}} \qquad \text{или} \qquad \beta_{ж} = 1,673 \cdot \alpha^{0.7} \cdot \sqrt{\frac{D \cdot f}{z}} \qquad (17)$$

где: $f = \upsilon_0 \cdot z / \lambda$ – частота волны, z – безразмерная фазовая скорость.

Проведем сравнение результатов расчета с экспериментальными данными различных исследователей для предложенных двух типов механизма переноса.

В табл**.** 1 проведено сравнение экспериментальных данных авторов работы [8] по массообмену при ламинарном режиме течения пленки жидкости с данными, рассчитанными по формуле **(**16**).**

Из таблицы следует, что при малых числах Рейнольдса (до $\mathrm{Re} \approx 54$) результаты расчета по преложенной формуле (16) (механизм непрерывного роста диффузионного слоя по длине контактного устройства) лучше согласуются с опытными данными. Однако при дальнейшем росте числа Рейнольдса расхождение увеличивается.

Таблица 1

$Re_L = 4 \cdot q / \upsilon$	Десорбция O_2 (β, [м/ч])			Абсорбция CO_2 (β, [м/ч])		
	β^{*1}	β^{*2}	β^{*3}	β^{*1}	β^{*2}	β^{*3}
34	0,13	0,084	0,136	0,115	0,077	0,12
54	0,17	0,0965	0,157	0,154	0,0886	0,145
108	0,24	0,1225	0,198	0,254	0,1125	0,184

*1 Расчет по экспериментальным данным работы [8]

*2 Расчет по формулам для пленка [Хигби, Левич В. Г.]

*3 Расчет по формуле (16), учитывающей волнообразования и непрерывный рост диффузионного слоя

Это связано с тем, что вступает новый механизм переноса, а именно, когерентный механизм переноса, представленный формулой (17). Сравнение данных расчета по формуле (17) с экспериментальными данными данных для коэффициентов массоотдачи, полученных в работе [9] на длинных трубках на расстоянии 2386 мм от верхнего среза трубы для системы O_2–H_2O при 20°С, $D_{O_2-H_2O} = 19 \cdot 10^{-9}$ м^2/с приведено в таблице 2.

Таблица 2

Re_L	α	z	f, [с$^{-1}$] [79]	$\beta_{расч} \cdot 10^5$, [м/с] по (17)	$\beta_{эксп} \cdot 10^5$, [м/с] [9]
60	0,40	1,95	3,30	4,98	4,7
100	0,49	1,65	3,60	6,53	6,1
200	0,53	1,60	5,09	8,44	8,4
400	0,574	1,51	5,966	10,09	10,0
800	0,643	1,36	6,85	12,03	10,3
1200	0,643	1,36	7,5	12,57	11,02
1600	0,643	1,36	7,5	12,57	11,09 (турб. режим)

3. Интенсификация тепло- и массообмена в пленке на стенках аппаратов с регулярной шероховатостью

Уравнение для массообмена в волновой пленке, текущей по стенкам аппарата с регулярной шероховатостью такое же, как и для массообмена в волновую пленку при гравитационном течении, Опуская процедуру решения уравнения (3), приведем окончательные результаты [1, 10, 11].

Однофазная задача

$$\beta_S = \sqrt{\frac{D \cdot U_0}{S}} \cdot [1 + 0,6 \cdot (\alpha \cdot n \cdot h_0)^2] \cdot \phi(\alpha) \tag{18}$$

где: S – расстояние между выступами шероховатости, $n = 2 \cdot \pi/\lambda$ – волновое число, h_0 – средняя толщина пленки жидкости,

$\phi(\alpha) = 1,22 - 0,23\alpha$ при $\alpha \le 0,4$, $\phi(\alpha) = 1,1$ при $\alpha \ge 0,4$

$\alpha = \kappa/(\kappa + 2h_0)$, κ – высота выступа. В условиях синфазности $S = \lambda$.

$$\beta_S = \sqrt{\frac{D \cdot U_0}{\lambda}}[1 + 0,6 \cdot (\alpha \cdot n \cdot h_0)^2] \cdot \phi(\alpha) = \sqrt{\frac{D \cdot f}{z}} \cdot [1 + 0,6 \cdot (\alpha \cdot n \cdot h_0)^2] \cdot \phi(\alpha)$$

Двухфазная задача [1, 11]. При решении двухфазной задачи применялось условие, учитывающее касательное напряжения τ на границе раздела пленка жидкости газ.

$$\beta_ж = \sqrt{D \cdot u_0 / s} \cdot [1 + 0,6 \cdot (\alpha \cdot n \cdot h_0)^2] \cdot f(T) \qquad (19)$$

где $f(T) = 1,1 + 0,113 \cdot T$ при $T \le 4$,

$$f(T) = 10,04 \cdot \sqrt{T} / (1 + 5,97 \cdot \sqrt{T}) \text{ при } T > 4, \quad T = \tau_0 \cdot h_0 / \mu \cdot u_0 \qquad (20)$$

В условиях синфазности $\lambda = s$.

$$\beta_ж = \sqrt{D \cdot u_0 / \lambda} \cdot [1 + 0,6 \cdot (\alpha \cdot n \cdot h_0)^2] \cdot f(T) = \sqrt{D \cdot f / z} \cdot [1 + 0,6 \cdot (\alpha \cdot n \cdot h_0)^2] \cdot f(T)$$

Отметим на формальное совпадение вида зависимости коэффициентов массоотдачи для гравитационной пленки (формула (17)) и для пленок, стекающих по стенкам с регулярной шероховатостью.

4. Совместный тепломассообмен (пленка, струя, капля)

Система уравнений (1)–(4) с учетом ряда упрощений решена с граничными условиями

на входе: $T = T_0(\vec{r});$ $\quad c = c_0(\vec{r})$ (21)

вдали от поверхности раздела: $T = T_w(\vec{r});$ $\quad \partial c/\partial n = 0$ (22)

на поверхности раздела: $c = dT + b;$ $\quad \partial c/\partial n = (K/\Delta H \cdot D)(\partial T/\partial n)$ (23)

В результате получено обобщенное соотношение[1], которое имеет вид

$\beta_{iтм} = \beta_i \cdot f_1$, $\quad \alpha_{iтм} = \alpha_1 f_2$

$$f_1 = 1(1 - \text{Ka} / \sqrt{\text{Lu}}); \quad f_2 = 1(1 - \sqrt{\text{Lu}} / \text{Ka}) \qquad (24)$$

$\text{Lu} = a / D$ – число Льюиса; $\text{Ka} = \Delta H \cdot d / \rho \cdot c_p$ – число Кутателадзе,

$\beta_{iтм}$, ($\alpha_{iтм}$), β_i, (α_1) – коэффициенты массоотдачи (теплоотдачи) при совместном протекании процесс и в отдельности соответственно. Вид зависимости указывает на то, что нет необходимости каждый раз проводить решение системы (1) – (4) с граничными условиями (21) – (23) для случая совместного тепломассообмена. Достаточно найти решение только для массообмена (формулы, например, (17) либо

(19), (20)) и полученное выражение умножить на множитель f_1. Точно таким же образом можно получить расчетную для коэффициента совместного тепломассообмена $\alpha_{iтм}$, рассчитав однофазный теплообмен α_1 и затем полученную формулу умножить на множитель f_2 (24).

Например, при пленочной неизотермической абсорбции при волнообразовании формулы имеют следующий вид

$$\mathrm{Nu} = 1,673 \cdot \alpha^{0,7} \cdot (1 + (\alpha \cdot n)^2 \sqrt{\frac{D \cdot f}{z}} \cdot \left(\frac{h_0}{D}\right) \Big/ (1 - \mathrm{Ka} / \sqrt{\mathrm{Lu}}) \tag{25}$$

$$\mathrm{Nu} = 1,673 \cdot \alpha^{0,7} (1 + (\alpha \cdot n)^2 \cdot \mathrm{Re}^{1/2} \cdot \mathrm{Pr}^{1/2} \cdot \left(\frac{h_0}{\lambda}\right)^{1/2} \Big/ (1 - \mathrm{Ka} / \sqrt{\mathrm{Lu}}) \tag{26}$$

Эти формулы, как легко заметить, можно получить, умножив формулу (17) на множитель f_1, придав полученным выражениям критериальный вид.

Отметим, что соотношения вида (24) получены для различных элементарных стадий переноса (пленка, струя, капля) в различных гидродинамических условиях [1].

Расчет по этим формулам удовлетворительно согласуется с опытными данными работы [12, 13]. Данные закономерности обобщают работы, проводимой под руководством академика В. Е. Накорякова [12, 13].

5. Массообмен при массовом барботаже

Как показано ранее, массообмен при течении пленки на различных контактных устройствах и режимах (в пленках, стекающих по гладкой поверхности и по стенкам с регулярной шероховатостью) формально описывается формулами по структуре совпадающими. Такое же сходство наблюдается при расчете совместного тепломассообмена при организации различных режимов гидродинамических течений, а именно, пленочных, струйных и течений в системе капель.

Аналогичное явление прослеживается и при исследовании массообмена при массовом барботаже [14]. В этой работе проведено теоретическое исследование массообмена при массовом барботаже. В нем следует различать три основные элементарные акта диффузии (массообмен между газом и каплей жидкости, массообмен между пузырьком газа и жидкостью, массообмен между струей газа и жидкостью). В работе [14] рассмотрена теория этих элементарных актов барботажных процессов и возможность перенесения полученных результатов на процессы массообмена, протекающие при массовом барботаже. В основу исследования положены результаты решения системы уравнений для капли и пузыря, т.е. уравнений типа (3) в сферической системе координат. Решения получены при условиях сопряжения потоков движения и вещества на границе раздела капля-пузырь.

Анализ решений уравнений переноса и их согласованность с результатами экспериментальных исследований позволил получить выражения для коэффициентов массоотдачи в жидкой фазе

$$\beta_x = 6,24 \cdot 10^5 \cdot D_x^{1/2} \cdot \left(\frac{L}{1-\varepsilon}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{\mu_г}{\mu_г + \mu_ж}\right)^{1/2} \cdot \frac{\Delta P_n}{\gamma_ж} \tag{27}$$

и в газовой фазе

$$\beta_y = 3,74 \cdot 10^7 \cdot D_y^{1/2} \cdot \left(\frac{W}{\varepsilon}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{\mu_г}{\mu_г + \mu_ж}\right)^{1/2} \cdot \frac{\Delta P_п}{\gamma_ж} \cdot Fc \qquad (28)$$

где: β_x и β_y – коэффициенты массоотдачи для жидкой и газовой (паровой) фаз (м/час); D_x и D_y – коэффициенты молекулярной диффузии для жидкой и газовой фаз (м^2/час); $\frac{W_x}{1-\varepsilon}$ и $\frac{W_y}{\varepsilon}$ – средняя скорость жидкой и газовой (паровой) фаз барботажном слое (м/час); для жидкой фазы W_x равна плотности орошения L м^3/м^2 час, для газовой $W_y = 3600 \cdot W$, где W – скорость газа в сечении колонны (м/сек.); Fc – свободное сечение тарелки – сечение всех отверстий тарелки или прорезей в колпачках, отнесенное к сечению колонны (м^2/м^2), ε – коэффициент газонаполнения; причем

$$\varepsilon = 1 - \frac{\gamma_п}{\gamma_ж} = 1 - \frac{h_0}{h_п} = 1 - \frac{\Delta P_п}{\gamma_ж \cdot h_п} \qquad (29)$$

где: $\gamma_п$ и $h_п$ – удельный вес и высота газожидкостной смеси на тарелке, h_0 – высота светлой жидкости на тарелке.

Уравнения (28) и (29) удовлетворительно согласуются с опытными данными, полученными при проведении эксперимента в широких интервалах изменения параметров физико-химических свойств систем, нагрузок по фазам и на различных контактных устройствах (провальных, трубчатых, пластинчатых, ситчатых и др.). Свободное сечение тарелки Fc в опытах изменялось от 0,07 до 0,42 м^2/м^2, эквивалентный диаметр отверстий и щелей – от 2 до 18 мм, диаметр тарелок – от 30 до 400 мм. Такое согласие имело место как в процессах абсорбции, так и ректификации и достигалось оно благодаря тому, что на всех этих контактных устройствах был организован один и тот же пенный режим.

6. Гидродинамика и тепломассообмен с учетом входного участка

Ламинарный режим. Входной участок существенно влияет на интенсивность тепломассообмена. На входном участке происходит перестройка течения и массообмена. На нем энергия диссипативных членов расходуется на формирование профилей скорости и концентрации. Поскольку длина этого участок по сравнению с длиной контактного устройства незначительна, его использование в расчетах в качестве характерного размера приводит к правильной оценки эффективности тепломассообмена. К тому же следует отметить, что входной участок проявляется при течениях в контактных элементах различной формы.

Система уравнений сохранения (1)–(4) и граничные условия применительно к пленочному течению имеет вид

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \upsilon \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = g \cdot \sin\alpha_1 - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (30)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}=0$$

$$u\cdot\frac{\partial c}{\partial x}+\upsilon\cdot\frac{\partial c}{\partial y}=D\cdot\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \qquad (31)$$

$$x=0 \qquad c=0$$

$$y=0\,,\quad u=\upsilon=0\,,\quad c=0\,;\ \text{(либо поток равен нулю)} \qquad (32)$$

$$y=\delta(x) \qquad \partial u/\partial y=0\,,\quad c=c_1 \qquad (33)$$

Уравнений (30) и (31) и граничных условий (32) и (33) приводились к безразмерному виду с помощью следующих соотношений

$$u=u_0\cdot\overline{u}\,,\ x=\delta_p\cdot\mathrm{Re}\cdot\overline{x}\,,\ y=\delta_p\cdot\overline{y}\,,\ c=c_1\cdot\overline{c}\,,\ \mathrm{Re}=(u_0\cdot\delta_p)/\nu\,;\ \mathrm{Pr}=\nu/D\,;$$

$$Pe=u_0\cdot\delta_p/D$$

где: u_0 – средняя скорость жидкости; δ_1 – толщина пленки жидкости по Нуссельту.

Система уравнений решалась комплексно. В алгоритме решения были использованы одновременно три метода: метод коллокаций, метод прямых и метод Галеркина. Он получил название метод равных поверхностей [1, 15].Метод позволяет определить локальные поля скоростей и концентраций, а также и изменения поверхности самой пленки. Опуская процедуру численного решения подобных нелинейных задач переноса, которая подробно изложена в [1], приведем результаты аппроксимация численных решений системы уравнений (30), (31) с граничными условиями (32), (33).

Длина входного участка

$$l_{\text{вх}}=\exp(2{,}3\cdot H_1/(20-28\cdot H_1))\cdot\delta_p\cdot\mathrm{Re} \quad \text{при } \xi=0{,}02 \qquad (34)$$

$$l_{\text{вх}}=2\cdot\exp(-2{,}3\cdot H_1/(28\cdot H_1-20))\cdot\delta_p\cdot\mathrm{Re} \quad \text{при } \xi=0{,}0002 \qquad (35)$$

Параметр ξ характеризует отношение рассчитанного профиля и толщины пленки жидкости к профилю и толщины по Нуссельта.

Коэффициент массоотдачи

$$\beta_{\text{ср}}=\beta_{2b}=1{,}25\cdot\frac{u_0^{0,5}\cdot D^{0,5}}{b^{0,5}}\sqrt{1+0{,}65\cdot\frac{b_1\cdot\delta_p\cdot Pe}{b}} \qquad (36)$$

$b_1=10^{-2}$, Pe = Re·Pr, u_0 – средняя скорость, δ_P – пленка по Нуссельту

b – характерный размер: $b=l_{вх}$ (37)

При расчете массоотдачи в волновую пленку необходимо учитывать вклад входного участка. Это можно достичь введением коэффициентов, учитывающих долю своего вклада в массообмен. Тогда коэффициент массоотдачи в волновую пленку с учетом входного участка примет вид

$$\beta_{\text{общ}}=\rho_1\cdot\beta_{2b}+\rho_2\cdot\beta_\lambda\,,\qquad \rho_1=\rho_2=0{,}5 \qquad (38)$$

где формулы для коэффициента массоотдачи при волнообразовании представлены формулами (17)

$$\beta_\lambda = 1,673\cdot\alpha^{0.7}\cdot\sqrt{\frac{D\cdot u_0}{\lambda}} \text{ или } \beta_\lambda = 1,673\cdot\alpha^{0.7}\cdot\sqrt{\frac{D\cdot f}{z}}$$

Соотношение (38) не только расширяет область применения полученных коэффициентов массоотдачи, но, что очень важно, учитывает длину контактного устройства, что наблюдается в эксперименте.

Турбулентный режим. Метод поверхностей равных расходов, рассмотренный ранее, позволяет проводить расчета тепломассообмена в турбулентных режимах. В этом случае система уравнений (1), (4) трансформируется к средним величинам, а вместо молекулярных коэффициентов переноса используются сумма, состоящая из молекулярных коэффициентов и турбулентных.

При расчете массоотдачи в турбулентном режиме необходимо задать закон затухания коэффициентов переноса при приближении к стенке. В статье он задавался в виде

$$\nu_{эф}/\nu = 1 + (\nu_T/\nu) = 1 + TБ(\eta_0 - \eta_0^2)$$
$$D_{эф}/D = 1 + (D_T/D) = 1 + TD(\eta_0 - \eta_0{}^2) \tag{39}$$

где: $TБ = a\cdot\delta_p{}^2/\nu$; $TD = TБ\cdot\Pr$; $\eta_0 = y/\delta_p$. Для расчета параметра a использовалась функциональная зависимость в виде

$$a = a_0\cdot(\rho/\sigma)\cdot\left(h_0^3\cdot\varepsilon^3/g\cdot\nu\right)^{1/2} \tag{40}$$

где: $a_0^{1/2} = 0,055$, $\varepsilon = g\cdot u_0$,– энергия диссипации при гравитационном течении пленки.

Процедура расчета турбулентного массообмена изложена в [1]. Применяя эту процедуру и проведя аппроксимацию численных результатов расчета турбулентного массообмена, приведем основные его характеристики.

Величина входного участка была получена при различных значениях величины ξ

$$b = l_{вх} = m\cdot k_2\cdot\delta_p\cdot\mathrm{Re}_L = 3,6\cdot 1\cdot m\cdot\delta_p{}^2\cdot u_0/\nu$$

при $\xi = 0,02$; $m = 0,3$, при $\xi = 0,0002$ $m = 1$, $k_2 = 3,61$ (41)

За величину δ_p принимали значение, равное предельной толщине пленки, соответствующей переходу к турбулентному режиму, т.е. $\delta_p = 5,3\cdot 10^{-4}$ м при. $\mathrm{Re}_L = 4\cdot q/\nu = 1500$.

Формула, полученная при аппроксимации численных решений, с учетом входного участка имеет вид

$$\beta_1/D^{1/2} = \left[1,37 + 2,28\cdot a_0^{1/2}\cdot\delta_p\cdot\left(\frac{\rho\cdot g\cdot\nu}{\sigma}\right)^{1/2}\cdot\left(\frac{u_0\cdot h_0}{\nu}\right)^{3/4}\right]\cdot\frac{u_0^{1/2}}{b^{1/2}} \tag{42}$$

где: $a_0^{1/2} = 0,055$, а $b = l_{вх}$ – дано формулой (41).

Подставим из (41) $b = l_{вх}$ при $\xi = 0,0002$ в уравнение (42) получим

$$\beta_2/D^{1/2} = A\cdot\frac{\nu^{1/2}}{\delta_p} + B\cdot\left(\frac{\rho\cdot g\cdot\nu}{\sigma}\right)^{1/2}\cdot\mathrm{Re}_L^{3/4} \tag{43}$$

$$A = 1{,}32,\quad B = 2{,}85\cdot10^{-2},\quad \delta_p = 5{,}3\cdot10^{-4}\ \text{м}\quad \text{при}\quad \mathrm{Re}_L = 4\cdot q/\nu$$

При бесконечном удалении от оросителя концентрация распределяемого компонента становится зависимой только от поперечной координаты и не зависимой от продольной. В этом случае система уравнений сохранения количества движений и вещества упрощаются.

Формула для этого случая имеет вид

$$\beta_3 / D^{1/2} = A_1 \cdot \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{1/2} (g\cdot\nu)^{1/2} \left(\frac{u_0\cdot h_0}{\nu}\right)^{3/4}$$

$$\beta_3 / D^{1/2} = 3{,}1\cdot10^{-2}\cdot\left(\frac{\rho\cdot g\cdot\nu}{\sigma}\right)^{1/2}\cdot\left(\mathrm{Re}_L\right)^{3/4} \tag{44}$$

где $A_1 = 0{,}63\cdot a_{01}^{1/2}$, $a_{01}^{1/2} = 2{,}5a_0^{1/2}$, $a_0^{1/2} = 0{,}055$, $A_1 = 0{,}63a_{01}^{1/2} = 8{,}66\cdot10^{-2}$, $\mathrm{Re} = 4\cdot q/\nu$.

Турбулентную пленку h_0 определяли по известной формуле [1]

$$h_0 = \left(1/400^{1/5}\right)\cdot\left(3\cdot\nu^2/g\right)^{1/3}\left(q/\nu\right)^{8/15}$$

Расчеты коэффициентов массоотдачи в турбулентную пленку следует проводить для двух случаев с учетом длины канала (трубки)

1) При $l_{вх} < l$

$$\beta_{ср} = \beta_2\frac{l_{\text{вх}}}{l} + \beta_3\frac{l - l_{\text{вх}}}{l} \tag{45}$$

2) При $l_{вх} > l$, то $l_{вх} = l$ (46)

расчет проводится по формуле (43).

Эти два положения очевидны. Если входной участок занимает всю длину трубки (l), то характерным линейным размером станет $l_{вх}$ т.е. $l_{вх} = l$. Второе положение означает, что в том случае, когда входной участок занимает только часть трубки l и, следовательно, $l_{вх} < l$, то существует длина трубки, в которой массообмен определяется формулой для начального участка (формула для β_2 (43)), а за пределом этой длины массообмен будет определяться формулой (44) для стабилизированного участка трубы (канала). Тогда суммарный коэффициент массоотдачи для этого случая будет определяться формулой (45).

Зависимостями (45), (46) обобщены практически все известные экспериментальные данные, приведенные в [16] для массоотдачи в турбулентную пленку жидкости, стекающую под действием силы тяжести.

7. Математическое моделирование динамики многофазной среды

При математическом моделировании динамики многофазных сред наиболее известны три подхода: кинетический, континуальный и траекторный. Кинетический подход требует громоздкий вычислений. По этой причине этот подход не получил широкого применения в расчетах. Континуальный подход известен как методы многоскоростного континуума и связан с работами Р. И. Нигматулина [17]. Следует отметить, что метод поверхностей равных расходов, изложенный выше, оказался наиболее эффективным при решении уравнений Р. И. Нигматулина [17] применительно к различным задачам гидродинамики [18–21].

За последнее время при математическое моделирование динамики многофазной среды интерес проявляется к траекторному методу [22–24].

В настоящем сообщении излагается метод расчета динамики дисперсной среды. Выводы уравнений и их решения для некоторых областей течений приведены в работах [22–23].

Покроем область G ортогональными ячейками, размерами равными пространственными расчетными шагами, используемыми при численном решении системы уравнений (1)–(4). И будем решать эту систему в координатах Эйлера. С другой стороны частица в этой ячейке будет совершать движения в неоднородной многофазной среде по закону Ньютона в системе координат Лагранжа, например, согласно уравнению вида

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{V_2}}{\mathrm{d}t} = -k \cdot w^2 \cdot \mathbf{e} + \mathbf{F} \tag{47}$$

где: $\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_{отн}$ – вектор скорости дисперсной частицы, $k = 0{,}75 \cdot C \cdot \rho_1 / (\rho_2 \cdot d)$, $\mathbf{e} = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}) = \cos\alpha \cdot \mathbf{i} + \sin\alpha \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}$ – единичный вектор направления вектора относительной скорости частицы $\mathbf{V}_{от}$, c – коэффициент сопротивления, ρ_1, ρ_2 – плотности несущей среды (сплошной) и дисперсной фазы, d – диаметр дисперсной фазы. Задача рассматривается в двумерной постановке, поэтому $\mathbf{e}_3 = 0$. В работах [22, 23] показано, как векторное уравнение движения частицы, записанное в Лагранжевой системе координат, преобразуется к системе двух скалярных уравнений для определения модуля относительной скорости частицы и ее направления. Эти уравнения имеют следующий вид

$$\frac{dw}{dt} = -k \cdot w^2 - \left(P_1 + E_1 - F_1\right) \cdot \cos\alpha - \left(P_2 + E_2 - F_2\right) \cdot \sin\alpha \tag{48}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \left(P_1 + E_1 - F_1\right) \cdot \frac{\sin\alpha}{w} - \left(P_2 + E_2 - F_2\right) \cdot \frac{\cos\alpha}{w} \tag{49}$$

где: $w = \left|\mathbf{V}_{отн}\right|$, $\mathbf{V}_{отн} = (w \cdot \cos\alpha,\ w \cdot \sin\alpha) = w \cdot \mathbf{e}$.

Функции P_i, E_i, F_i, $i = 1, 2$ связаны с распределением скоростей сплошной среды. Например, для P_i, $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{U}{H_1} \cdot \frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{V}{H_2} \cdot \frac{\partial U}{\partial x_2} + \frac{U \cdot V}{H_1 \cdot H_2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{V^2}{H_1 \cdot H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \\ P_2 &= \frac{U}{H_1} \cdot \frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{V}{H_2} \cdot \frac{\partial V}{\partial x_2} + \frac{U \cdot V}{H_1 \cdot H_2} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \frac{U^2}{H_1 \cdot H_2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \end{aligned} \tag{50}$$

В системе уравнений (48), (49) U, V – проекции скорости сплошной среды на ортогональную систему координат. H_i $i = 1, 2$ – коэффициенты Ламе.

Применение данного метода для моделирования многофазной среды продемонстрировано на различных контактных элементах в работах [22, 23]. Метод простой, чувствителен к динамике дисперсной фазы. Этот метод можно применять, используя известные аналитические решения, а именно, по распределению скоростей, полученных в известных решениях для однофазной среды, определяются функции P_i, E_i, F_i, $i = 1, 2$. С учетом этих функций решается система уравнений (48), (49). Решение этой системы будет уже описывать динамику многофазной среды. Физически такой подход означает, что в сплошную среду, описываемую системами (1) – (4), добавляется частица (капля, пузырь), описываемая векторным уравнением (47). А совместное решение этих систем будет описывать динамику неоднородной многофазной среды.

8. Синергетика динамических систем

В предыдущих пунктах были отмечены элементы синергетического подхода. Они проявлялись при пленочных режимах в условиях синфазности (уравнения различных процессов описывались однотипными формулами), в процессах ректификации и абсорбции на различных контактных устройства при создании однотипного режима проведения процессов (например, в пенном режиме). Конечно, синергетический подход к описанию динамических систем является более сложной процедурой. Он базируется на пяти не: нелинейности, не единственности, не стационарности, не устойчивости и необратимости.

В ряде случаев интенсивные тепломассообменные процессы в химико-технологических и теплообменных устройствах сопровождаются развитием неустойчивых режимов. Предотвратить развитие неустойчивости в большинстве случаев невозможно, а в некоторых случаях и нецелесообразно, так как возникающие неустойчивости интенсифицируют тепломассообменные процессы. Развитие неустойчивости приводит к появлению самоупорядоченных монохроматических, маломодовых хаотических и многомодовых турбулентных режимов [25 – 29].

В статье изложен наиболее общий подход к решению данной проблеме. Известно, что большой класс неустойчивых теплофизических, физико-химических, химически реагирующих, электрохимических, физических, биологических и гидродинамических нелинейных процессов описывается известными системами нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных [25]

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{N}(\phi) + \sum_{i=1}^{2} \mathbf{Q}_i(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \sum_{ij=1}^{2} \mathbf{M}_{ij}(\phi) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \tag{51}$$

где: $\phi = \left\| \phi_1 ... \phi_n \right\|^T$ – вещественный вектор, определенный в области $D = \{(t, x_1, x_2) \mid t \geq 0, \ -\infty < x_i < \infty\}$; $\mathbf{N} = \|N_1 \ldots N_n\|$; $\mathbf{Q}$, $\mathbf{M}$ – матрицы $n \times n$ $\mathbf{M}_{12} = \mathbf{M}_{21}$.

Действительно, из системы уравнений (51), например, следует, что первые два члена слева описывают химические процессы, а вместе с четвертым членом описывают диффузионные процессы, осложненные химическими превращениями. А вся система уравнений (51) описывает гидродинамические течения. Можно привести примеры других процессов и явлений, которые описываются системой уравнений (51).

Известно, что в закритической области в системе (51) возбуждаются и растут нелинейные возмущения, принадлежащие непрерывной полосе спектра волновых чисел.

Редукция системы уравнений (51) к уравнению для амплитуды нелинейного возмущения проводится комплексно: с использованием волновых пакетов, методов многих масштабов, модификацией метода Мандельштама, согласно которому m гармонических волн с различными волновыми числами и частотами преобразуются к виду квазимонохроматических волн с нелинейными амплитудой и фазой, зависящими от медленных переменных. Наконец, используется преобразование, учитывающее групповую скорость огибающей волны, что характерно для реальной нелинейной диспергирующей среды. В результате такого преобразования получается общее нелинейное параболическое уравнение для амплитуды (ОНПУ). Оно имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial A}{\partial \tau}+i\cdot\left(\alpha_{31}\frac{\partial A}{\partial \eta_{10}}+\alpha_{32}\frac{\partial A}{\partial \eta_{20}}\right)+\left(\operatorname{sgn}\frac{\partial^2\omega_i}{\partial k_1^2}-i\cdot\alpha_{11}\right)\frac{\partial^2 A}{\partial \eta_{10}^2}+\\ \left(\operatorname{sgn}\frac{\partial^2\omega_i}{\partial k_2^2}-i\cdot\alpha_{12}\right)\frac{\partial^2 A}{\partial \eta_{20}^2}+\left(\alpha_r-i\cdot\alpha_i\right)\frac{\partial^2 A}{\partial \eta_{10}\partial \eta_{20}}=A-\left(1+i\cdot\alpha_2\right)\left|A\right|^2 A\end{gathered} \qquad (52)$$

Безразмерные комплексы в уравнение (52), являющимися критериями динамических нелинейных систем, имеют простой физический смысл. Приведем некоторые безразмерные комплексы этого уравнения и их физический смысл

$$\alpha_{11}=\frac{\partial^2\omega_r/\partial k_1^2}{\partial^2\omega_i/\partial k_1^2};\quad \alpha_{31}=\frac{\partial\omega_r}{\partial k_1}\sqrt{2\Bigg/\left(\omega_i\left|\frac{\partial^2\omega_i}{\partial k_1^2}\right|\right)};\qquad \alpha_2=\frac{\beta_2}{\beta_1} \qquad (53)$$

где: α_{11} – характеризует отношение дисперсии фазовой скорости к дисперсии инкремента, α_{31} – характеризует групповую скорость волнового пакета, α_2 – характеризует нелинейную зависимость фазы (распределенные системы) либо частоты (нераспределенные системы) от амплитуды, т.е. нелинейную дисперсию.

На основе численного анализа решения уравнения (52) установлены следующие закономерности возникновения самоорганизации и турбулентности (хаоса) и перехода между ними в гидродинамических, теплофизических, физических, химически реагирующих и биологических системах [25, 27, 28]:

I. Линейная зависимость фазы для распределенных системах или частоты для нераспределенных систем от амплитуды возмущения является необходимым условием самоорганизации. Возможны и вырожденные случаи этой линейной зависимости: равенство нулю углового коэффициента или свободного члена либо того и другого одновременно.

   Увеличение дисперсии способствует возникновению самоорганизации

II. Основным условием возникновения турбулентности (хаоса) является нелинейная зависимость фазы для распределенных системах, или частоты для нераспределенных систем от амплитуды возмущения.

III. В хаотических, неупорядоченных системах самоорганизация, когерентные структуры, порядок возникает в результате нелинейного взаимодействия возмущений и наоборот.

IV. Переход от одного вида нелинейного взаимодействия к другому, а также возникновение структуры или явления сопровождаются изменением распределения энергии по спектру, т.е. сужением (самоорганизация) либо расширением (турбулентности) энергии по спектру. Возможно промежуточное состояние.

Указанные закономерности нашли применение при рассмотрении ряда теоретических вопросов, связанных с процессами кристаллизации, биогидродинамикой животных, с волоконной оптики [30, 31]. Они могут быть использованы для управления явлениями самоорганизацией и турбулентностью (хаосом).

Литература

[1] Холпанов Л. П., Шкадов В. Я.: *Гидродинамика и тепломассообмен с поверхностью раздела*. М. Наука, 1990, 271.

[2] Шкадов В. Я.: *Волновые течения тонкого слоя жидкости под действием силы тяжести*, Изв. АН СССР. Мех. жидк. и газа, № 1, 1967, 43.

[3] Шкадов В. Я., Холпанов Л. П., Малюсов В. А., Жаворонков Н. М.: *К нелинейной теории волновых течений пленки жидкости*, Теор. основы хим. технол., №6, Т. 4, 1970, 859.

[4] Холпанов Л. П., Шкадов В. Я., Малюсов В. А., Жаворонков Н. М.: *О расчете волновых характеристик стекающей пленки жидкости*, Теор. основы хим. технол., №4, Т. 5, 1971, 559.

[5] Javdani K., Goren S. L.: *Finite-amplitude wavy flow of thin film*, Progr. Heat and Mass Transfer, V. 6, 1972, 253-262.

[6] Капица П. Л.: *Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости*, Журн. эксперим. теор. физики, № 1, Т. 18, 1948, 3-19; № 2, Т. 19, 1949, 105-119.

[7] Холпанов Л. П., Шкадов В. Я., Малюсов В. А, Жаворонков Н. М.: *О массообмене в пленке жидкости при волнообразовании*, №1, Т. 1, 1967, 73-79.

[8] Дытнерский Ю. И., Борисов Г. С.: *Исследования тепломассообмена в жидкой фазе. Процессы химической технологии. Гидродинамика, тепло- и массопередача*, М.: Наука, 1965, 266-284.

[9] Кулов Н. Н., Максимов В. В., Малюсов В. А., Жаворонков Н. М.: *Массоотдача в стекающих пленах жидкости*, Теор. основы хим. технол., № 3, Т. 17, 1983, 406.

[10] Холпанов Л. П., Николаев Н. А., Харин В. Ф., Малюсов В. А., Жаворонков Н. М.: *Расчет коэффициентов массоотдачи в пленке жидкости, текущей по стенке с регулярной шероховатостью*, Теор. основы хим. технол., № 4, Т. 9, 1975, 590.

[11] Холпанов Л. П., Ратнов В. Г., Малюсов В. А., Жаворонков М.: *Расчет коэффициентов массоотдачи в пленке жидкости, текущей по стенке с регулярной шероховатостью*, Журн. прикл. химии., № 7, Т. 53, 1980, 1557.

[12] Григорьева Н. И., Накоряков В. Е.: *Точное решение задачи о совместном тепломассопереносе при пленочной абсорбции*, Инж-физ. журн., № 5, Т. 50, 1977, 893.

[13] Кутателадзе С. С., Накоряков В. Е.: Тепломассообмен и волны в газожидкостных системах, Новосибирск, Наука, 1984, 301.

[14] Касаткин А. Г., Дытнерский Ю. И., Холпанов Л. П.: Обобщенное уравнение массоотдачи при барботаже, ЖПХ, № 1, Т. 39, 1966, 92-100.

[15] Холпанов Л. П., Шкадов В. Я., Малюсов В. А., Жаворонков Н. М.: *Исследование гидродинамики и массообмена в пленки жидкости су четом входного участка*, Теор. основы хим. технол., № 5, Т.10, 1976, 659.

[16] Bin A. K. *Mass transfer into a turbulent liquid film*, Int. J Heat transfer, № 7, Vol. 26, 1983, 981.

[17] Нигматулин Р. И.: *Динамика многофазных сред*, М.: Наука, Т. 1, 1987, 463, Т. 2, 358.

[18] Холпанов Л. П.: *Математическое моделирование нелинейных процессов*, Теор. основы хим. технол., № 5, Т. 33, 1999, 466-484.

[19] Kholpanov L. P., Ibyatov R. I.: *Calculation the multiphase heterogeneous medium hydrodynamics in a centrifugal field*, Heat Transfer Research, № 4, Vol. 37, 2006, 307-320.

[20] Холпанов Л. П, Ибятов Р. И., Ахмадиев Ф. Г.: *Течение многофазной среды по проницаемой поверхности с образованием осадка*, ИФЖ, № 2, Т. 78, 2005, 65-72.

[21] Ибятов Р. И., Холпанов Л. П., Ахмадиев Ф .Г., Бекбулатов И. Г.: *Математическое моделирование течения многофазной гетерогенной среды по проницаемой трубе*, ТОХТ, № 5, Т. 39, 2005, 533-541.

[22] Холпанов Л. П., Ибятов Р. И.: *Математическое моделирование динамики дисперсной фазы*, ТОХТ, № 2, Т. 39, 2005, 206-215.

[23] Kholpanov L. P., Ismailov B. R., Vlasek P.: *Modelling of multiphase flow containing bubbles, drops end solid particles*, Engineering Mechanics, № 6, vol. 12, 2005, 1-11.

[24] Волков К. Н.: *Разностные схемы интегрирования уравнений движения пробной частицы в потоке жидкости или газа*, Вычислительные методы и программирования, Т. 5, 2004, 1-17.

[25] Холпанов Л. П.: *Самоорганизация и динамический хаос в химико-технологических и теплофизических устройствах*, Инж.-физ. журн., № 4, Т. 74, 2001, 5-13.

[26] Елюхин В. А., Холпанов Л. П., Малюсов В. А.: *Возникновение многомодовой турбулентности в гидродинамической и химически реагирующих системах*, Докл. АН СССР, № 5, Т. 278, 1984, 1188-1191.

[27] Холпанов Л. П.: *Физико-химические и гидродинамические основы нелинейных процессов химии и химической технологии*, Изв. Академии Наук, Серия химическая, № 5, 1996, 1065-1090.

[28] Холпанов Л. П.: *Самоорганизация и динамический хаос*, Теор. основы хим. технологии, № 4, Т. 32, 1998, 355-368.

[29] Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.: *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, М.: Наука, 1987, 477.

[30] Холпанов Л. П.: *Нелинейные проблемы волоконной оптики. Проблемы химии и химической технологии и их связь с нелинейными проблемами волоконной оптики*, Волоконно-оптические технологии, материалы и устройства. Сб. трудов научного центра волоконно-оптических материалов. Изд-во Н. Бочкаревой, Калуга, № 1, 1998, 76-105.

[31] Холпанов Л. П.: *К вопросу о блочной коллоидно-химической кристаллизации*, Волоконно-оптические технологии, материалы и устройства, Сб. трудов научного центра волоконно-оптических материалов. Изд-во Н. Бочкаревой, Калуга, № 3, 1998, 71-82.