CZASOPISMO TECHNICZNE E
WYDAWNICTWO POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ
z. 1-E/2008
ISSN 0011-4561
ISSN 1897-6301

TADEUSZ PIWOWARCZYK*

UPRASZCZANIE FUNKCJI WYMIERNYCH

SIMPLIFICATION OF RATIONAL FUNCTIONS

S t r e s z c z e n i e

Funkcja wymierna przedstawia w obwodach elektrycznych m.in. stan nieustalony lub transmitancję. Funkcja taka musi być uproszczona przed jej zastosowaniem. Twierdzenie Abela stanowi główny problem podczas upraszczania. Może być on jednak pokonany w specjalnym podejściu. Teoria stanów nieustalonych rozwinięta wokół wielomianów symetrycznych dostarcza odpowiedniej do tego celu algebraicznej procedury. Jest ona wyrażona w klarownym zapisie macierzowym. Konkretny liczbowy przykład dołączony do artykułu ilustruje proponowaną procedurę.

Słowa kluczowe: *stan nieustalony, transmitancja, funkcja wymierna, rugownik, upraszczanie*

A b s t r a c t

A rational function in electrical circuits represents, among others, a transient state or a transmittance. Such a function must be simplified before it is used in a calculus. The main problem with simplification is the Abel theorem. However, it can be overcome by a special approach. The theory of transient states developed around symmetric polynomials delivers the algebra procedure designed for this purpose. It is expressed in a clear matrix notation. A concrete numerical example of a proposed procedure is enclosed to the article.

Keywords: *transient state, transmittance, rational function, reluctant, simplification*

* Dr inż. Tadeusz Piwowarczyk, Instytut Elektrotechniki Teoretycznej i Automatyki, Wydział Inżynierii Elektrycznej i Komputerowej, Politechnika Krakowska.

1. Wstęp

W artykule przedstawiono algebraiczną procedurę sprowadzania funkcji wymiernej niewłaściwej do postaci właściwej. Innymi słowy, chodzi o pozbycie się z licznika i mianownika wspólnego czynnika. Zatem wydzielenie licznika i mianownika funkcji wymiernej przez wspólny czynnik określono mianem upraszczania. Tylko w tym sensie w niniejszym artykule jest rozumiane upraszczanie. Problem upraszczania pojawia się szczególnie często w przypadku mnożenia transmitancji operatorowych. Proponowana metoda nie wymaga znajomości wspólnego czynnika, a więc nie jest konieczne szukanie miejsc zerowych mianownika oraz licznika. Omija się więc blokadę wynikającą z twierdzenia Abela, które mówi o nierozwiązalności przez tzw. pierwiastniki równań piątego i wyższych stopni. Opisana procedura jest „produktem ubocznym" analizy stanów nieustalonych w obwodach elektrycznych za pomocą wielomianów symetrycznych wielu zmiennych.

Należy zauważyć, że w literaturze funkcjonuje również termin „upraszczanie" w innym sensie. Chodzi wtedy o pewną aproksymację. Istotne jest wówczas badanie m.in. stabilności, realizowalności, obserwowalności.

2. Postawienie problemu

Podczas wyznaczania rozwiązań stanu nieustalonego w liniowych obwodach elektrycznych RLC otrzymuje się funkcję operatorową $F(s)$ reprezentującą poszukiwane rozwiązanie. Analiza tej funkcji wymaga wcześniejszego jej uproszczenia, czyli pozbycia się ewentualnych wspólnych dzielników licznika i mianownika.

Zakładamy, że funkcja jest postaci wymiernej o stopniu mianownika n. Zakładamy, że współczynniki licznika oraz mianownika są liczbami rzeczywistymi. Oczywiście, współczynniki występujące w mianowniku w funkcji (1) mogą przyjmować wartości zerowe, natomiast współczynniki licznika nie mogą być równocześnie wszystkie zerem. Ogólny zapis tej funkcji przedstawiono poniżej

$$F(s) = \frac{b_{n-1} \cdot s^{n-1} + b_{n-2} \cdot s^{n-2} + \ldots + b_1 \cdot s \ldots + b_0}{s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot s + \ldots + a_0} \tag{1}$$

Należy podkreślić, że powyższa funkcja operatorowa jako rozwiązanie stanu nieustalonego w obwodach elektrycznych RLC zawiera licznik o stopniu zawsze mniejszym co najmniej o jeden od stopnia mianownika. Opisana procedura upraszczania funkcji dotyczy wyłącznie jej ogólnej postaci podanej w punkcie (1), aczkolwiek niespełnienie warunku dotyczącego stopnia licznika i mianownika można łatwo pokonać.

W pierwszym punkcie analizy wzoru (1) należy zadbać, czy funkcja ta jest ułamkiem właściwym. W tym celu posługujemy się tzw. w literaturze rugownikiem [2], przedstawionym w (6).

3. Podstawowe narzędzia matematyczne

3.1. Rugownik

Rozważamy nieco ogólniejszy problem niż ten postawiony w punkcie (1). Rozważmy mianowicie dwa wielomiany stopnia n oraz stopnia m

$$b_n \cdot s^n + b_{n-1} \cdot s^{n-1} + \ldots + b_1 \cdot s + b_0 \tag{2}$$

$$a_m \cdot s^m + a_{m-1} \cdot s^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot s + a_0 \tag{3}$$

Dla każdego wielomianu tworzymy, odpowiednio, macierz **B** oraz macierz **A**. Macierz **B** zawiera n wierszy oraz $n + m$ kolumn

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_n & b_{n-1} & . & b_1 & b_0 & . & 0 & 0 \\ 0 & b_n & . & b_2 & b_0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & b_n & b_{n-1} & . & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & b_n & . & b_1 & b_0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Macierz **A** zawiera m wierszy oraz również $n + m$ kolumn

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_m & a_{m-1} & . & a_1 & a_0 & . & 0 & 0 \\ 0 & a_m & . & a_2 & a_0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & a_m & a_{m-1} & . & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & a_m & . & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Z macierzy **B** oraz **A** tworzymy macierz kwadratową o wymiarach $(n + m)\times(n + m)$. Można to zrobić na dwa sposoby, stosując tzw. bloki macierzy[1]

$$R_1 = \begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad R_2 = \begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix} \tag{6}$$

W obu przypadkach powstają różne macierze kwadratowe R_1, R_2. Wyznaczniki obu tych macierzy kwadratowych są takie same i przyjmują wartość R

$$|R_1| = |R_2| = R \tag{7}$$

Liczbę R nazywamy rugownikiem (ang. *reluctant*).

[1] W środowisku MATHCAD składanie bloków macierzy odbywa się za pomocą funkcji stack (B, A).

Znane w algebrze twierdzenie mówi, że rugownik utworzony dla dwu wielomianów o ogólnym kształcie (2) oraz (3) przyjmuje wartość zero wtedy i tylko wtedy, gdy oba wielomiany zawierają ten sam czynnik. W szczególnym przypadku można zastosować rugownik do funkcji wymiernej (1) będącej transformatą Laplace'a pewnej funkcji czasowej opisującej stan nieustalony.

3.2. Szereg Maclaurina

Dla konkretnego stopnia n funkcji $F(s)$ o ogólnej postaci (1) wprowadzamy ciąg zawierający $2n$ rzeczywistych wartości oznaczonych symbolami $A_0, A_1, ..., A_{2n-1}$. Definicja tych liczb [4], [7] dla kolejnych trzech stopni jest następująca

$$n = 1 \qquad \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$n = 2 \qquad \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & 1 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$n = 3 \qquad \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

itd.

W teorii stanów nieustalonych w obwodach elektrycznych [7] wykazano, że kolejne liczby $A_0, A_1, ..., A_{2n-1}$ są pochodnymi oryginału $f(t)$ dla $t = 0$. Tworzą one początek pewnego uogólnionego ciągu Fibonacciego [7]. Ostatecznie za pomocą tego skończonego ciągu przez jego rozszerzenie do nieskończoności [1] tworzymy szereg Maclaurina.

Zatem dla danej wartości n wyznaczamy $2n$ wartości liczbowych.

3.3. Macierz decydująca

Znając już ciąg $A_0, A_1, ..., A_{2n-1}$, tworzymy dla kolejnych stopni n ciąg macierzy podany poniżej

$$n = 1 \qquad D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -A_0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$n = 2 \qquad D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -A_0 & 0 \\ 0 & 0 & -A_1 & -A_0 \\ 0 & 0 & -A_2 & -A_1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$n = 3 \qquad D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -A_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -A_1 & -A_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A_2 & -A_1 & -A_0 \\ 0 & 0 & 0 & -A_3 & -A_2 & -A_1 \\ 0 & 0 & 0 & -A_4 & -A_3 & -A_2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

itd.

Macierze występujące w powyższym ciągu nazwane zostały macierzami decydującymi. Ich wyznaczniki mają podobne własności do własności rugownika. Maksymalny stopień nieosobliwej macierzy decydującej określa nam stopień mianownika funkcji $F(s)$ po uproszczeniu.

3.4. Synteza funkcji uproszczonej

Z poniżej podanego ciągu równań macierzowych wybieramy to równanie, w którym nieosobliwa macierz kwadratowa (decydująca) ma największy stopień. Taka macierz zawsze istnieje dla danej funkcji wymiernej $F(s)$. Wyznaczamy współczynniki b_i oraz a_i .

$$n = 1 \qquad \begin{bmatrix} b_0 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -A_0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$n = 2 \qquad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -A_0 & 0 \\ 0 & 0 & -A_1 & -A_0 \\ 0 & 0 & -A_2 & -A_1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$n = 3 \qquad \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -A_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -A_1 & -A_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A_2 & -A_1 & -A_0 \\ 0 & 0 & 0 & -A_3 & -A_2 & -A_1 \\ 0 & 0 & 0 & -A_4 & -A_3 & -A_2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{bmatrix} \tag{16}$$

itd.

Oczywiście, powyższe wyrażenia mają sens, gdy odpowiednie macierze decydujące są nieosobliwe. Wyznaczone w ten sposób współczynniki posłużą do utworzenia uproszczonej funkcji wymiernej.

Uproszczenie funkcji wymiernej może być rozumiane na dwa sposoby:
1) usunięcie miejsca zerowego z licznika i mianownika funkcji $F(s)$,
2) aproksymacja funkcji $F(s)$ o stopniu n funkcją o stopniu niższym od n.

Niniejszy artykuł dotyczy tylko pierwszego przypadku. Przypadek drugi odnoszący się aproksymacji był analizowany m.in. w [7].

Przykład 1

Rozważamy funkcję wymierną stopnia $n = 4$.

$$F(s) = \frac{2 \cdot s^3 - 11 \cdot s^2 - 20 \cdot s - 7}{s^4 - 6 \cdot s^3 - 5 \cdot s^2 - 17 \cdot s + 21} \tag{17}$$

Współczynniki licznika i mianownika tej funkcji są następujące

$$b_3 = 2 \qquad b_2 = -11 \qquad b_1 = -20 \qquad b_0 = 2 \tag{18}$$

$$a_4 = 1 \qquad a_3 = -6 \quad a_2 = -5 \qquad a_1 = -17 \qquad a_0 = 21 \tag{19}$$

Tworzymy rugownik zgodnie z (4), (5), (6)

$$R = \left|\begin{bmatrix} b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & a_3 & a_2 & a & a_0 \end{bmatrix}\right| \qquad R = 0 \tag{20}$$

Rugownik (wyznacznik) przyjmuje w tym przykładzie wartość zero. Oznacza to, że wyrażenie wymierne (17) jest niewłaściwym ułamkiem. Należy go uprościć.

Wyznaczamy ciąg ośmiu wartości rzeczywistych $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$.

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ A_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ A_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \\ 8 \\ 3 \\ -31 \\ 49 \\ 22 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Badamy wyznaczniki macierzy decydujących

$$|D_4| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -A_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -A_1 & -A_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -A_2 & -A_1 & -A_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -A_3 & -A_2 & -A_1 & -A_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -A_4 & -A_3 & -A_2 & -A_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -A_5 & -A_4 & -A_3 & -A_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -A_5 & -A_5 & -A_4 & -A_3 \end{Vmatrix} = 0 \tag{22}$$

$$|D_3| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -A_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -A_1 & -A_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A_2 & -A_1 & -A_0 \\ 0 & 0 & 0 & -A_3 & -A_2 & -A_1 \\ 0 & 0 & 0 & -A_4 & -A_3 & -A_2 \end{Vmatrix} = -155 \tag{23}$$

Jak widać, największy stopień macierzy decydującej nieosobliwej wynosi 3. Wyznaczamy zatem współczynniki licznika i mianownika funkcji po uproszczeniu. Wyznacznik (22) przyjmuje wartość zerową podobnie jak rugownik (20).

$$\begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -A_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -A_1 & -A_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A_2 & -A_1 & -A_0 \\ 0 & 0 & 0 & -A_3 & -A_2 & -A_1 \\ 0 & 0 & 0 & -A_4 & -A_3 & -A_2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \tag{24}$$

Ostatni punkt procedury polega na utworzeniu funkcji uproszczonej na podstawie wartości otrzymanych w (24)

$$F(s) = \frac{2 \cdot s^2 + 3 \cdot s + 1}{s^3 + s^2 + 2 \cdot s - 3} \tag{25}$$

Zatem funkcja wymierna (25) jest formą uproszczoną funkcji wymiernej (17). Dlatego też pozostawiono dla niej to samo oznaczenie $F(s)$. Zadanie zostało wykonane bez znajomości wspólnego czynnika, który został wyeliminowany z licznika i mianownika wyrażenia nieuproszczonego (17). Wyrażenie (25) jest już ułamkiem właściwym i nadaje się do dalszej analizy.

Dzieląc na przykład licznik wyrażenia (17) przez licznik wyrażenia (25), otrzymujemy ów wspólny czynnik, który został wyeliminowany w zaproponowanej procedurze. Jest nim wyrażenie $s + 7$. Znajomość tego czynnika może być przydatna podczas kontroli poprawności obliczeń.

Proponowaną metodę można uogólniać lub upraszczać na wiele sposobów. Przykładowo, w połączeniu szeregowym dwu transmitancji podanych poniżej

$$F_1(s) = \frac{L_1(s)}{M_1(s)} \qquad \text{oraz} \qquad F_2(s) = \frac{L_2(s)}{M_2(s)} \tag{26}$$

zamiast upraszczania ich iloczynu $F_1(s) \cdot F_2(s)$ można upraszczać cztery następujące funkcje wymierne (co zmniejsza rozmiary rugowników oraz macierzy decydujących)

$$F_1(s), \quad F_2(s), \quad \frac{L_1(s)}{M_2(s)}, \quad \frac{L_2(s)}{M_1(s)} \tag{27}$$

Oczywiście, każda z tych funkcji powinna być „sprowadzona” do postaci standardowej przyjętej w niniejszym artykule, czyli do postaci (1). Sposób, w jaki to można zrobić, pozostawia się czytelnikowi.

Również wyznaczniki macierzy decydujących (22), (23) można zredukować do prostszych postaci, korzystając z własności bloków macierzy kwadratowej

$$\left|\begin{bmatrix} -A_3 & -A_2 & -A_1 & -A_0 \\ -A_4 & -A_3 & -A_2 & -A_1 \\ -A_5 & -A_4 & -A_3 & -A_2 \\ -A_6 & -A_5 & -A_4 & -A_3 \end{bmatrix}\right| = 0 \tag{28}$$

$$\left|\begin{bmatrix} -A_2 & -A_1 & -A_0 \\ -A_3 & -A_2 & -A_1 \\ -A_4 & -A_3 & -A_2 \end{bmatrix}\right| = -155 \tag{29}$$

Można również usunąć znaki ujemne w powyższych wyznacznikach, wprowadzając jeden czynnik: $(-1)^n$, gdzie n jest stopniem wyznacznika.

4. Uogólnienia proponowanej metody

W zagadnieniach rozważanych teoretycznie zachodzi konieczność ogólnego podania kryterium upraszczania funkcji $F(s)$ przywołanej w punkcie (1). W tym celu tworzymy ciąg wyznaczników macierzy decydujących oznaczonych symbolami

$$|D_n|, \quad |D_{n-1}|, \quad |D_{n-2}|, \ldots \tag{30}$$

Jeżeli funkcja $F(s)$ jest ułamkiem nieupraszczalnym, to poniższe wyrażenie jest różne od zera

$$\left|D_n(b_n, b_{n-1}, ..., b_1, b_0, a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0)\right| \neq 0 \tag{31}$$

Jeżeli funkcja $F(s)$ jest ułamkiem upraszczalnym z jednym miejscem zerowym, to zachodzi poniższa koniunkcja

$$\left|D_n(b_n, b_{n-1}, ..., b_1, b_0, a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0)\right| = 0 \tag{32}$$

$$\left|D_{n-1}(b_n, b_{n-1}, ..., b_1, b_0, a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0)\right| \neq 0 \tag{33}$$

Jeżeli funkcja $F(s)$ jest ułamkiem upraszczalnym z dwoma miejscami zerowymi, to zachodzi poniższa koniunkcja

$$\left|D_n(b_n, b_{n-1}, ..., b_1, b_0, a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0)\right| = 0 \tag{34}$$

$$\left|D_{n-1}(b_n, b_{n-1}, ..., b_1, b_0, a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0)\right| = 0 \tag{35}$$

$$\left|D_{n-2}(b_n, b_{n-1}, ..., b_1, b_0, a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0)\right| \neq 0 \tag{36}$$

itd.

Należy podkreślić, że w przypadku miejsc zerowych zespolonych zawsze występuje parzysta liczba wyznaczników z macierzy decydujących. Wynika to z faktu, że miejsca zerowe zespolone występują parami jako sprzężone.

Przykład 2

Rozważamy funkcję wymierną stopnia $n = 4$

$$F(s) = \frac{b_3 \cdot s^3 + b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + b_0}{s^4 + a_3 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0} \tag{37}$$

Współczynniki licznika i mianownika b_n, b_{n-1}, ..., b_1, b_0, a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 przyjmują dowolne wartości rzeczywiste. Należy podać warunki (równania, nierówności), których spełnianie oznacza konieczność uproszczenia funkcji (37)

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ A_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} \tag{38}$$

$$\begin{vmatrix} A_3 & A_2 & A_1 & A_0 \\ A_4 & A_3 & A_2 & A_1 \\ A_5 & A_4 & A_3 & A_2 \\ A_6 & A_5 & A_4 & A_3 \end{vmatrix} \tag{39}$$

$$\begin{vmatrix} A_2 & A_1 & A_0 \\ A_3 & A_2 & A_1 \\ A_4 & A_3 & A_2 \end{vmatrix} \tag{40}$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_0 \\ A_2 & A_1 \end{vmatrix} \tag{41}$$

Wyznaczniki z macierzy decydujących można zastąpić na tym etapie wyznacznikami (39), (40), (41). Podstawiając w nich A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 jako funkcje zależne od b_n, b_{n-1}, ..., b_1, b_0, a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 – według (38) – otrzymujemy jedno z kryterium (jedną z koniunkcji) (31) lub (32) i (33) lub (34) i (35) i (36).

Należy zauważyć, że podczas wyznaczania funkcji wymiernej za pomocą odpowiedniego wzoru z szeregu (14), (15), (16), ... zawsze pojawia się wyrażenie uproszczone. Otrzymane kryteria są wyrażeniami algebraicznymi (wielomianami symetrycznymi zależnymi od miejsc zerowych mianownika), bardzo długimi, nienadającymi się do zaprezentowania w tym artykule! Jednak nie ma takiej potrzeby, bowiem w tym przykładzie procedura algebraiczna „dwuetapowa z ośmioma pośrednikami” A_0, A_1, ..., A_7 w zupełności wystarcza do dalszej matematycznej analizy. Zatem kryteria mają postać:

Jeżeli	$\lvert D_4 \rvert \neq 0$	funkcja $F(s)$ jest nieupraszczalna,
Jeżeli	$\lvert D_4 \rvert = 0$, $\lvert D_3 \rvert \neq 0$	funkcja $F(s)$ jest upraszczalna z jednym miejscem zerowym,
Jeżeli	$\lvert D_4 \rvert = 0$, $\lvert D_3 \rvert = 0$, $\lvert D_2 \rvert \neq 0$	funkcja $F(s)$ jest upraszczalna z dwoma miejscami zerowymi (mogą być zespolone).

Gdzie wyrażenia $\lvert D_4 \rvert$, $\lvert D_3 \rvert$, $\lvert D_2 \rvert$ można zastąpić wyrażeniami (39), (40), (41).

Literatura

[1] Kaczorek T., *Positive Linear Systems and their Relationship with Electrical Circuit*, XX-SPETO, Gliwice–Ustroń 1998.

[2] Kurosh A., *Higher Algebra*, Mir Publishers, Moscow 1972.

[3] Noble B., Daniel J.W., *Applied Linear Algebra, Prentice-Hall*, Inc. Inglewood Cliffs, New Jersey 1977.

[4] Piwowarczyk T., *Coefficients of Power Expansion of Original as Function of Transform Coefficients*, Czasopismo Techniczne, z. 7-E/1996, Wyd. Politechniki Krakowskiej, Kraków 1996.

[5] P i w o w a r c z y k T., *Multipower Notation of Symmetric Polynomials in Engineering Calculus*, PAN, Kraków 2000.
[6] P i w o w a r c z y k T., *Symmetric Polynomials of Variables in Electrical Circuits*, Czasopismo Techniczne, Wyd. Politechniki Krakowskiej, Kraków 1999.
[7] P i w o w a r c z y k T., *Teoria skończonych ciągów liczbowych w analizie obwodów elektrycznych*, Wyd. CCNS, Kraków 2002.
[8] S i w c z y ń s k i M., *Metody optymalizacyjne w teorii mocy obwodów elektrycznych*, Politechnika Krakowska, Kraków 1995.
[9] S o b c z y k T., W a r z e c h a A., *An Alternative Approach to Modeling Electrical Linear Magnetic Circuits*, Vol. XLIV, No. 4, PWN, Warszawa 1995.
[10] S o b c z y k T., *Formy macierzowe elektromechanicznych przetworników energii z nieliniowym obwodem magnetycznym*, Czasopismo Techniczne, z. 7-E/1996, Wyd. Politechniki Krakowskiej, Kraków.
[11] S o b c z y k T., *Metodyczne aspekty modelowania matematycznego maszyn indukcyjnych*, Wyd. Naukowo-Techniczne, Warszawa 2004.
[12] T u r o w i c z A., *Teoria macierzy*, AGH, Kraków 2005.