

MAŁGORZATA JANUS-MICHALSKA\*

## ZASADA DE SAINT VENANTA W PRZYPADKU MATERIAŁÓW KOMÓRKOWYCH O UJEMNYM WSPÓŁCZYNNIKU POISSONA

---

### PRINCIPLE OF DE SAINT VENANT FOR AUXETIC CELLULAR MATERIALS

#### Streszczenie

W niniejszym artykule przedstawiono zastosowanie teorii wyężenia sformułowanej dla materiałów komórkowych o ujemnym współczynniku Poissona. Wyznaczenie energii sprężystej odbywa się w dwóch skalach: efektywnego continuum i szkieletu belkowego. Efektywne continuum jest oparte na uśrednianiu potencjału sprężystego, co jest podstawą konstruowania macierzy sztywności. Zastosowanie energetycznego kryterium wyężenia dla sprężystych stanów własnych tensora sztywności pozwala sformułować warunek granicznej sprężystej pracy materiału i zdefiniować miarę wyężenia. Przestrzenny rozkład wyężenia w materiale pokazano na przykładach testujących stosowalność zasady de Saint Venanta.

*Słowa kluczowe: materiały komórkowe, ujemny współczynnik Poissona, model efektywny, zasada de Saint Venanta*

#### Abstract

The paper presents application of material effort theory formulated for anisotropic cellular material with negative Poisson's ratio. Energy considerations are carried out in two scales: material skeleton and effective continuum. Distribution of energy density is presented on examples testing applicability of de Saint Venant principle to auxetic cellular materials.

*Keywords: auxetic cellular materials, anisotropy, effective model, elasticity, de Saint Venant principle*

---

\* Dr Małgorzata Janus-Michalska, Instytut Mechaniki Budowli, Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska.

## 1. Wstęp

Materiały komórkowe to grupa nowoczesnych materiałów o własnościach innych niż własności materiału tworzącego szkielet wewnętrzny. Własności te można modelować dzięki odpowiedniemu doborowi parametrów geometrycznych struktury oraz parametrów charakteryzujących materiał szkieletu. W tej grupie można wyróżnić materiały o ujemnym współczynniku Poissona, tzw. *auxetic materials*. Charakteryzują się one rozszerzalnością w kierunku prostopadłym do zadanego kierunku rozciągania. Efekt taki przy różnych kierunkach rozciągania względem układu struktury wewnętrznej można uzyskać, kształtując ściany szkieletu w postaci wielokątów wklęsłych. Prowadzi to do otrzymania materiału anizotropowego, którego własności mechaniczne w zakresie sprężystym opisywane są przez tensor sztywności. Ujemny współczynnik Poissona to jedna z własności tych materiałów. Do innych zaliczamy dużą podatność na odkształcenie objętościowe w porównaniu z podatnością na odkształcenia postaciowe, stąd spotykana nazwa – materiały dylatacyjne. Poza tym te materiały komórkowe charakteryzują się większą deformowalnością w zakresie sprężystym i znacznie mniejszą sztywnością niż materiały komórkowe o tej samej gęstości względnej, lecz topologii szkieletu tworzącej wielokąty wypukłe. Z tych cech mechanicznych wynikają możliwości zastosowania.

Wytwarzaniem materiałów komórkowych, w tym również tych o ujemnym współczynniku Poissona, jak i doświadczalnymi badaniami zajmuje się zespół Lakesa [7]. Towarzyszą temu liczne prace teoretyczne powstające od lat 80. ubiegłego stulecia dotyczące pracy struktury wewnętrznej materiału. Najwcześniejsze prace Gibsona i Ashby'ego [1] przedstawiają dość uproszczony model. Wyprowadzone na jego podstawie cechy mechaniczne materiałów komórkowych o ujemnym współczynniku Poissona są przybliżone i znacznie odbiegają od wyników eksperymentalnych [11]. Na podstawie nowszych prac dotyczących modelowania [9, 10] oraz opartych na teorii ośrodka Cosseratów [11] uzyskano wyniki teoretyczne zgodne z doświadczalnymi. Do najczęściej wykorzystywanych metod obliczeniowych stosowanych do ośrodków niejednorodnych, w tym i materiałów komórkowych, zalicza się metodę homogenizacji. Opracowania te, mimo że stanowią wyczerpujące podstawy teoretyczne i obliczeniowe, często gubią bezpośrednią możliwość wskazania parametrów struktury wewnętrznej i materiału konstruującego szkielet, tak aby otrzymać materiał o zadanych z góry własnościach.

Niniejszy artykuł jest kontynuacją serii opracowań dotyczących modelowania mikro-mechanicznego w materiałach komórkowych [3–6]. Jedną z istotnych zalet opisywanego podejścia jest wskazanie zależności własności ekwiwalentnego continuum, jakim jest materiał komórkowy na poziomie makroskopowym, od topologii struktury wewnętrznej. Ponadto równoczesne przeprowadzenie analizy stanu naprężeń i odkształceń w dwóch skalach – continuum zastępczego i elementów strukturalnych szkieletu – umożliwia określenie granicznych naprężeń i odkształceń sprężystych metodą stanów granicznych w szkielecie [5, 6]. Zastosowanie kryterium energetycznego sformułowanego w przypadku ciała anizotropowego pozwala sformułować hipotezę wyężenia dla materiału komórkowego. Należy podkreślić, że wszystkie cechy mechaniczne dotyczące continuum są wyprowadzane *ab initio*, tzn. z pierwszych zasad dotyczących oddziaływań w strukturze wewnętrznej materiału. Macierz sztywności materiału komórkowego o ujemnym współczynniku Poissona otrzymano przez uśrednianie potencjału sprężystego [3], a hipotezę wyężeniową przez rozdział energii sprężystej na stany własne tensora sztywności. Poza tym

przeprowadzono analizę rozkładu wybranych modułów sztywności w zależności od parametrów mikrostruktury.

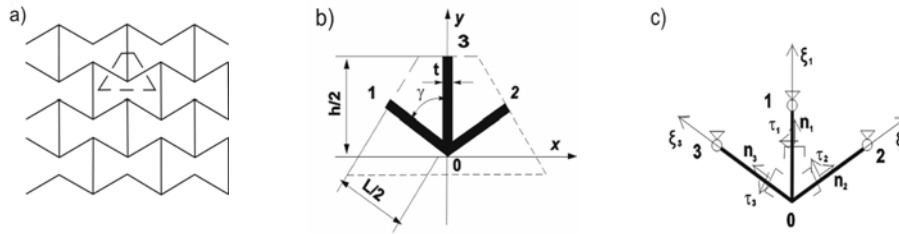
Celem niniejszego artykułu jest zastosowanie wyników wcześniejszych prac we wskazanych dwóch skalach i opis wyteżenia materiału komórkowego o ujemnym współczynniku Poissona w złożonych stanach naprężeń i porównanie z innymi materiałami. W inżynierskich zastosowaniach materiałów niezwykle ważna jest odpowiedź, czy dla zadanej klasy zagadnień brzegowych ma zastosowanie zasada de Saint Venanta. W artykule przedstawiono rozkład gęstości energii sprężystej i analizę pola przemieszczeń w dwóch typowych przypadkach obciążenia samozrównoważonego przyłożonego na brzegu anizotropowej półpłaszczyzny.

## 2. Zasada de Saint Venanta

Zasada de Saint Venanta pozwala zastępować układ rzeczywistych obciążeń statycznie równoważnym układem obciążeń o znanym, najczęściej analitycznym rozwiązaniu problemu brzegowego statyki. W szczególności gdy mamy do czynienia z samozrównoważonym układem sił, powstałe pole naprężeń i odkształceń nie powinno propagować się daleko od strefy przyłożenia obciążenia. Znane w literaturze rozwiązania zagadnień brzegowych w przypadkach obciążeń samozrównoważonych wskazują na duży spadek gęstości energii wraz z oddalaniem się od obciążonego brzegu i dla takich przyjmuje się stosowalność zasady de Saint Venanta. Nawet dla typowych ciał izotropowych można podać takie zagadnienia, w których zasada ta nie znajduje zastosowania (np. pręty cienkościenne). W mechanice znane są przypadki problemów brzegowych, gdzie o możliwości wykorzystania zasady decyduje materiał, a przede wszystkim jego cechy anizotropowe. Przykładem są kompozyty, których zasada de Saint Venanta nie dotyczy [14, 16]. W ciałach anizotropowych obserwuje się ponadto wpływ własności anizotropowych na pola przemieszczeń i naprężeń, a tym samym na rozkład energii sprężystej [13]. W przypadku silnej anizotropii materiału (mierzonej proporcjami odpowiednich składowych macierzy sztywności [3]) zmienność pola odkształceń i naprężeń może okazać się niewystarczająca do wnioskowania na temat stosowalności zasady. Jediną poprawną miarą może być wtedy gęstość energii i jej rozkład. Przedstawione poniżej przykłady mają na celu wskazanie tych rozkładów w materiałach komórkowych o ujemnym współczynniku Poissona (charakteryzujących się silną anizotropią). Z rozkładów energii można wywnioskować, czy zasada de Saint Venanta może być stosowana do materiałów komórkowych powyższego typu.

## 3. Model mikromechaniczny materiałów komórkowych o ujemnym współczynniku Poissona

Do rozważań przyjęto materiał komórkowy o szkielecie modelowanym przez płaską strukturę belkową połączoną w sztywnych węzłach, tworzącą układ wielokątów wklęsłych (rys. 1a). Analiza może się również odnosić do struktury przestrzennej (o ścianach komórkowych w powyższym układzie) pracującej w płaskich stanach. Modelowanie mikromechaniczne [2] opiera się na analizie reprezentatywnej komórki, na podstawie której wyprobowane są wszystkie własności continuum materialnego rozważanego materiału komórkowego. Odpowiadającą przyjętej strukturze komórkę wraz ze schematem statycznym służącym do obliczania sił w szkielecie jest przedstawiono na rys. 1b) i 1c).



Rys. 1. a) Struktura materiału komórkowego, b) komórka reprezentatywna, c) schemat statyczny szkieletu belkowego z zaznaczonymi układami lokalnymi belek

Fig. 1. a) Cellular structure, b) representative unit cell, c) part of a skeleton with stiff node 0 and local beam system of coordinates

Komórkę reprezentatywną opisują geometryczne parametry mikrostruktury:  $l_{0-i}$  – długości elementów belkowych dla  $i = 1, 2, 3$ ,  $t$  – szerokość przekroju belek,  $\gamma$  – kąt między belkami struktury (rys. 1b)) oraz materiałowe parametry mikrostruktury:  $E_s$  – moduł Younga,  $\nu_s$  – współczynnik Poissona,  $R_e$  – granica plastyczności dla materiału szkieletu.

Modelem mechanicznym struktury szkieletu materiału komórkowego jest belka Timoshenki. W materiałach o małej gęstości względnej, charakteryzujących się dużą smukłością elementów strukturalnych, wystarczające jest modelowanie za pomocą belki Bernoulliego–Eulera. Dzięki zastosowaniu modelu belkowego dla dowolnej deformacji w zakresie liniowo-sprężystym komórki reprezentatywnej opisanej tensorem odkształceń można wyznaczyć rozkład sił wewnętrznych w belkach szkieletu. Numeryczne rozwiązania dla zadawanych deformacji uzyskano dzięki metodzie elementów skończonych (program ANSYS).

Continuum zastępcze definiuje się poprzez ekwiwalentność potencjału sprężystego. Potencjał zgromadzony w szkielecie belkowym wyraża się następującym wzorem

$$U = \int_{V_s} ({}^s\Phi_E) dV_s = \sum_{i=1}^3 \left( \int_0^{l_{0-i}} \frac{(F_{in}(\xi_i))^2}{2E_s A} d\xi_i + \mu \int_0^{l_{0-i}} \frac{(F_{it}(\xi_i))^2}{2G_s A} d\xi_i + \int_0^{l_{0-i}} \frac{(M_i(\xi_i))^2}{2E_s J} d\xi_i \right) \quad (1)$$

gdzie:

$F_{in}(\xi_i)$ ,  $F_{it}(\xi_i)$ ,  $M_i(\xi_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  – funkcje sił przekrojowych (podłużnych, poprzecznych i momentu zginającego) w belkach szkieletu,

$A$ ,  $J$  – pole i moment bezwładności przekroju belkowego,

$\mu$  – energetyczny współczynnik ścinania (dla przekroju prostokątnego  $\mu = 1,2$ ).

Gęstość energii dla continuum zastępczego odpowiada uśrednieniu po objętości komórki reprezentatywnej potencjału sprężystego zgromadzonego w szkielecie belkowym

$$\Phi_E = \frac{1}{V} \int_{V_s} ({}^s\Phi_E) dV_s \quad (2)$$

### 3.1. Macierz sztywności materiału komórkowego

Powyższa idea uśredniania potencjału sprężystego stała się podstawą konstruowania macierzy sztywności ekwiwalentnego continuum. Szczegółowy algorytm prowadzący do

jej numerycznego otrzymania oraz analiza własności sprężystych materiału w zależności od parametrów mikrostrukturalnych zostały przedstawione w pracy [3].

Dla podanej struktury składowe macierzy sztywności wyrazić można przez siły przekrojowe w strukturze następującym wzorem [3]

$$S_{IJ} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{l_{0-i}}{E_s A} {}^i \tilde{F}_{in} {}^j \tilde{F}_{in} + \left( \frac{\mu l_{0-i}}{G_s A} + \frac{l_{0-i}^3}{3E_s J} \right) {}^i \tilde{F}_{it} {}^j \tilde{F}_{it} \right\} \quad (3)$$

gdzie  ${}^i \tilde{F}_{in}$  i  ${}^i \tilde{F}_{it}$  to siły w szkielecie od odkształceń jednostkowych  ${}^i \tilde{\varepsilon}$  w  $I$ -tym stanie. Stany jednoosiowe  ${}^1 \varepsilon$ ,  ${}^2 \varepsilon$  wywołują symetryczne rozkłady sił, stan  ${}^3 \varepsilon$  wywołuje antysymetryczny rozkład [3]. Stąd wyrazy macierzy sztywności  $S_{13}$ ,  $S_{23}$  są zerowe. Macierz sztywności płaskiej struktury o rozważanym typie symetrii ma postać

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Zastosowano tu opis Kelvina, dla którego tensor sztywności ma reprezentację macierzową  $S_{IJ}$ , a stany odkształcenia i naprężenia reprezentują wektory o składowych

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \sqrt{2}\varepsilon_{xy}) = ({}^1 \varepsilon, {}^2 \varepsilon, {}^3 \varepsilon), \quad \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sqrt{2}\sigma_{xy}) = ({}^1 \sigma, {}^2 \sigma, {}^3 \sigma) \quad (5)$$

Dla podanej macierzy wyznacza się moduły Kelvina  $\lambda_\alpha$ , które są wartościami własnymi macierzy sztywności oraz stany własne wyrażone przez odkształcenia  ${}^\alpha \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \alpha = \text{I, II, III}$ .

Macierz sztywności jest również podstawą do otrzymania rozkładu kierunkowego modułów sprężystych [3], a w szczególności modułu Younga i współczynnika Poissona. Graficzny obraz rozkładu tych wielkości pozwala oszacować, jak silna jest anizotropia materiału.

### 3.2. Naprężenia w dwóch skalach

Rozkład sił w strukturze wewnętrznej powoduje powstanie pola naprężeń obserwowalnych w dwóch skalach. Równanie konstytutywne dla continuum efektywnego zapisane jest relacją

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (7)$$

W szkielecie belkowym, zgodnie z teorią belek, powstają naprężenia  $\boldsymbol{\sigma}^s$ . Warunek graniczny liniowej sprężystości dla elementów szkieletu dla dowolnego stanu odkształceń continuum, a w szczególności dla stanu własnego  $\alpha$  można zapisać w następującej postaci

$$\max_i ({}^\alpha \sigma_x^s) = \max_i \left( \left| \frac{{}^\alpha \tilde{F}_{in}}{A} \right| + \left| \frac{{}^\alpha \tilde{F}_{it} l_i}{J} \right| \right) = k_\alpha {}^\alpha \tilde{\sigma}_x^s = R_\varepsilon, \quad \alpha = \text{I, II, III} \quad i = 1, 2, 3 \quad (8)$$

gdzie:  $k_\alpha$  to skalarny mnożnik stanu jednostkowego.

Odpowiada to zastosowaniu energetycznego kryterium Hubera–Misesa–Henckiego w najbardziej wyężonym punkcie materiału szkieletu, który znajduje się we włóknach skrajnych przywęzłowego przekroju jednej z belek szkieletu komórki reprezentatywnej.

Numeryczne wyznaczenie tego mnożnika prowadzi do określenia granicznych odkształceń i naprężeń continuum w kolejnych stanach własnych

$${}^{\alpha}\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{gr}} = k_{\alpha} {}^{\alpha}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad {}^{\alpha}\boldsymbol{\sigma}^{\text{gr}} = \lambda_{\alpha} {}^{\alpha}\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{gr}} \quad \alpha = \text{I, II, III}$$

### 3.3. Kryterium energetyczne

Za hipotezę wyężeniową dla materiału komórkowego jako ciała anizotropowego przyjęto energetyczne kryterium zaproponowane przez Rychlewskiego. W sprężystym materiale anizotropowym wyrażone jest ono w postaci energii ważonych zgromadzonych w stanach własnych tensora sztywności

$$\sum_{\alpha=1}^{\text{III}} \frac{{}^{\alpha}\Phi_E}{{}^{\alpha}\Phi_E^{\text{gr}}} = 1 \quad (9)$$

Energie krytyczne będące wagami wyznacza się ze wzoru

$${}^{\alpha}\Phi_E^{\text{gr}} = \frac{1}{2} \lambda_{\alpha} k_{\alpha}^2 {}^{\alpha}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 \quad (10)$$

To podejście zastosowano dla pian izotropowych [5], materiałów o różnych regularnych strukturach przestrzennych [6] oraz dla powyższej struktury w pracy [3].

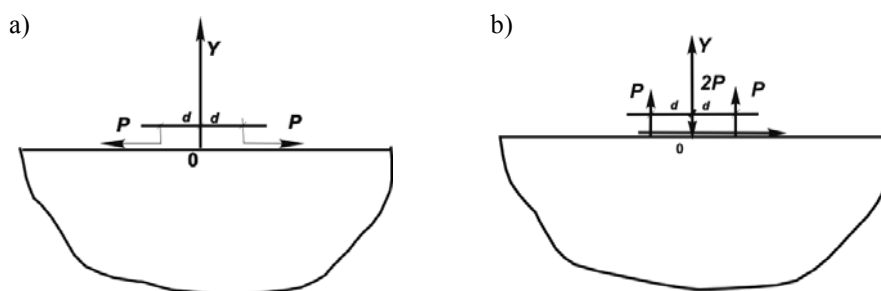
W przypadku dowolnego stanu sprężystego można wprowadzić energetyczny współczynnik, który jest tu obraną miarą wyężenia materiału

$$\Phi = \sum_{\alpha=1}^{\text{III}} \frac{{}^{\alpha}\Phi_E}{{}^{\alpha}\Phi_E^{\text{gr}}} \quad (11)$$

Należy zaznaczyć, że podana analiza zagadnienia płaskiego dotyczyć może zadania w płaskim stanie naprężeń lub zadania w płaskim stanie odkształceń. Obydwa te stany dają zerowanie się energii od składowych tensora naprężeń i odkształceń spoza płaszczyzny.

## 4. Przykłady

Obliczenia numeryczne przeprowadzono w dwóch przypadkach obciążenia brzegu anizotropowej półpłaszczyzny, które przedstawiono na rys. 2.

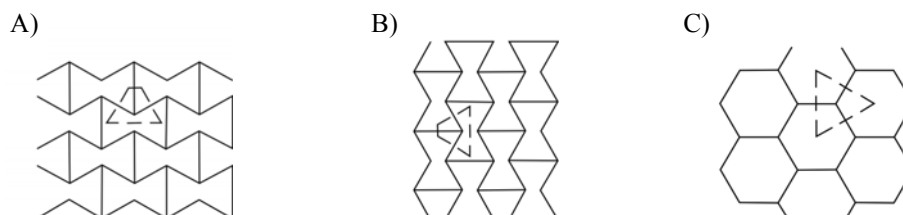


Rys. 2. Obciążenie brzegu sprężystej anizotropowej półpłaszczyzny: a) samozrównoważony układ sił stycznych, b) samozrównoważony układ sił normalnych

Fig. 2. Selfequilibrated load applied to anisotropic halfplane: a) tangent load, b) normal load

Wartości sił  $P$  dobrano do każdego przypadku materiału i typu obciążenia, tak aby wyężenie maksymalne było graniczne ( $\varphi = 1$ ). Na mapach wyężenia obserwowano obszar kwadratowy o wymiarach  $2\text{ m} \times 2\text{ m}$ . Przyjęto wartość parametru opisującego rozstaw sił  $d = 0,2\text{ m}$ .

Rozważane są materiały komórkowe przedstawione na rys. 3.



Rys. 3. Wybrane materiały komórkowe – materiał o ujemnym współczynniku Poissona:

A) układ poziomy struktury, B) układ pionowy struktury, C) materiał izotropowy o strukturze plastra miodu

Fig. 3. Chosen material structures – auxetic material: A) horizontal pattern, B) vertical pattern, C) isotropic material with honeycomb structure

Przyjęto materiał szkieletu o następujących parametrach:  $E_s = 10\text{ GPa}$ ,  $\nu_s = 0,3$ ,  $R_e = 100\text{ MPa}$ .

Dane geometryczne poszczególnych mikrostruktur podano w tab. 1. Parametry te dobrano w taki sposób, aby otrzymać materiały komórkowe o tej samej gęstości względnej.

Tabela 1

Specyfikacja struktury materiału komórkowego

Typ struktury	Parametry geometryczne szkieletu [mm]	
A, B	$l_{0-1} = 1,36$ , $l_{0-2} = 1,5$ , $l_{0-3} = 1,5$ , $t = 0,15$	$\gamma = 70^\circ$
C	$l_{0-1} = 0,75$ , $l_{0-2} = 0,75$ , $l_{0-3} = 0,75$ , $t = 0,15$	

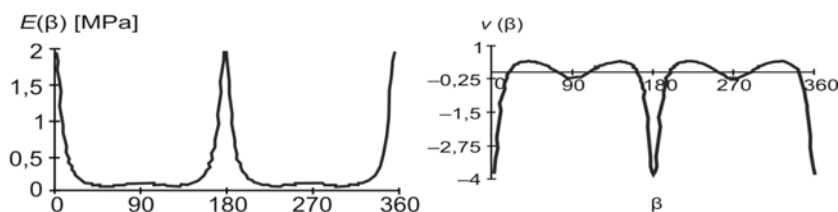
Materiały o zadanych mikrostrukturach mają następujące macierze sztywności

$$\mathbf{S}_A = \begin{bmatrix} 91,9865 & -19,7743 & 0 \\ -19,7743 & 4,3792 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1988 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\mathbf{S}_B = \begin{bmatrix} 4,3792 & -19,7743 & 0 \\ -19,7743 & 91,9865 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1988 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$$\mathbf{S}_C = \begin{bmatrix} 294,248 & 283,102 & 0 \\ 283,102 & 294,248 & 0 \\ 0 & 0 & 11,146 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Na rysunku 4 pokazano rozkłady kierunkowe modułu Younga i współczynnika Poissona dla materiału A. Kąt  $\beta$  określa kierunek rozciągania względem osi  $x$  zdefiniowanej jak na rys. 1. Materiał B ma te same rozkłady przesunięte w fazie o kąt  $90^\circ$ .



Rys. 4. Wykres zależności modułu Younga i współczynnika Poissona od kierunku rozciągania względem układu lokalnego struktury materiału komórkowego

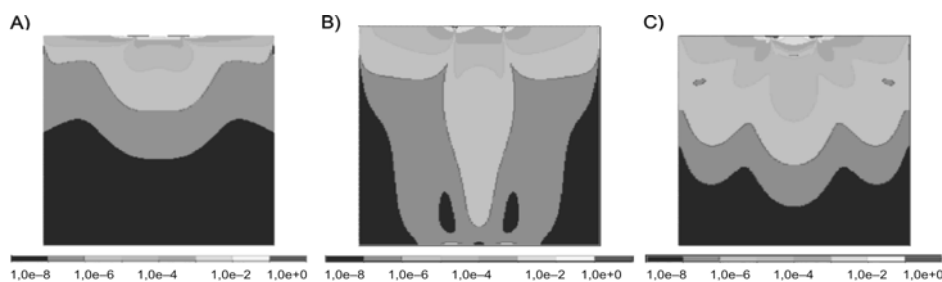
Fig. 4. Dependence of Young modulus and Poissons ratio on tension direction

Dla struktury C stałe wartości modułu Younga i współczynnika Poissona dla podanych parametrów mikrostruktury wynoszą:  $E_c = 21,869$  MPa,  $\nu_c = 0,962$ .

Należy podkreślić, że struktury A i B charakteryzują się bardzo małą sztywnością, stąd nośność w zakresie sprężystym jest dużo mniejsza w porównaniu z nośnością materiałów o innych strukturach wewnętrznych.

Obliczenia numeryczne wykonano z użyciem metody elementów skończonych za pomocą programu ANSYS. Wyniki przedstawiono w postaci map wyężenia materiału oraz wykresów przemieszczeń radialnych punktów na osi symetrii  $Y$  podanych jako funkcje odległości od początku układu współrzędnych  $v(r)$  (rys. 2). Wartości sił  $P$  wywołujących w materiałach maksymalne wyężenie w zakresie sprężystym oraz wartości maksymalnych przemieszczeń w materiale podano w tab. 2a i b pod mapami wyężenia.

#### Zadanie a. Układ sił poziomych



Rys. 5. Graficzny obraz wyężenia w materiale (rozkład współczynnika  $\varphi$ )

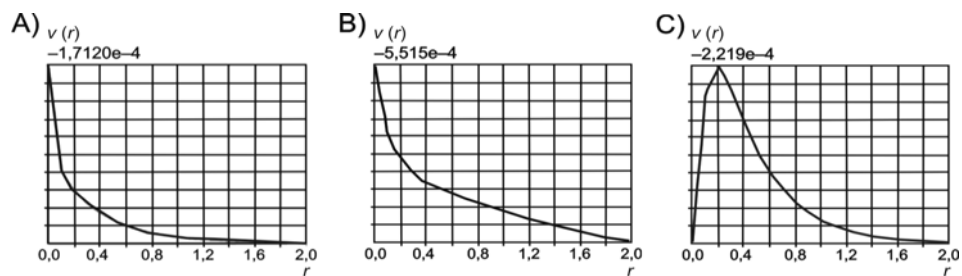
Fig. 5. Distribution of material effort coefficient



Tabela 2a

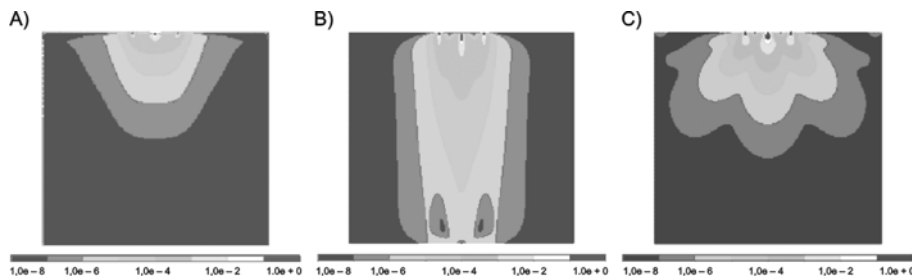
## Nośność sprężysta materiału i maksymalne przemieszczenie

Typ struktury	$P_{\max}$ [kN]	$v_{\max}$ [m]
A	0,57	$v(0) = -1,712 \cdot 10^{-3}$
B	0,2	$v(0) = -5,515 \cdot 10^{-4}$
C	8,9	$v(0,2) = -2,219 \cdot 10^{-4}$



Rys. 6. Wykresy przemieszczeń radialnych punktów na osi symetrii Y  
 Fig. 6. Radial displacements for symmetry axis Y

Zadanie b. Układ sił pionowych

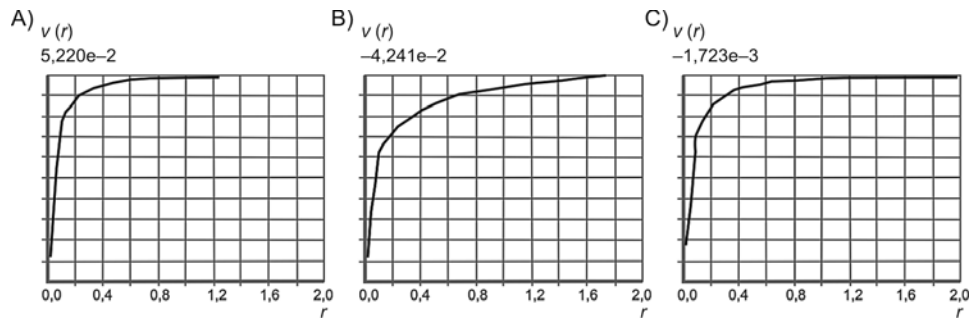


Rys. 7. Graficzny obraz wyężenia w materiale (rozkład współczynnika  $\varphi$ )  
 Fig. 7. Distribution of material effort coefficient

Tabela 2b

## Nośność sprężysta materiału i maksymalne przemieszczenie

Typ struktury	$P_{\max}$ [kN]	$v_{\max}$ [m]
A	0,084	$v(0) = 5,220 \cdot 10^{-2}$
B	0,24	$v(0) = 4,241 \cdot 10^{-2}$
C	5,0	$v(0) = 1,723 \cdot 10^{-3}$



Rys. 8. Wykresy przemieszczeń radialnych punktów na osi symetrii  $Y$   
 Fig. 8. Radial displacements for symmetry axis  $Y$

Analiza map wyężenia przedstawionych na rys. 5 i 7 wskazuje na szybki spadek gęstości energii w obserwowanym obszarze ( $\varphi_{\max} = 1$ ,  $\varphi_{\min}$  rzędu  $1 \cdot 10^{-10}$ ). Wolniejszy spadek energii obserwuje się w kierunkach o większym module Younga. Efekt wolniejszego spadku w tych kierunkach jest także widoczny na radialnym polu przemieszczeń.

## 5. Wnioski

Samozrównoważony układ sił działający w małym obszarze anizotropowego komórkowego ciała sprężystego powoduje powstanie takiego pola naprężeń i odkształceń, że gęstość energii sprężystej gwałtownie spada wraz ze wzrostem odległości od obciążonego obszaru, stąd wniosek o dobrej stosowalności zasady de Saint Venanta w ciałach komórkowych. W materiałach o ujemnym współczynniku Poissona jako efekt silnej anizotropii następuje wydłużenie obszarów o większym wyężeniu w kierunkach większej sztywności. Rodzaj anizotropii rzutuje na złożoność konturu tego obszaru.

Powyższe wnioski są istotne dla numerycznego modelowania zadań z udziałem anizotropowych ciał komórkowych.

## Literatura

- [1] Gibson L.J., Ashby M.F., *Cellular Solids*, 2<sup>nd</sup> ed. Cambridge University Press, 1997.
- [2] Nemat-Naser S., Hori M., *Micromechanics*, 2<sup>nd</sup> ed. Elsevier, 1999.
- [3] Janus-Michalska M., *Micromechanical Model of Auxetic Cellular Materials*, praca w recenzji w redakcji Archives of Metallurgy and Materials.
- [4] Janus-Michalska M., *Effective Models Describing Elastic Behaviour of Cellular Materials*, Archives of Metallurgy and Materials, Vol. 50, issue 3, 2005, 595-608.
- [5] Janus-Michalska M., Pęcherski R.B., *Macroscopic properties of open-cell foams based on micromechanical modelling*, Technische Mechanik, Band 23, Heft 2-4, 2003.

- [6] Kordzikowski P., Janus-Michalska M., Pęcherski R.B., *Specification of Energy – Based Criterion of Elastic Limit States for Cellular Materials*, Archives of Metallurgy and Materials, Vol. 50, issue 3, 2005, 621-634.
- [7] Lakes R.S., *Design considerations for materials with negative Poisson's ratios*, Trans. ASME J. Mech. 115, 1993, 696-700.
- [8] Lakes R.S., *Saint Venant effects for materials with negative Poisson's ratios*, J. Applied Mechanics 59, 1992, 744-746.
- [9] Overaker D.W., Cuitino A.M., Langrana N.A., *Elastoplastic Micromechanical Modeling of Two-dimensional Irregular Convex and Nonconvex (Re-entrant) Hexagonal Foams*, Transactions of ASME 65, 1998.
- [10] Smith C.W., Grima J.N., Evans K.E., *A Novel Mechanism for Generating Auxetic Behaviour in Reticulated Foams: Missing Rib Foam Model*, Acta Materialia 48, 2000, 4349-4356.
- [11] Lakes R.S., *Experimental Micromechanics Method for Conventional and Negative Poisson's Ratio Cellular Solids as Cosserat Continua*, J. Eng. Mat. & Techn. 113, 1992, 148-155.
- [12] Horgan C.O., Knowles J.K., *Recent developments concerning Saint-Venant's Principle*, Adv. Appl. Mech. 23, 1983, 179-267.
- [13] Stronge W.J., Kashtalyan M., *Saint-Venant's principle for two-dimensional anisotropic elasticity*, Acta Mechanica 124, 1997, 213-218.
- [14] Everstine G., Pipkin A.C., *Stress channeling in transversely isotropic composites*, ZAMP 22, 1971, 825-834.
- [15] Maltemilola S.A., Stronge W.J., Durban D., *Diffusion rate for stress in orthotropic materials*, ASME, J. Appl. Mech. 62, 1995, 654-661.
- [16] Arimitsu Y., Nishioka K., Senda T., *A Study of Saint-Venant's principle for composite materials by means of internal stress field*, ASME, J. Appl. Mech. 62, 1995, 53-58.
- [17] Sokolnikoff S., *Mathematical Theory of Elasticity*, 2<sup>nd</sup> ed., McGraw Hill, New York 1956.
- [18] Toupin R.A., *Saint Venant's Principle*, Arch. Mech. Anal., 1965, 83-96.