

TADEUSZ SOBCZYK*

**ANALIZA TRANSFERU NAPIĘCIA
PRZEZ PRZEKSZTAŁTNIK MACIERZOWY 9×3
Z JEDNOCZESNĄ ZMIANĄ CZĘSTOTLIWOŚCI****ANALYSIS OF VOLTAGE TRANSFER BY
A 9×3 MATRIX CONVERTER WITH SIMULTANEOUS
FREQUENCY CHANGING****Streszczenie**

W artykule przedstawiono analizę przekształtnika macierzowego o specyficznej strukturze, który umożliwia zmianę liczby faz oraz częstotliwości napięć układów wielofazowych. Przekształtniki takie mogą znaleźć zastosowanie w torze generacji energii elektrycznej małych siłowni ciepłych wykorzystujących wielofazowe generatory synchroniczne napędzane przez wysokoobrotowe turbiny gazowe. Przedmiotem badań jest widmo Fouriera napięć wyjściowych przekształtnika macierzowego, którego zadaniem jest przekształcenie 9-fazowego układu napięć o podwyższonej częstotliwości, rzędu kilkuset herców, w 3-fazowy układ napięć o częstotliwości sieciowej 50 Hz. W artykule przedstawiono ideę sterowania przekształtnikiem macierzowym, umożliwiającą realizację tego celu, oraz przeprowadzono analizę transferu napięcia w dziedzinie częstotliwości. Doprowadziła ona do analitycznych zależności określających jakościowo oraz ilościowo widmo napięć wyjściowych dla wyidealizowanych warunków.

Słowa kluczowe: układy energoelektroniczne, przekształtnik macierzowy, przekształcanie napięć, analiza widmowa

Abstract

This paper presents an analysis of a matrix converter with a specific topology, which enables to change a number of phases and frequency of the multi-phase voltage system. Such inverters can be applied in an electric energy generation line of small power stations, in which multi-phase synchronous generators driven by high speed gas turbine are applied. The Fourier spectrum of input voltages is investigated for a matrix converter changing a 9 phase voltage system with high frequency, of the order a few hundred Hz, onto the 3 phase voltage system with commercial parameters. In the paper an idea of the matrix converter control is presented, which allows to fulfil such voltage transformation. The analysis in the frequency domain gives analytical expressions determining quantitatively and qualitatively the Fourier spectra of output voltages at idealized performances.

Keywords: power electronics, matrix converter, voltage transfer, spectral analysis

* Prof. dr hab. inż. Tadeusz Sobczyk, Instytut Elektromechanicznych Przemian Energii, Wydział Inżynierii Elektrycznej i Komputerowej, Politechnika Krakowska.

1. Wstęp

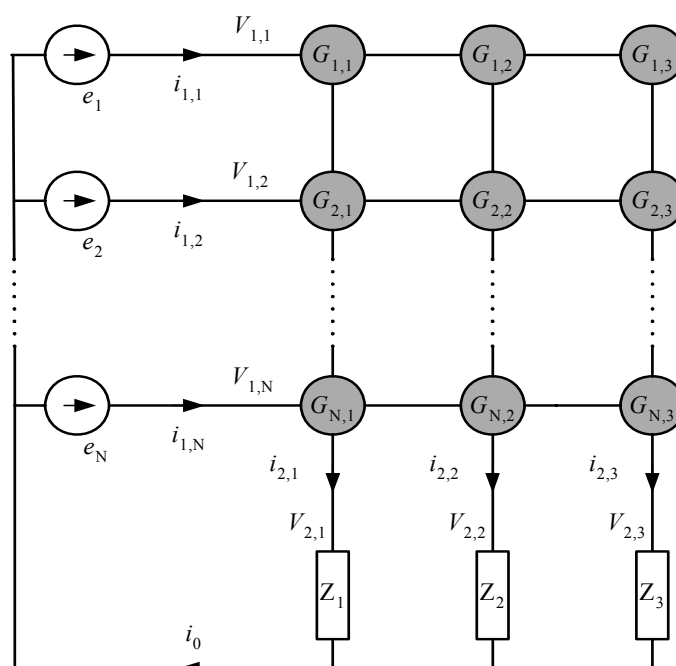
Problem będący przedmiotem niniejszego artykułu pojawił się w wyniku podjęcia badań nad małymi siłowniami ko-generacyjnymi, które stały się ostatnio przedmiotem szczególnego zainteresowania. Stało się tak dzięki specjalnej dyrektywie Unii Europejskiej poświęconej zagadnieniom ko-generacji, która narzuca państwom członkowskim rozwój tego typu siłowni w perspektywie najbliższych kilkunastu lat. Siłownie takie wykorzystują gaz ziemny lub biogaz jako paliwo pierwotne, a najważniejsze ich zalety to bardzo wysoki stopień wykorzystania pierwotnego nośnika energii elektrycznej osiągający (80–85%) oraz bardzo wysoka sprawność wytwarzania energii elektrycznej na poziomie (50–55%) energii nośnika pierwotnego. Siłownie tego typu mogą zapewniać istotne uzupełnienie energii elektrycznej dostarczanej przez system elektroenergetyczny czy też energii cieplnej wytwarzanej w dużych elektrociepłowniach aglomeracji miejskich oraz mogą być podstawowym źródłem energii – zarówno elektrycznej, jak i cieplnej – dla małych przedsiębiorstw lub społeczności na terenach słabo zurbanizowanych. Takie siłownie mogą osiągać moce rzędu kilku megawatów przy produkcji energii elektrycznej i kilkunastu megawatów dla produkcji energii cieplnej.

Wysoką efektywność generowania energii elektrycznej w małych siłowniach można uzyskać, napędzając generatory elektryczne bezpośrednio przez wysokoobrotowe turbiny gazowe oraz wykorzystując ciepło odpadowe do generacji użytkowej energii cieplnej. Turbiny gazowe osiągają najwyższe sprawności przy relatywnie wysokich prędkościach rzędu 15 000–40 000 obr./min, a wytwarzana moc zależy w istotny sposób od prędkości obrotowej. Utrzymanie bardzo wysokiej sprawności turbiny spalinowej wiąże się przeważnie z pracą przy zmiennej prędkości obrotowej. Wymaga to nowego typu generatorów, przystosowanych do tak dużych prędkości wirowania oraz zmiany parametrów energii wytworzonej przez generator do wymagań odbiorcy. W celu dostosowania parametrów generowanej energii elektrycznej do wymagań komercyjnego odbiorcy niezbędne jest zastosowanie specjalnych układów energoelektronicznych zapewniających odpowiednią jakość energii elektrycznej. Jednym z nich jest przekształtnik macierzowy, należący do klasy bezpośrednich przekształtników AC-AC, który umożliwia zamianę symetrycznego układu napięć o podwyższonej częstotliwości wytwarzanego przez wysokoobrotowy generator synchroniczny na trójfazowy symetryczny układ napięć o częstotliwości sieci elektroenergetycznej. W celu obniżenia zawartości harmonicznych w napięciach wyjściowych korzystne jest zastosowanie wielofazowego generatora synchronicznego, co dla przekształtnika macierzowego nie stanowi istotnej różnicy. W zgłoszeniu patentowym [2] opisano oryginalny sposób sterowania zaworami przekształtnika macierzowego, który umożliwia realizację takiego celu, co zostało potwierdzone licznymi badaniami symulującymi pracę przekształtnika macierzowego w wyidealizowanych warunkach [2–5].

W niniejszym artykule rozważano szczegółowo przypadek przekształtnika macierzowego 9×3 , łączącego 9-fazowy generator o prędkości obrotowej 15 000 obr./min z 3-fazową komercyjną siecią 3×400 V, 50 Hz. Rozważania przedstawione w artykule można stosunkowo prosto uogólnić na przekształtniki macierzowe $N \times 3$.

2. Opis przekształtnika macierzowego dla zastosowań w małych silowniach ciepłych

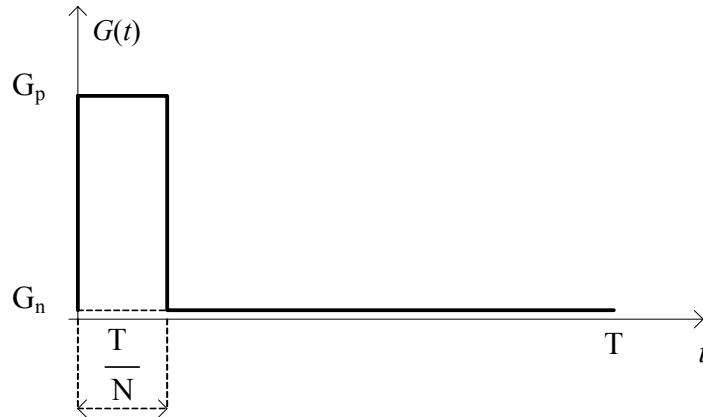
W niniejszym artykule przedstawiona zostanie analiza teoretyczna zmiany liczby faz oraz częstotliwości przez przekształtnik macierzowy. W tym celu zostanie przeanalizowany obwód elektryczny przedstawiony na rys. 1, o topologii odpowiadającej przekształtnikowi macierzowemu $N \times 3$, czyli o N fazach wejściowych i o 3 fazach wyjściowych, przy czym dla wspomnianej aplikacji liczba faz wejściowych N powinna być wielokrotnością liczby 3.



Rys. 1. Obwód elektryczny o topologii odpowiadającej przekształtnikowi macierzowemu $N \times 3$

Fig. 1. Atopology of an electric circuit representing a 9×3 matrix converter

Zaczernione kółka na tym rysunku ilustrują położenie zaworów, które są ponumerowane tak jak elementy w macierzy o 3 kolumnach, odpowiadających fazom wyjściowym, oraz N wierszach, odpowiadających fazom wejściowym. Jak już powiedziano, zawory te łączą odpowiednie fazy wejściowe z wyjściowymi w stanie przewodzenia, a eliminują takie połączenia, przechodząc do stanu zaporowego. Dla dalszej analizy założono, że zawory są reprezentowane przez konduktancje $G_{n,m}$, które przyjmują odpowiednio duże wartości, gdy zawór jest w stanie przewodzenia i relatywnie małe, gdy zawór jest w stanie zaporowym, co reprezentuje funkcja przedstawiona na rys. 2.



Rys. 2. Zmienność konduktancji reprezentującej stan zaworu przekształtnika macierzowego

Fig. 2. Variation of conductance representing switches of a matrix converter

Jest zrozumiałe, że funkcje zmian wartości konduktancji reprezentujących stany przewodzenia poszczególnych zaworów odpowiadają funkcjom stanu zaworów przedstawionym na rys. 1, dla przekształtnika 9×3 . Przy takiej strategii sterowania konduktancje w obwodzie elektrycznym z rys. 1 zmieniają swoje wartości zgodnie z funkcjami generowanymi przez funkcję z rys. 2 zgodnie z regułą

$$G_{n,m} = G \left(t - (n-1) \frac{T}{9} - (m-1) \frac{T}{3} \right) \quad \text{dla } n \in \{1, 2, \dots, 9\} \quad \text{oraz } m \in \{1, 2, 3\} \quad (1)$$

Tworzą one zbiór funkcji, które przedstawiono na rys. 3.

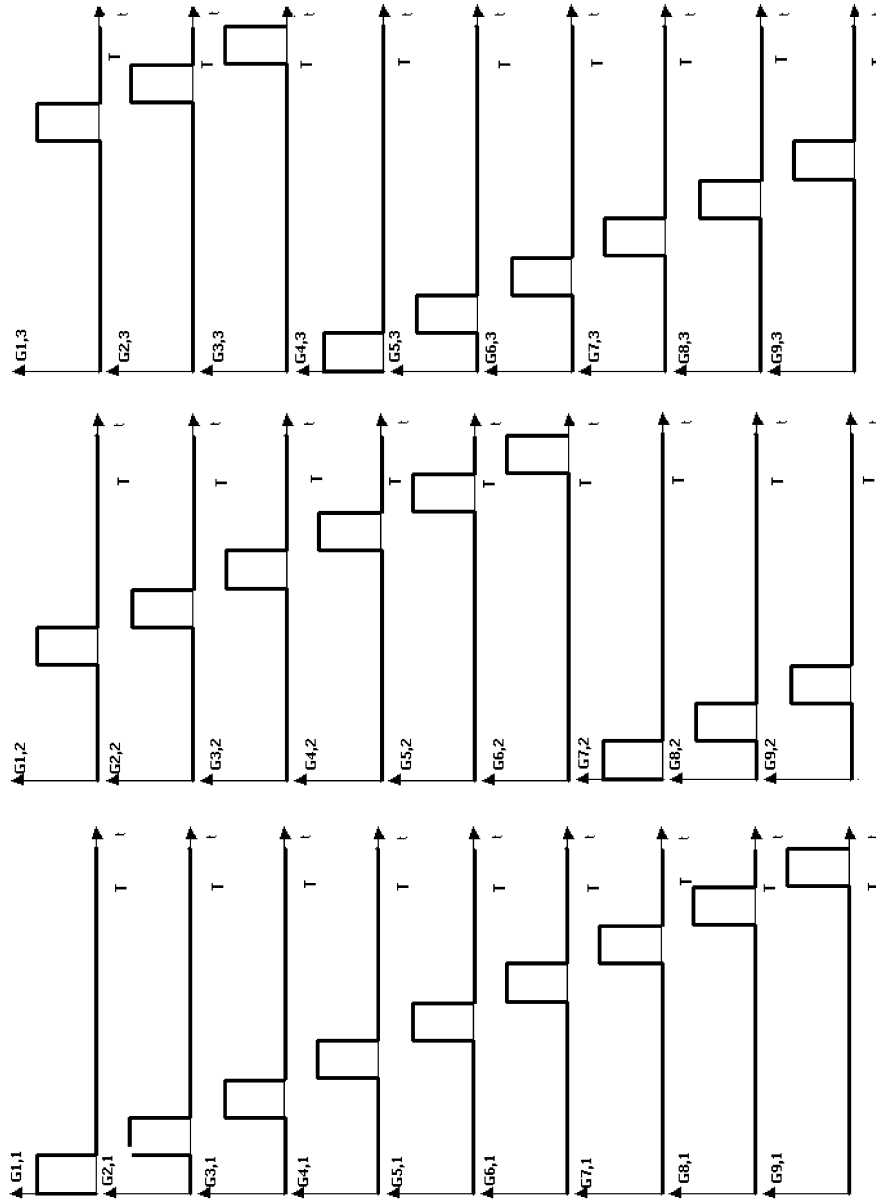
Problem analizy pracy przekształtnika macierzowego sprowadzono w ten sposób do analizy obwodu elektrycznego o topologii z rys. 1, w którym występują konduktancje o okresowo zmieniających się wartościach. Napięcia wejściowe reprezentują w nim napięcia źródłowe generatora wielofazowego, a impedancje reprezentują obciążenie na wyjściu przekształtnika. Taki obwód idealizuje rzeczywisty przekształtnik macierzowy, lecz umożliwia analizę przekształcania napięć w dziedzinie częstotliwości.

Do opisu obwodu z rys. 1 zastosowano metodę potencjałów węzłowych, otrzymując równania

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

w których

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= [v_{1,1} \quad v_{1,2} \quad \dots \quad v_{1,9}]^T, & \mathbf{v}_2 &= [v_{2,1} \quad v_{2,2} \quad v_{2,3}]^T \\ \mathbf{i}_1 &= [i_{1,1} \quad i_{1,2} \quad \dots \quad i_{1,9}]^T, & \mathbf{i}_2 &= [i_{2,1} \quad i_{2,2} \quad i_{2,3}]^T \end{aligned}$$



Rys. 3. Zbór funkcji opisujących zmienność konduktancji przekształtnika macierzowego

Fig. 3. Set of functions of conductance changes of a 9x3 matrix converter

a macierze przyjmują formę

$$\mathbf{G}_{11} = \text{diag} \left[\sum_{m=1}^3 G_{1,m}, \sum_{m=1}^3 G_{2,m}, \sum_{m=1}^3 G_{2,m} \right], \quad \mathbf{G}_{22} = \text{diag} \left[\sum_{n=1}^9 G_{n,1}, \sum_{n=1}^9 G_{n,2}, \sum_{n=1}^9 G_{n,3} \right]$$

$$\mathbf{G}_{12} = - \begin{bmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} & G_{1,3} \\ G_{2,1} & G_{2,2} & G_{2,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{9,1} & G_{9,2} & G_{9,3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_{21} = (\mathbf{G}_{12})^T$$

Aby przeprowadzić analizę w dziedzinie częstotliwości, funkcję $G(t)$ z rys. 2 rozłożono w szereg Fouriera, zakładając zerową wartość konduktancji dla stanu zaporowego zaworów $G_n = 0$

$$G(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_k \cdot e^{jk\Omega t} \quad (3)$$

gdzie $\Omega = \frac{2\pi}{T}$, a współczynniki Fouriera wynoszą

$$G_0 = \frac{G_p}{9}, \quad G_k = \frac{G_p}{9} \frac{\sin\left(k \frac{\beta}{2}\right)}{\left(k \frac{\beta}{2}\right)} \cdot e^{-j\left(k \frac{\beta}{2}\right)}$$

gdzie $\beta = \frac{2\pi}{9}$.

Funkcje określające zmienność konduktancji poszczególnych zaworów można wówczas zapisać w postaci szeregów

$$G_{n,m} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(b^{-k(n-1)} \cdot a^{-k(m-1)} \cdot G_k \right) \cdot e^{jk\Omega t} \quad (4)$$

gdzie $a = e^{j\alpha}$, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ oraz $b = e^{j\beta}$, $\beta = \frac{2\pi}{9}$.

Opis przekształtnika macierzowego upraszcza się zasadniczo w wyniku zastosowania składowych symetrycznych 9-fazowych dla potencjałów napięć i prądów wejściowych oraz 3-fazowych dla potencjałów i prądów wyjściowych zdefiniowanych następująco

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^1 &= \mathbf{T}_9 \cdot \mathbf{v}_1, & \mathbf{i}^1 &= \mathbf{T}_9 \cdot \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{v}^2 &= \mathbf{T}_3 \cdot \mathbf{v}_2, & \mathbf{v}^2 &= \mathbf{T}_3 \cdot \mathbf{v}_2 \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^1 &= [v_1^0 \quad v_1^1 \quad \dots \quad v_1^8]^T, & \mathbf{i}^1 &= [i_1^0 \quad i_1^1 \quad \dots \quad i_1^8]^T \\ \mathbf{v}^2 &= [v_2^0 \quad v_2^1 \quad v_2^2]^T, & \mathbf{i}^2 &= [i_2^0 \quad i_2^1 \quad i_2^2]^T \\ T_N &= \frac{1}{\sqrt{9}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & b & \dots & b^8 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b^8 & \dots & b^{64} \end{bmatrix}, & T_N &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a^4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Po transformacji równania (2) przyjmują formę

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}^{11} & \mathbf{G}^{12} \\ \mathbf{G}^{21} & \mathbf{G}^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}^1 \\ \mathbf{v}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}^1 \\ \mathbf{i}^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

W wyniku zastosowania transformacji do składowych symetrycznych struktury macierzy w tym równaniu ulegają uporządkowaniu. Macierz \mathbf{G}^{22} staje się macierzą jednostkową

$$\mathbf{G}^{22} = \frac{G_p}{9} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Macierz \mathbf{G}^{11} można zapisać w postaci macierzowego szeregu Fouriera w postaci (8)

$$\mathbf{G}^{11} = \dots + 3\hat{G}_6 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot e^{-j6\Omega t} + 3\hat{G}_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot e^{-j3\Omega t} +$$

$$\begin{aligned}
& +3G_0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \\
& +3G_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot e^{j3\Omega t} + 3G_6 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot e^{j6\Omega t} + \dots
\end{aligned}$$

(8)

Macierze \mathbf{G}^{12} oraz \mathbf{G}^{21} spełniają związek $\mathbf{G}^{21} = (\mathbf{G}^{12})^T$ i po transformacji przyjmują postaci

$$\mathbf{G}^{12} = -\sqrt{9 \cdot 3} \cdot \left(\dots + \overset{*}{G}_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot e^{-j3\Omega t} + \overset{*}{G}_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot e^{-j2\Omega t} + \overset{*}{G}_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot e^{-j\Omega t} + \dots \right)$$

$$\left. \begin{aligned}
 & + G_0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + G_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot e^{j\Omega t} + G_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot e^{j2\Omega t} + G_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot e^{j3\Omega t} + \dots
 \end{aligned} \right)$$

(9)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G}^{21} = & -\sqrt{9 \cdot 3} \cdot \left(\dots + G_3^* \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot e^{-j3\Omega t} + \right. \\
 & + G_2^* \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot e^{-j2\Omega t} + \\
 & + G_1^* \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot e^{-j\Omega t} + \\
 & + G_0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \\
 & \left. + G_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot e^{j\Omega t} + \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + G_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot e^{j2\Omega t} + \\
& + G_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot e^{j3\Omega t} + \dots \quad (10)
\end{aligned}$$

Równania (6) podają związki między składowymi symetrycznymi napięć oraz prądów wejściowych i wyjściowych. W celu dalszych analiz należy je uzupełnić relacjami w dziedzinie częstotliwości między wektorami \mathbf{i}^1 , \mathbf{v}^1 oraz \mathbf{i}^2 , \mathbf{v}^2 , wynikającymi z opisu układów elektrycznych dołączonych do wejścia i wyjścia przekształtnika macierzowego. Pozwala to dokonać bilansu harmonicznych potencjałów po obydwóch stronach przekształtnika, co prowadzi do nieskończonego układu równań algebraicznych. Układ taki musi być rozwiązywany numerycznie po ograniczeniu jego wymiarów do skończonych.

3. Analiza widmowa napięć wyjściowych przekształtnika macierzowego zasilanego symetrycznym, monoharmonicznym układem napięć

Podstawowe własności wyjściowego układu napięć przekształtnika macierzowego 9×3 można względnie prosto określić z układu równań (6), zakładając, że przekształtnik macierzowy jest zasilany po stronie wejściowej z idealnego źródła napięciowego, czyli że znane są potencjały na wejściach przekształtnika względem punktu zerowego, a po stronie wyjściowej przekształtnik nie jest obciążony, czyli że prądy wyjściowe się zerują. Wówczas równania (6) ograniczają się do postaci

$$\mathbf{G}^{21} \cdot \mathbf{v}^1 + \mathbf{G}^{22} \cdot \mathbf{v}^2 = \mathbf{0} \quad (11)$$

z których można bezpośrednio obliczyć potencjały na wyjściach przekształtnika względem punktu zerowego, gdyż \mathbf{G}^{22} jest macierzą jednostkową

$$\mathbf{v}^2 = -(\mathbf{G}^{22})^{-1} \cdot \mathbf{G}^{21} \cdot \mathbf{v}^1 \quad (12)$$

Przy założeniu, że przekształtnik macierzowy jest zasilany z 9-fazowego idealnego źródła napięcia, którego napięcia są monoharmoniczne i tworzą układ kolejności '1'

$$e_n(t) = \sqrt{2} \cdot E \cdot \cos(\Omega t + (n-1)\beta), \quad \text{dla } n \in \{1, 2, \dots, 9\} \quad (13)$$

gdzie $\beta = \frac{2\pi}{9}$.

Wektor składowych symetrycznych \mathbf{v}^1 ma postać

$$\begin{bmatrix} v_1^0 \\ v_1^1 \\ v_1^2 \\ v_1^3 \\ v_1^4 \\ v_1^5 \\ v_1^6 \\ v_1^7 \\ v_1^8 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{9}{2}} \cdot E \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot e^{j\Omega_1 t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-j\Omega_1 t} \right) \quad (14)$$

Szczegółowa analiza iloczynu macierzy \mathbf{G}^{21} oraz wektora \mathbf{v}^1 prowadzi do wniosku, że w wektorze \mathbf{v}^2 pojawiają się jedynie składowe o ściśle określonych pulsacjach. Aby wynik mnożenia danego wyrazu szeregu (10) przez wektor (14) był niezerowy, wyraz ten musi posiadać niezerowy element w kolumnie '1' lub w kolumnie '8' (oznaczonych zgodnie z numeracją składowych symetrycznych '0', '1', '2', ..., '8'). Będą to wyrazy o numerach $-1 \pm k \cdot 9$ dla pierwszego składnika sumy w (14) oraz $1 \pm k \cdot 9$ dla drugiego jej składnika, gdzie $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. W efekcie otrzymuje się wektor składowych symetrycznych napięć wyjściowych o postaci

$$\begin{bmatrix} v_2^0 \\ v_2^1 \\ v_2^2 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\{ \dots + E \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{C}_{10}^* \end{bmatrix} \cdot e^{j(\Omega_1 - 10\Omega)t} + \begin{bmatrix} 0 \\ C_{10} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot e^{-j(\Omega_1 - 10\Omega)t} \right) + \dots + E \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{C}_1^* \end{bmatrix} \cdot e^{j(\Omega_1 - \Omega)t} + \begin{bmatrix} 0 \\ C_1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot e^{-j(\Omega_1 - \Omega)t} \right) + \dots + E \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{C}_8^* \end{bmatrix} \cdot e^{j(\Omega_1 + 8\Omega)t} + \begin{bmatrix} 0 \\ C_8 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot e^{-j(\Omega_1 + 8\Omega)t} \right) + \dots \right\} \quad (15)$$

gdzie

$$C_k = \frac{\sin\left(k \frac{\beta}{2}\right)}{\left(k \frac{\beta}{2}\right)} \cdot e^{-j\left(k \frac{\beta}{2}\right)}$$

Wektor ten zapisano w postaci par wyrazów o pulsacjach $\{(\Omega_1 + (-1+r \cdot 9) \cdot \Omega)\}$, dla $r \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Obliczenie wartości fazowych dla każdej takiej pary pokazuje, że tworzą one układy symetryczne

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \\ v_{2,3} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot E \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_k \end{bmatrix} \cdot e^{j(\Omega_1+k\Omega)t} + \begin{bmatrix} 0 \\ C_k^* \\ 0 \end{bmatrix} \cdot e^{-j(\Omega_1+k\Omega)t} \right) \\ \begin{bmatrix} v_{2,1}^k \\ v_{2,2}^k \\ v_{2,3}^k \end{bmatrix} &= \sqrt{2} U_{2,k} \begin{bmatrix} \cos\left(\left(\Omega_1 + k\Omega\right)t + k\frac{\beta}{2}\right) \\ \cos\left(\left(\Omega_1 + k\Omega\right)t + k\frac{\beta}{2} + \alpha\right) \\ \cos\left(\left(\Omega_1 + k\Omega\right)t + k\frac{\beta}{2} + 2\alpha\right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

gdzie $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, $\beta = \frac{2\pi}{9}$.

Wartości skuteczne wyjściowych napięć fazowych określa wzór

$$U_{2,k} = E \cdot \frac{\sin\left(k\frac{\beta}{2}\right)}{\left(k\frac{\beta}{2}\right)} \quad (17)$$

Pozwala to zapisać ogólny wzór opisujący wyjściowe napięcia fazowe w postaci sumy składowych o pulsacjach

$$\begin{bmatrix} v_{2,1}^k \\ v_{2,2}^k \\ v_{2,3}^k \end{bmatrix} = \sum_k \sqrt{2} U_{2,k} \begin{bmatrix} \cos\left(\left(\Omega_1 + k\Omega\right)t + k\frac{\beta}{2}\right) \\ \cos\left(\left(\Omega_1 + k\Omega\right)t + k\frac{\beta}{2} + \alpha\right) \\ \cos\left(\left(\Omega_1 + k\Omega\right)t + k\frac{\beta}{2} + 2\alpha\right) \end{bmatrix}$$

w której sumowania następują po indeksach $k \in \{(-1+r \cdot 9)\}$, dla $r \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, co daje następujące pulsacje w napięciach wyjściowych

dla $r = 0$	$k = -1$	$\Omega_1 - \Omega$	dla $r = -1$	$k = -10$	$\Omega_1 - 10\Omega$
dla $r = 1$	$k = 8$	$\Omega_1 + 8\Omega$	dla $r = -2$	$k = -19$	$\Omega_1 - 19\Omega$
dla $r = 2$	$k = 17$	$\Omega_1 + 17\Omega$	dla $r = -3$	$k = -28$	$\Omega_1 - 28\Omega$
dla $r = 3$	$k = 26$	$\Omega_1 + 26\Omega$			
itd.					

Z tego prostego przeliczenia wynika, że aby otrzymać z przekształtnika macierzowego napięcia wejściowe o pulsacji Ω_2 dla podstawowej harmonicznej, należy sterować zaworami przekształtnika z pulsacjami spełniającymi zależność $\Omega_2 = |\Omega_1 - \Omega|$, czyli $\Omega = \Omega_1 - \Omega_2$ lub $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$. Dla pulsacji sterowania mniejszej od pulsacji napięć wejściowych $\Omega = \Omega_1 - \Omega_2$ układ dla podstawowej harmonicznej napięć wyjściowych będzie miał kolejność '2', czyli przeciwną

$$\begin{bmatrix} v_{2,1}^1 \\ v_{2,2}^1 \\ v_{2,3}^1 \end{bmatrix} = \sqrt{2}U_{2,1} \begin{bmatrix} \cos\left((\Omega_1 - \Omega)t - \frac{\beta}{2}\right) \\ \cos\left((\Omega_1 - \Omega)t - \frac{\beta}{2} + \alpha\right) \\ \cos\left((\Omega_1 - \Omega)t - \frac{\beta}{2} + 2\alpha\right) \end{bmatrix}$$

natomiast dla pulsacji sterowania większej od pulsacji napięć wejściowych $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ na wyjściu otrzymuje się układ napięć kolejności '1', czyli zgodnej

$$\begin{bmatrix} v_{2,1}^1 \\ v_{2,2}^1 \\ v_{2,3}^1 \end{bmatrix} = \sqrt{2}U_{2,1} \begin{bmatrix} \cos\left((\Omega - \Omega_1)t + \frac{\beta}{2}\right) \\ \cos\left((\Omega - \Omega_1)t + \frac{\beta}{2} - \alpha\right) \\ \cos\left((\Omega - \Omega_1)t + \frac{\beta}{2} - 2\alpha\right) \end{bmatrix}$$

Z tej uproszczonej analizy można bardzo prosto określić jakościowo i ilościowo widmo napięć wyjściowych wyidealizowanego przekształtnika macierzowego. Jako przykład przeliczono widma Fouriera dla generatora 9-fazowego o prędkości obrotowej 15 000 obr./min i liczbie biegunów $2p = 2$, wytwarzającego symetryczny układ napięć fazowych o wartości skutecznej 220 V oraz częstotliwości $f_1 = 250$ Hz.

Tabela 1

Widmo napięć wyjściowych dla $f_1 = 250$ Hz, $f = 200$ Hz, $E = 220$ V

r	k	Ω_k [Hz]	$U_{2,k}$ [V]
0	-1	50	215,0
-1	-10	1750	21,5
1	8	1850	26,9
-2	-19	3550	11,3
2	17	3650	12,7
-3	-28	5350	7,7
3	26	5450	8,3

Tabela 2

Widmo napięć wyjściowych dla $f_1 = 250$ Hz, $f = 300$ Hz, $E = 220$ V

r	k	Ω_k [Hz]	$U_{2,k}$ [V]
0	-1	50	215,0
1	8	2650	26,9
-1	-10	2750	21,5
2	17	5350	12,7
-2	-19	5450	11,3
3	26	8050	8,3
-3	-28	8150	7,7

W tabeli 1 zestawiono częstotliwości oraz wartości skuteczne harmonicznych w fazowych napięciach wyjściowych dla częstotliwości przełączeń zaworów przekształtnika mniejszej od częstotliwość napięć wejściowych $f = 200$ Hz. W tabeli 2 zestawiono częstotliwości oraz wartości skuteczne harmonicznych w fazowych napięciach wyjściowych dla częstotliwości przełączeń zaworów przekształtnika większej od częstotliwość napięć wejściowych $f = 300$ Hz. Analiza tych widm wskazuje na bardzo korzystne ich cechy, gdyż występują w nich wyższe harmoniczne relatywnie wysokich rzędów o stosunkowo niskich amplitudach. Korzystniejsze jest widmo przy wyższej częstotliwości przełączeń zaworów przekształtnika macierzowego, co może ułatwić filtrację napięć wyjściowych. Widma te korelują z widmami prezentowanymi w [3, 4], zarówno jakościowo, jak i ilościowo. Należy jednak pamiętać, że obliczono je dla wyidealizowanego przypadku, gdy przekształtnik jest zasilany z idealnego źródła napięciowego oraz nie jest obciążony na wyjściu. Analiza układu rzeczywistego byłaby niewspółmiernie bardziej złożona i nie pozwoliła na uzyskanie tak przejrzystych wyników.

4. Podsumowanie

W artykule przedstawiono wyniki analizy przemiany parametrów napięć przez przekształtnik macierzowy sterowany według specjalnego algorytmu. Szczegółowo rozpatrzono przekształtnik macierzowy o 9-fazowym wejściu i 3-fazowym wyjściu, którego celem jest także przemiana wysokiej częstotliwości napięć, uzyskiwanych z wysokoobrotowego generatora synchronicznego, na częstotliwość sieci elektroenergetycznej. W wyniku pewnej idealizacji całego układu, złożonego z generatora, przekształtnika macierzowego oraz odbiorów możliwe okazało się przeprowadzenie rozważań czysto analitycznych, które pozwoliły na określenie widma napięć wyjściowych. Jako rezultat analizy w dziedzinie częstotliwości, dzięki zastosowaniu do opisu przekształtnika macierzowego składowych symetrycznych, otrzymano bardzo proste zależności określające najważniejsze cechy widma napięć wyjściowych przy monoharmonicznych napięciach wejściowych. Drogą rozważań analitycznych określono nie tylko jakościowe cechy widma napięć wejściowych, tj. częstotliwości pojawiające się w tych napięciach, lecz także odpowiadające im wartości amplitud wyższych harmonicznych w napięciach. Szczególne znaczenie ma określenie częstotliwości

sterowania zmianami stanu zaworów przekształtnika macierzowego, zapewniającej uzyskanie żądanej częstotliwości na wyjściu.

Pomimo zastosowanych w analizie uproszczeń wyniki analiz bardzo dobrze obrazują proces przekształcania sygnałów w przekształtniku macierzowym 9×3 i mogą być względnie prosto uogólnione na przekształtniki macierzowe o N-fazowym wejściu oraz M-fazowym wyjściu, sterowanych według tej samej strategii.

Literatura

- [1] Sobczyk T.J., *Voltage-current equations of power electronic matrix converters in frequency domain*, Archives of Electrical Engineering, Vol. 51, No. 1, PWN, Warszawa 2002, 105-114.
- [2] Sieńko T., Sobczyk T.J., *Sposób sterowania przekształtnikiem macierzowym*, Zgłoszenie patentowe w Polskim Urzędzie Patentowym, No. P 363198, 2003.
- [3] Sieńko T., Sobczyk T.J., *Matrix converter control for applications to multi-phase high-speed generators*, Archives of Electrical Engineering, Vol. 53, No. 2, PWN, Warszawa 2004, 217-228.
- [4] Sieńko T., Sobczyk T.J., *Matrix converter for high-speed generators*, Proc. of IEEE IEMDC (International Electric Machines and Drives Conference) 2005, San Antonio, 15-18.05.2005, CD – IEEE Catalog 05EX1023C, 1975-1980.
- [5] Sobczyk T.J., Borkowski D., *Application of matrix converter for power flow control in a transmission line*, Proc. of IEEE Lausanne PowerTech, 1-5.07.2007, Lausanne, CD – Paper No. 138.