CZASOPISMO TECHNICZNE E
WYDAWNICTWO POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

z. 1-E/2008
ISSN 0011-4561
ISSN 1897-6301

TADEUSZ PIWOWARCZYK*

MOC CHWILOWA W STANIE NIEUSTALONYM

REPREZENTACJA W DZIEDZINIE SKOŃCZONYCH CIĄGÓW LICZBOWYCH

TIME POWER IN TRANSIENT STATES

REPRESENTATION IN THE DOMAIN OF FINITE NUMERICAL SEQUENCES

S t r e s z c z e n i e

Formułowanie kryteriów wybranych właściwości liniowych obwodów elektrycznych w stanach nieustalonych w większości przypadków nie wymaga funkcji czasowych rozwiązań. Wystarczy poddać analizie odpowiednią transformatę Laplace'a, która, jak wiadomo, jest łatwa do wyznaczenia. Jest to oczywiste w przypadku prądu $I(s)$ oraz napięcia $U(s)$. Analiza mocy chwilowej może być traktowana w sposób analogiczny pod warunkiem, że znamy jej transformatę Laplace'a. W artykule pokazano, jak wyznaczyć transformatę Laplace'a $P(s)$ mocy chwilowej $p(t)$, jeżeli znane są transformaty Laplace'a prądu $I(s)$ oraz napięcia $U(s)$.

Słowa kluczowe: *stan nieustalony, przekształcenie Laplace'a, funkcja wymierna, czasowa funkcja mocy*

A b s t r a c t

In most cases the formulation of the criteria for some chosen properties of linear electrical circuits in transient states does not require the time function solutions. It is sufficient to analyze the appropriate Laplace transform which is known to be easy to obtain. It is obvious in case of the current $I(s)$ and the voltage $V(s)$. The analysis of time power can be treated in an analogous way providing we know its Laplace transform. The article shows how to find the Laplace transform $P(s)$ of the time power $p(t)$ if we know the Laplace transforms of the current $I(s)$ and the voltage $U(s)$.

Keywords: *transient state, Laplace transform, rational function, time function power*

* Dr inż. Tadeusz Piwowarczyk, Instytut Elektrotechniki Teoretycznej i Automatyki, Wydział Inżynierii Elektrycznej i Komputerowej, Politechnika Krakowska.

1. Założenia wstępne

Przedmiotem analizy jest liniowy obwód elektryczny RLC o stałych skupionych. Zakładamy, że obwód jest bezźródłowy. Elementy konserwatywne LC zawierają początkowe energie. W czasie $t = 0$ obwód rozpoczyna stan nieustalony.

2. Operatorowe rozwiązanie obwodu

W każdej gałęzi obwodu można wyznaczyć prąd operatorowy. Również na każdym dwuzaciskowym elemencie obwodu można wyznaczyć (stosując proste algebraiczne przekształcenia) operatorowe napięcie $U(s)$

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{b_{n-1} \cdot s^{n-1} + b_{n-2} \cdot s^{n-2} + \ldots + b_1 \cdot s + b_0}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot s + a_0} \\ U(s) &= \frac{c_{m-1} \cdot s^{m-1} + c_{n-2} \cdot s^{m-2} + \ldots + c_1 \cdot s + c_0}{s^m + d_{m-1} \cdot s^{m-1} + \ldots + d_1 \cdot s + d_0} \end{aligned} \tag{1}$$

Współczynniki a_n, a_{n-1}, ..., a_0 oraz d_m, d_{m-1}, ..., d_0 w wyrażeniach (1) są wymiernymi funkcjami parametrów obwodu RLC. Współczynniki b_n, b_{n-1}, ..., b_0 oraz c_m, c_{m-1}, ..., c_0 dodatkowo zależą od warunków początkowych. Wyznaczenie zależności czasowych wymaga określenia miejsc zerowych mianowników wyrażeń podanych w (1). Ze względu na twierdzenie Abela dla stopnia piątego i wyższych wyznaczenie miejsc zerowych przez tzw. pierwiastniki jest w ogólnym przypadku niemożliwe. Fakt ten uniemożliwia formułowanie pewnych ogólnych właściwości obwodów elektrycznych. Znaczącym przezwyciężeniem tego ograniczenia jest analiza obwodów elektrycznych za pomocą tzw. skończonych ciągów liczbowych. Wynikają one z właściwości tzw. uogólnionych ciągów Fibonacciego [7].

Zakładamy, oczywiście, że funkcje wymierne (1) są uproszczone. Kryterium uproszczonej funkcji wymiernej oraz odpowiednia procedura samego jej upraszczania zostały sformułowane w [8].

3. Rozwiązanie obwodu w dziedzinie ciągów Fibonacciego

Prąd $i(t)$ oraz napięcie $u(t)$ mogą być wyrażone w postaci szeregów Maclaurina. Pewne elementy składowe tych szeregów tworzą uogólnione ciągi Fibonacciego I_0, I_1, ..., I_k, ... oraz U_0, U_1, ..., U_k, ... Ciągi te wyznaczane są za pomocą wzorów (2), (3), (4) itd. w zależności od stopnia mianownika transformat $I(s)$ oraz $U(s)$. Powstałe elementy są otrzymywane na drodze rekurencyjnej i mogą być traktowane jako pewne łańcuchy Markowa. Należy podkreślić, że wielkości I_k oraz U_k mają fizyczny wymiar $[A \cdot s^{-k}]$ oraz $[V \cdot s^{-k}]$. Wartości liczbowe I_k, U_k są kolejnymi pochodnymi funkcji $i(t)$, $u(t)$ w zerze.

$$n = 1 \qquad\qquad m = 1$$

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d_0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} & I_2 = -a_0 \cdot I_1 && U_2 = -a_0 \cdot U_1 \\ & I_3 = -a_0 \cdot I_2 && U_3 = -a_0 \cdot U_2 \\ & \dots\dots\dots\dots && \dots\dots\dots\dots \\ & I_k = -a_0 \cdot I_{k-1} && U_k = -a_0 \cdot U_{k-1} \\ & \dots\dots\dots\dots && \dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$n = 2 \qquad\qquad m = 2$$

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & 1 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & 1 & 0 & 0 \\ d_0 & d_1 & 1 & 0 \\ 0 & d_0 & d_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} & I_4 = -a_0 \cdot I_2 - a_1 \cdot I_3 && U_4 = -a_0 \cdot U_2 - a_1 \cdot U_3 \\ & I_5 = -a_0 \cdot I_3 - a_1 \cdot I_4 && U_5 = -a_0 \cdot U_3 - a_1 \cdot U_4 \\ & \dots\dots\dots\dots && \dots\dots\dots\dots \\ & I_k = -a_0 \cdot I_{k-2} - a_1 \cdot I_{k-1} && U_k = -a_0 \cdot U_{k-2} - a_1 \cdot U_{k-1} \\ & \dots\dots\dots\dots && \dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$n = 3 \qquad\qquad m = 3$$

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ d_0 & d_1 & d_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & d_0 & d_1 & d_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d_0 & d_1 & d_2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} c_2 \\ c_1 \\ c_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} & I_6 = -a_0 \cdot I_3 - a_1 \cdot I_4 - a_2 \cdot I_5 && U_6 = -d_0 \cdot U_3 - d_1 \cdot U_4 - d_2 \cdot U_5 \\ & I_7 = -a_0 \cdot I_4 - a_1 \cdot I_5 - a_2 \cdot I_6 && U_7 = -d_0 \cdot U_4 - d_1 \cdot U_5 - d_2 \cdot U_6 \\ & \dots\dots\dots\dots && \dots\dots\dots\dots \\ & I_k = -a_0 \cdot I_{k-3} - a_1 \cdot I_{k-2} - a_2 \cdot I_{k-1} && U_k = -d_0 \cdot U_{k-3} - d_1 \cdot U_{k-2} - d_2 \cdot U_{k-1} \\ & \dots\dots\dots\dots && \dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

itd.

Funkcje czasowe prądu i napięcia są przedstawione za pomocą szeregów Maclaurina

$$i(t) = I_0 + I_1 \cdot t + \frac{1}{2!} \cdot I_2 \cdot t^2 + \frac{1}{3!} \cdot I_3 \cdot t^3 + \ldots \frac{1}{k!} \cdot I_k \cdot t^k + \ldots \tag{5}$$

$$u(t) = U_0 + U_1 \cdot t + \frac{1}{2!} \cdot U_2 \cdot t^2 + \frac{1}{3!} \cdot U_3 \cdot t^3 + \ldots \frac{1}{k!} \cdot U_k \cdot t^k + \ldots \tag{6}$$

4. Moc chwilowa

Moc chwilowa na dwójniku wyraża się iloczynem prądu chwilowego oraz napięcia chwilowego

$$p(t) = i(t) \cdot u(t) \tag{7}$$

Zgodnie z teorią skończonych ciągów liczbowych elementy uogólnionego ciągu Fibonacciego opisującego moc chwilową w stanie nieustalonym wyrażają się wzorem (9).

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \cdot I_{n-k} \cdot U_k \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ . \\ P_k \\ . \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 \cdot U_0 \\ I_1 \cdot U_0 + I_0 \cdot U_1 \\ I_2 \cdot U_0 + 2 \cdot I_1 \cdot U_1 + I_0 \cdot U_2 \\ I_3 \cdot U_0 + 3 \cdot I_2 \cdot U_1 + 3 \cdot I_1 \cdot U_2 + I_0 \cdot U_3 \\ I_4 \cdot U_0 + 4 \cdot I_3 \cdot U_1 + 6 \cdot I_2 \cdot U_2 + 4 \cdot I_1 \cdot U_3 + \cdot I_0 U_4 \\ I_5 \cdot U_0 + 5 \cdot I_4 \cdot U_1 + 10 \cdot I_3 \cdot U_2 + 10 \cdot I_2 \cdot U_3 + 5 \cdot I_1 U_4 + I_0 \cdot U_5 \\ I_6 \cdot U_0 + 6 \cdot I_5 \cdot U_1 + 15 \cdot I_4 \cdot U_2 + 20 \cdot I_3 \cdot U_3 + 15 \cdot I_2 U_4 + 6 \cdot I_1 \cdot U_5 + I_0 \cdot U_6 \\ I_7 \cdot U_0 + 7 \cdot I_6 \cdot U_1 + 21 \cdot I_5 \cdot U_2 + 35 \cdot I_4 \cdot U_3 + 35 \cdot I_3 U_4 + 21 \cdot I_2 \cdot U_5 + 7 \cdot I_1 U_6 + I_0 \cdot U_7 \\ . \\ I_k \cdot U_0 + k \cdot I_{k-1} \cdot U_1 + \ldots\ldots + k \cdot I_1 \cdot U_{k-1} + I_0 \cdot U_k \\ . \end{bmatrix} \tag{9}$$

Fizyczny wymiar wielkości P_n jest $[W \cdot s^{-n}]$. Jak widać, współczynniki liczbowe we wzorze (9) są identyczne z liczbami występującymi w trójkącie Pascala.

Zatem szereg Maclaurina przedstawiający moc chwilową wyraża się wzorem

$$p(t) = P_0 + P_1 \cdot t + \frac{1}{2!} \cdot P_2 \cdot t^2 + \frac{1}{3!} \cdot P_3 \cdot t^3 + \ldots \frac{1}{k!} \cdot P_k \cdot t^k + \ldots \tag{10}$$

Rząd uogólnionego ciągu Fibonacciego mocy P_0, P_1, ..., P_k, ... jest nie większy niż iloczyn stopni $I(s)$ oraz $U(s)$, czyli $n \cdot m$. Dokładne określenie rzędu zależy od tzw. macierzy decydujących podanych w punktach (11), (12), (13).

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -P_1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -P_0 & 0 \\ 0 & 0 & -P_1 & -P_0 \\ & 0 & -P_2 & -P_1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -P_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -P_1 & -P_0 & \\ 0 & 0 & 0 & -P_2 & -P_1 & -P_0 \\ 0 & 0 & 0 & -P_3 & -P_2 & -P_1 \\ 0 & 0 & 0 & -P_4 & -P_3 & -P_2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

itd.

Rząd uogólnionego ciągu Fibonacciego o mocy P_0, P_1, ..., P_k, ... równa się największemu stopniowi macierzy decydującej D_1, D_2, ..., D_k, ..., D_{n+m}, która jest macierzą nieosobliwą. Dla rzędów 1, 2, 3, ... odpowiadają kolejno skończone ciągi liczbowe

$$P_0, P_1 \tag{14}$$

$$P_0, P_1, P_2, P_3 \tag{15}$$

$$P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 \tag{16}$$

itd.

Skończonym ciągom liczbowym (14), (15), (16) odpowiadają (wzajemnie jednoznacznie) wielomiany (17), (18), (19).

$$p_1(t) = P_0 + P_1 \cdot t \tag{17}$$

$$p_2(t) = P_0 + P_1 \cdot t + \frac{1}{2!} \cdot P_2 \cdot t^2 + \frac{1}{3!} \cdot P_3 \cdot t^3 \tag{18}$$

$$p_3(t) = P_0 + P_1 \cdot t + \frac{1}{2!} \cdot P_2 \cdot t^2 + \frac{1}{3!} \cdot P_3 \cdot t^3 + \frac{1}{4!} \cdot P_4 \cdot t^4 + \frac{1}{5!} \cdot P_5 \cdot t^5 \tag{19}$$

itd.

Tak więc funkcja czasowa mocy w stanie nieustalonym może być reprezentowana na wiele sposobów, np. jako funkcja wielomianowa. Wniosek ten może wydawać się nieporozumieniem, bowiem cały szereg Maclaurina jest w pewnym, informatycznym sensie równoważny pewnemu, swojemu, skończonemu podszeregowi. Fakt ten przypomina pewne właściwości hologramu lub właściwości fraktali.

W następnym rozdziale przedstawione zostanie tzw. odwzorowanie odwrotne. Pokazano, jak na podstawie szeregu Maclaurina mocy $p(t)$ można wyznaczyć transformatę Laplace'a mocy $P(s)$.

5. Transformacja odwrotna

Znajomość skończonego ciągu liczbowego P_0, P_1, ..., P_{2n-1}, ... zawierającego $2n$ elementów wystarcza do odtworzenia nieskończonego ciągu P_0, P_1, ..., P_k, ... Wystarcza również do utworzenia transformaty Laplace'a $P(s)$. Rozwijając funkcję mocy chwilowej w szereg Maclaurina, otrzymujemy wzór (10), a z niego można utworzyć uogólniony ciąg Fibonacciego P_0, P_1, ..., P_k, ...

$$n = 1 \qquad \begin{bmatrix} v_0 \\ w_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -P_1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$n = 2 \qquad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_0 \\ w_1 \\ w_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -P_0 & 0 \\ 0 & 0 & -P_1 & -P_0 \\ & 0 & -P_2 & -P_1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$n = 3 \qquad \begin{bmatrix} v_2 \\ v_1 \\ v_0 \\ w_2 \\ w_1 \\ w_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -P_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -P_1 & -P_0 & \\ 0 & 0 & 0 & -P_2 & -P_1 & -P_0 \\ 0 & 0 & 0 & -P_3 & -P_2 & -P_1 \\ 0 & 0 & 0 & -P_4 & -P_3 & -P_2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{bmatrix} \tag{22}$$

itd.

Nieosobliwość kwadratowych macierzy w powyższych formułach jest warunkiem koniecznym istnienia transformat Laplace'a

$$n = 1 \qquad P(s) = \frac{v_0}{s + w_0} \tag{23}$$

$$n = 2 \qquad P(s) = \frac{v_1 \cdot s + v_0}{s^2 + w_1 \cdot s + w_0} \tag{24}$$

$$n = 3 \qquad P(s) = \frac{v_2 \cdot s^2 + v_1 \cdot s + v_0}{s^3 + w_2 \cdot s^2 + w_1 \cdot s + w_0} \tag{25}$$

itd.

Algorytm podany w punkcie (9) jest procedurą wyznaczania (w stanie nieustalonym w elektrycznym obwodzie RLC spełniającym przyjęte na wstępie założenia) transformaty mocy chwilowej $p(t)$ oznaczonej symbolem $P(s)$ na dwójniku, gdy dane są transformata prądu $I(s)$ oraz transformata napięcia $U(s)$. Opisana procedura omija ograniczenie wynikające z twierdzenia Abela.

6. Podsumowanie

1. Zakładamy, że transformata prądu $I(s)$ jest funkcją wymierną typu (1). Stopień mianownika funkcji wynosi n. Zakładamy dalej, że funkcja ta jest uproszczona.
2. Zakładamy, że transformata napięcia $U(s)$ jest funkcją wymierną typu (1). Stopień mianownika funkcji wynosi m. Zakładamy dalej, że funkcja ta jest uproszczona.
3. Wyznaczamy $n \cdot m$ pierwszych elementów uogólnionego ciągu Fibonacciego $I_0, I_1, ..., I_{n \cdot m}$, stosując odpowiednią procedurę podaną w (2), (3), (4) itd.
4. Wyznaczamy $n \cdot m$ pierwszych elementów uogólnionego ciągu Fibonacciego $U_0, U_1, ..., U_{n \cdot m}$, stosując odpowiednią procedurę podaną w (2), (3), (4) itd.
5. Wyznaczamy $n \cdot m$ pierwszych elementów uogólnionego ciągu Fibonacciego $P_0, P_1, ..., P_{n \cdot m}$, stosując odpowiednią procedurę podaną w (9).
6. Obliczamy rząd ciągu $P_0, P_1, ..., P_{n \cdot m}$, który równa się maksymalnemu indeksowi tej macierzy $D_1, D_2, ..., D_{n \cdot m}$ zdefiniowanych w (11), (12), (13) itd., która jest nieosobliwa. Maksymalny rząd k zawiera się w przedziale $2 \le k \le n \cdot m$.
7. Utworzony w punkcie 6 skończony ciąg $P_0, P_1, ..., P_k$ stanowi podstawę do utworzenia transformaty Laplace'a o mocy $P(s)$. Współczynniki licznika i mianownika $v_k, v_{k-1}, ..., v_0$ oraz $w_k, w_{k-1}, ..., w_0$ wyznaczamy w procedurze transformacji odwrotnej podanej w ciągu (20), (21), (22) itd.

   Opisaną powyżej procedurę wyznaczania $P(s)$, gdy znane są $I(s)$ oraz $U(s)$ spełniające odpowiednie założenia, możemy oznaczyć symbolem operacji binarnej, np. symbolem $\otimes$, oraz możemy określić ją mianem np. „iloczynu kompozycyjnego".

$$P(s) = I(s) \otimes U(s) \tag{26}$$

Przykład 1

Stosując procedurę opisaną w punkcie (9), możemy wyznaczyć dwutransformat Laplace'a. Na przykład „iloczyn kompozycyjny" transformaty stopnia drugiego oraz stopnia trzeciego może być transformatą Laplace'a stopnia czwartego (27).

$$\frac{2 \cdot s + 3}{s^2 + 3 \cdot s + 2} \otimes \frac{3 \cdot s^2 + 12 \cdot s + 11}{s^3 + 6 \cdot s^2 + 11 \cdot s + 6} = \frac{6 \cdot s^3 + 63 \cdot s^2 + 211 \cdot s + 224}{s^4 + 14 \cdot s^3 + 71 \cdot s^2 + 154 \cdot s + 120} \tag{27}$$

Należy podkreślić, że sens operacji binarnej ⊗ wykracza poza interpretację mocy w stanie nieustalonym. Ogólnie zachodzi następujący związek: jeżeli $F_1(s)$ i $F_2(s)$ są wymiernymi transformatami Laplace'a (spełniającymi założenia podane na wstępie) funkcji czasowych $f_1(t)$ oraz $f_2(t)$, to transformata Laplace'a ich iloczynu $f_1(t) \cdot f_2(t)$ wyraża się wzorem $F_1(s) \otimes F_2(s)$.

Przykład 2

Skończone ciągi liczbowe również opisują stany ustalone. Załóżmy, że napięcie i prąd pewnego dwójnika wyraża się funkcjami czasowymi (28) oraz (29)

$$u(t) = U \cdot \sin(\varpi \cdot t) \tag{28}$$

$$i(t) = I \cdot \sin(\varpi \cdot t + \varphi) \tag{29}$$

Moc chwilowa na tym dwójniku wyraża się funkcją (30)

$$p(t) = U \cdot I \cdot \sin(\varpi \cdot t) \cdot \sin(\varpi \cdot t + \varphi) \tag{30}$$

Transformata Laplace'a funkcji (30) wyraża się wzorem (31)

$$P(s) = U \cdot I \cdot \frac{\varpi \cdot \sin(\varphi) \cdot s + 2 \cdot \varpi \cdot \cos(\varphi)}{s^3 + 4 \cdot \omega^2 \cdot s} \tag{31}$$

gdzie

$$f_2 = 0 \qquad f_1 = U \cdot I \cdot \varpi \cdot \sin(\varphi) \qquad f_0 = 2 \cdot U \cdot I \cdot \varpi^2 \cdot \cos(\varphi) \tag{32}$$

$$e_2 = 0 \qquad e_1 = 4 \cdot \varpi^2 \qquad e_0 = 0 \tag{33}$$

Według wzorów macierzowych analogicznych do wzorów (4) można wyznaczyć skończony ciąg liczbowy opisujący moc chwilową

$$\begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f_2 \\ f_1 \\ f_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{34}$$

$$\begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ U \cdot I \cdot \varpi \cdot \sin(\varphi) \\ 2 \cdot U \cdot I \cdot \varpi^2 \cdot \cos(\varphi) \\ -4 \cdot U \cdot I \cdot \varpi^3 \cdot \sin(\varphi) \\ -8 \cdot U \cdot I \cdot \varpi^4 \cdot \cos(\varphi) \\ 16 \cdot U \cdot I \cdot \varpi^5 \cdot \sin(\varphi) \end{bmatrix} \tag{35}$$

Ten sam wynik można otrzymać, obliczając kolejne pochodne w zerze funkcji (30) lub stosując wzór (9).

Dysponując skończonym ciągiem liczbowym (35), można w obwodzie sinusoidalnym dla stanu ustalonego wyznaczyć tangens kąta fazowego (36), moc czynną (37) i inne wielkości

$$\tan^2(\varphi) = -\frac{P_1 \cdot P_3}{P_2^2} \tag{36}$$

$$P_{\text{czynna}} = -\frac{P_1 \cdot P_2}{P_3} \tag{37}$$

Wykonując tzw. operację „całkowania" [7] skończonych ciągów liczbowych reprezentujących moc chwilową, otrzymujemy skończony ciąg liczbowy reprezentujący energię zgromadzoną w dwójniku dla czasu początkowego stanu nieustalonego lub dla dowolnej chwili czasowej w rozwinięciu Maclaurina.

Interpretacja fizyczna skończonych ciągów liczbowych oraz pomiarowe ich pozyskanie wymagają odrębnej publikacji.

Literatura

[1] Kaczorek T., *Positive Linear Systems and their Relationship with Electrical Circuit*, XX-SPETO, Gliwice–Ustroń 1998.

[2] Kurosh A., *Higher Algebra*, Mir Publishers, Moscow 1972.

[3] Noble B., Daniel J.W., *Applied Linear Algebra*, Prentice-Hall, Inc. Inglewood Cliffs, New Jersey 1977.

[4] Piwowarczyk T., *Coefficients of Power Expansion of Original as Function of Transform Coefficients*, Czasopismo Techniczne, z. 7-E/1996, Wyd. Politechniki Krakowskiej, Kraków 1996.

[5] Piwowarczyk T., *Multipower Notation of Symmetric Polynomials in Engineering Calculus*, PAN, Kraków 2000.

[6] Piwowarczyk T., *Symmetric Polynomials of Variables in Electrical Circuits*, Czasopismo Techniczne, Wyd. Politechniki Krakowskiej, Kraków 1999.

[7] P i w o w a r c z y k T., *Teoria skończonych ciągów liczbowych w analizie obwodów elektrycznych*, Wyd. CCNS, Kraków 2002.

[8] P i w o w a r c z y k T., *Upraszczanie funkcji wymiernych*, Czasopismo Techniczne, Wyd. Politechniki Krakowskiej, Kraków 1999.

[9] P i w o w a r c z y k T., *Stan nieustalony w obwodach elektrycznych w rozwinięciu potęgowym*, Czasopismo Techniczne, Wyd. Politechniki Krakowskiej, Kraków 1999.

[10] S i w c z y ń s k i M., *Metody optymalizacyjne w teorii mocy obwodów elektrycznych*, Politechnika Krakowska, Kraków 1995.

[11] S o b c z y k T., W a r z e c h a A., *An Alternative Approach to Modeling Electrical Linear Magnetic Circuits*, Vol. XLIV, No. 4, PWN, Warszawa 1995.

[12] S o b c z y k T., *Formy Macierzowe Elektromechanicznych Przetworników Energii z Nieliniowym Obwodem Magnetycznym*, Wyd. Politechniki Krakowskiej, Kraków 1996.

[13] S o b c z y k T., *Metodyczne aspekty modelowania matematycznego maszyn indukcyjnych*, WNT, Warszawa 2004.